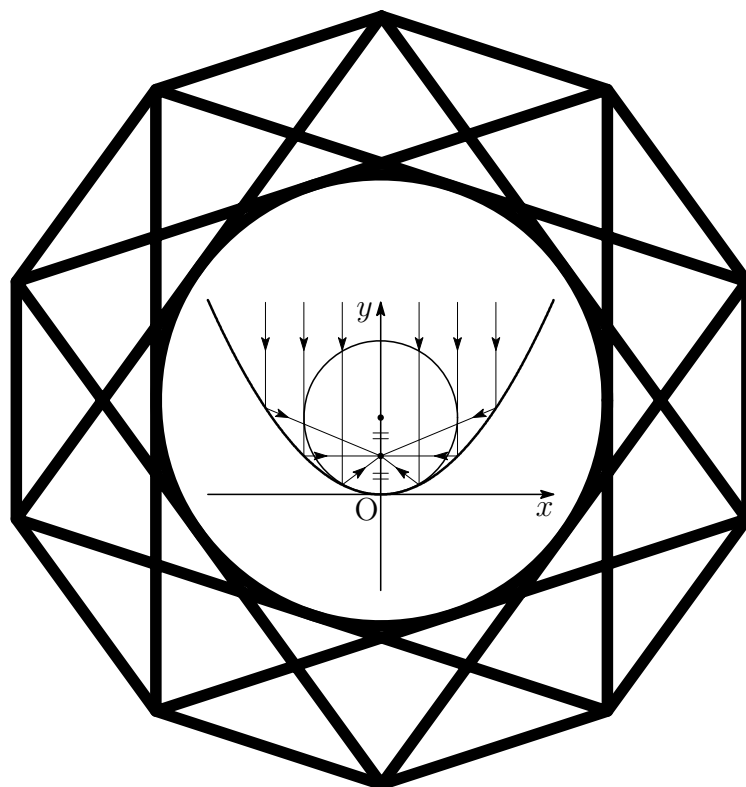


熊本県入試問題 数学正解

大学・短大・医療系

2007年受験用



序

熊本県内の高校間，特に工業科をもつ県立高校 10 校を中心に進路情報の共有化を推進するため，進路指導の研究協議会が平成 8 年度に発足した．時代の要請である情報化とそれを支えるインフラが平成 12 年度に整備されたことにより，同協議会が得意とする情報技術を活用した進路指導の在り方が研究され，学校間で就職試験問題・入学試験問題などが共有化されることになった（ユーザー名とパスワードが必要）．

平成 14・15 年度には「教育情報共有化促進モデル事業」が県立高校数学科を中心に推進され，近年「ICT 活用に関する研究」も行われ，こうした事業の成果として，教科教材や試験問題がインターネットを通じて入手できるようになった．熊本県内の入試問題（数学）などを次のサイトに掲載しており，本書はこれらの情報を紹介するために作成した電子文書（PDF）である．

<http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/>

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 熊本県内の大学・短大・医療系専門学校（リハビリ・高看）が公開した平成 18 年度（2006）の入学試験問題（数学）をすべて掲載した．
2. 解答においては，基本事項の使い方を示し，答案の書き方を例示した．
3. 試験日程や試験時間を調べて掲載した．なお，複数の教科を同時に受験する入学試験については，その試験時間を明示しなかった．

平成 18 年 7 月 編者

目次

序	i
第1章 大学・短大	1
1.1 熊本大学	2
1.1.1 二次前期文系(教育学部,医学部保健学科看護学専攻)120分	2
1.1.2 二次前期理系(理,医,薬,工学部)120分	10
1.1.3 二次後期(理学部)	19
1.2 熊本県立大学	25
1.2.1 二次前期(環境共生学部居住環境学専攻)	25
1.3 崇城大学	28
1.3.1 推薦試験1日目(普通高校)60分	28
1.3.2 推薦試験2日目(普通高校)60分	33
1.3.3 推薦試験1日目(専門高校)60分	37
1.3.4 推薦試験2日目(専門高校)60分	41
1.3.5 前期日程1日目	44
1.3.6 前期日程2日目	52
1.3.7 後期日程	59
1.3.8 前期日程(薬学部)80分	67
1.3.9 後期日程(薬学部)80分	72
1.4 九州東海大学	77
1.4.1 一般試験1日目60分	77
1.4.2 一般試験2日目60分	93
1.5 熊本学園大学	110
1.5.1 A日程1日目70分	110
1.5.2 A日程2日目70分	118
1.5.3 A日程3日目70分	128
1.5.4 A日程4日目70分	136
1.5.5 A日程5日目70分	143
1.6 熊本保健科学大学	150
1.6.1 一般推薦	150
1.6.2 一般前期(衛生技術科)	158
1.6.3 一般前期(看護学科)	166
1.7 九州看護福祉大学	174
1.7.1 一般試験(地方試験1)	174
1.7.2 一般試験(地方試験2)	182

1.7.3	一般試験(看護学科・リハビリテーション学科)	188
1.7.4	一般試験(社会福祉学科)	194
1.8	九州ルーテル学院大学	202
1.8.1	一般I期試験 70分	202
1.8.2	一般II期試験 70分	207
1.9	熊本県立保育大学校	212
1.9.1	一般試験 60分	212
1.10	熊本県立技術短期大学校	216
1.10.1	推薦試験 90分	216
1.10.2	一般試験 90分	227
第2章	医療系	235
2.1	メディカルカレッジ青照館	236
2.1.1	推薦前期	236
2.1.2	推薦後期	244
2.1.3	一般試験A日程 60分	252
2.1.4	一般試験B日程 60分	261
2.1.5	一般試験C日程 60分	270
2.2	熊本リハビリテーション学院	280
2.2.1	一般前期	280
2.2.2	一般後期	286
2.3	九州中央リハビリテーション学院	292
2.3.1	一般試験A	292
2.3.2	一般試験B	298
2.4	西日本リハビリテーション学院	304
2.4.1	一般試験(昼間部)	304
2.4.2	一般試験(夜間部)	314
2.5	熊本労災看護専門学校	323
2.5.1	一般試験 60分	323
	付録	332

第 1 章 大学・短大

平成 18 年度 (2006) に新教育課程での入学試験に移行し、熊本県内の大学・短大の入学試験についても、数学 I などを中心に出题内容の変更が目立った。こうした状況下において、本書は、県内の大学・短大が要求する数学的知識とはどのようなものであるかを紹介するとともに、県内で進学を目指す者にとって何を学んでおくべきか、またどのような受験対策をとるべきであるか。これらの問いに本書が何らかの解答を与えることを編者は希望するものである。また、本書に掲載した入学試験問題は、次のサイトからもダウンロード (PDF) することができるようにした。

<http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/>

本書に掲載した平成 18 年度 (2006) 入学試験問題は次のとおりである。

本書に掲載した 2006 年度入学試験問題		
学校名	試験科目	試験日
熊本大学 (文系一般 2 次前期)	I・II・A・B	2/25
熊本大学 (理系一般 2 次前期)	I・II・III・A・B・C	2/25
熊本大学 (理学部一般 2 次後期)	I・II・III・A・B・C	3/12
熊本県立大学 (一般 2 次前期)	I・II・III・A・B・C	2/25
崇城大学 (普通高校推薦)	I・II	11/12・13
崇城大学 (専門高校推薦)	I	11/12・13
崇城大学 (一般前期・後期)	I・II・A・B	1/30・31, 3/14
九州東海大学 (一般)	[I・A] と [II・B] の選択	2/2・3
熊本学園大学 (一般 A 日程)	I・II・A	2/9・10・11・12・13
熊本保健科学大学 (一般推薦)	I・A	11/19
熊本保健科学大学 (一般)	I・II	2/4
九州看護福祉大学 (一般)	I	2/1・2・3
九州ルーテル学院大学 (一般)	I	2/4, 3/4
熊本県立保育大学校 (一般)	I	2/3
熊本県立技術短期大学校 (推薦)	I	9/18
熊本県立技術短期大学校 (一般)	I・II	2/12

1.1 熊本大学

1.1.1 二次前期文系 (教育学部, 医学部保健学科看護学専攻) 120分

1 大小2つのサイコロを投げて, 大きいサイコロの目の数を a , 小さいサイコロの目の数を b とする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ の最小値が -5 より小さくなる確率を求めよ。
- (2) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと x 軸との交点で, x 座標の大きい方を選ぶ。その x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。
- (3) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと関数 $y = bx^2$ のグラフが異なる2点で交わる確率を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} + a_n = 3n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

- (1) $b_n = a_n - \frac{6n-7}{4}$ とおくと, b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を求めよ。
- (3) $\sum_{n=1}^{50} a_n$ の値を求めよ。

3 関数 $f(x) = |x(x+1)| - x + 1$ に対して, $y = f(x)$ のグラフを C とする。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C 上の点 $(a, f(a))$ ($-1 < a < 0$) における接線が2点 $P(-1, 2)$, $Q(0, 1)$ を通る直線に平行になるとき, a の値およびその接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 放物線 $y = x^2 + 1$ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) (1) の接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

- 4 $\triangle OAB$ の辺 AB , OB の中点をそれぞれ C , D とする。辺 OA 上に $OE : EA = 1 : 4$ となる点 E をとる。線分 OC と線分 BE , AD との交点をそれぞれ P , Q とし, 線分 AD と線分 BE の交点を R とする。 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ とおくととき, 次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{PQ} をベクトル \vec{a} , \vec{b} で表せ。
- (2) ベクトル \vec{PR} をベクトル \vec{a} , \vec{b} で表せ。
- (3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 1$, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ のとき, $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

解答例

1 (1) $y = ax^2 + 2x - b = a \left(x + \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} - b$

$a > 0$ であるから 最小値は $-\frac{1}{a} - b$

条件より $-\frac{1}{a} - b < -5$ すなわち $\frac{1}{a} + b > 5$

$0 < \frac{1}{a} \leq 1$ であるから, $b = 5$ または $b = 6$ のときに常に成り立つ。

よって $\frac{6 \times 2}{6^2} = \frac{1}{3}$

- (2) $f(x) = ax^2 + 2x - b$ とおくと

$$f(x) = a \left(x + \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} - b$$

$a > 0$ かつ $-\frac{1}{a} < 1$ であるから $f(1) < 0$ のとき条件を満たすから

$$f(1) = a + 2 - b < 0 \text{ より } a > b + 2$$

これを満たすのは,

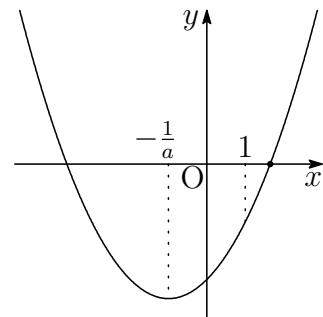
$$(a, b) = (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 6)$$

の 6 通り. よって $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$

- (3) 2 式より $ax^2 + 2x - b = bx^2$ すなわち $(a - b)x^2 + 2x - b = 0$
条件を満たすのは, $a - b \neq 0$ かつ 判別式 $D > 0$ のときであるから

$$D/4 = 1 + b(a - b) > 0 \text{ より } b(b - a) < 1$$

$b \geq 1$ かつ $a \neq b$ より $b < a$ よって $\frac{{}_6C_2}{6^2} = \frac{5}{12}$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad b_n = a_n - \frac{6n-7}{4} \text{ より } a_n = b_n + \frac{6n-7}{4}, a_{n+1} = b_{n+1} + \frac{6n-1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad a_{n+1} + a_n &= \left(b_{n+1} + \frac{6n-1}{4}\right) + \left(b_n + \frac{6n-7}{4}\right) \\ &= b_{n+1} + b_n + 3n - 2 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} + a_n = 3n - 2 \text{ であるから } \quad b_{n+1} + b_n = 0$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果より } \quad b_{n+1} = -b_n \quad (n \geq 1)$$

$$\text{よって} \quad b_n = b_1 \cdot (-1)^{n-1}$$

$$\text{また} \quad b_1 = a_1 - \frac{6-7}{4} = -2 + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$\text{ゆえに} \quad b_n = -\frac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1}$$

$$\text{したがって} \quad a_n = b_n + \frac{6n-7}{4} = -\frac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{6n-7}{4}$$

$$(3) \quad (2) \text{ の結果より}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} a_n &= \sum_{n=1}^{50} \left\{ -\frac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{6n-7}{4} \right\} \\ &= -\frac{7}{4} \sum_{n=1}^{50} (-1)^{n-1} + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{50} n - \sum_{n=1}^{50} \frac{7}{4} \\ &= -\frac{7}{4} \cdot \frac{1 - (-1)^{50}}{1 - (-1)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{50(50+1)}{2} - \frac{7}{4} \cdot 50 \\ &= 0 + \frac{3825}{2} - \frac{175}{2} = \mathbf{1825} \end{aligned}$$

$$\text{(注)} \quad -\frac{7}{4} \sum_{n=1}^{50} (-1)^{n-1} = -\frac{7}{4} \{1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + 1 + (-1)\} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{50} \frac{6n-7}{4} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{50} (6n-7) = \frac{1}{4} \cdot \frac{50(-1+293)}{2} = 1825$$

3 (1)

(i) $x(x+1) \geq 0$ のとき

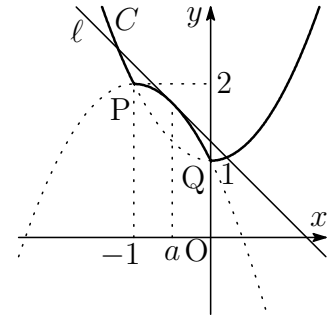
すなわち $x \leq -1, 0 \leq x$ のとき

$$f(x) = x(x+1) - x + 1 = x^2 + 1$$

(ii) $x(x+1) < 0$ のとき

すなわち $-1 < x < 0$ のとき

$$f(x) = -x(x+1) - x - 1 = -x^2 - 2x + 1$$



(i), (ii) より, 曲線 C は右の図のようになる.

直線 PQ の傾きは $\frac{1-2}{0-(-1)} = -1$

$f'(x) = -2x - 2$ より点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ の傾きは $-2a - 2$

この点における接線が直線 PQ に平行であるから

$$-2a - 2 = -1$$

$-1 < a < 0$ に注意して $a = -\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$ より, 接線 ℓ の方程式は

$$y - \frac{7}{4} = -\left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \quad \text{すなわち} \quad y = -x + \frac{5}{4}$$

(2) 求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^0 \{(-x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 1)\} dx \\ &= -2 \int_{-1}^0 (x+1)x dx = -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \{0 - (-1)\}^3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(3) 曲線 C と接線 ℓ の接点以外の交点の x 座標は

$$x^2 + 1 = -x + \frac{5}{4} \quad \text{すなわち} \quad x^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の解である. この解を α, β ($\alpha < \beta$) とおき, 求める面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left(-x + \frac{5}{4}\right) - (x^2 + 1) \right\} dx - S_1 \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \left(x^2 + x - \frac{1}{4}\right) dx - \frac{1}{3} \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

①の解と係数の関係により $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$ であるから

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-1)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 2$$

$\alpha < \beta$ より $\beta - \alpha = \sqrt{2}$ となり

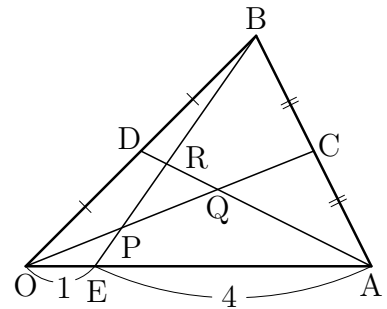
$$S_2 = \frac{1}{6}(\sqrt{2})^3 - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

4 (1) 点Pは線分OC上にあるので

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OC} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

とおける.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b} \\ &= \frac{5k}{2}\overrightarrow{OE} + \frac{k}{2}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$



点Pは線分BE上にあるから

$$\frac{5k}{2} + \frac{k}{2} = 1$$

これを解くと $k = \frac{1}{3}$

したがって $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$... ①

点Qは△OABの重心であるから

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \quad \dots \text{②}$$

①, ②より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} \end{aligned}$$

(2) 点 R は線分 AD 上にあるから

$$\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD} \quad (0 \leq s \leq 1)$$

とおける .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= (1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} \\ &= 5(1-s)\overrightarrow{OE} + \frac{s}{2}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

点 R は線分 BE 上にあるから

$$5(1-s) + \frac{s}{2} = 1$$

これを解くと $s = \frac{8}{9}$

したがって $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \quad \dots \textcircled{3}$

①, ③ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} \\ &= \left(\frac{1}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{18}\vec{a} + \frac{5}{18}\vec{b} \end{aligned}$$

(3) $\triangle PQR$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= \left| \frac{1}{6}(\vec{a} + \vec{b}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{36} (|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{36} (5 + 2 + 1) = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PR}|^2 &= \left| -\frac{1}{18}(\vec{a} - 5\vec{b}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{324} (|\vec{a}|^2 - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 25|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{324} (5 - 10 + 25) = \frac{5}{81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= \left\{ \frac{1}{6}(\vec{a} + \vec{b}) \right\} \cdot \left\{ -\frac{1}{18}(\vec{a} - 5\vec{b}) \right\} \\ &= -\frac{1}{108}(|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 5|\vec{b}|^2) \\ &= -\frac{1}{108}(5 - 4 - 5) = \frac{1}{27}\end{aligned}$$

$$\text{したがって } S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{81} - \left(\frac{1}{27}\right)^2} = \frac{1}{18}$$

発展的解答例 (理系的)

4 (3) 【別解 1】 \vec{a}, \vec{b} を平面上のベクトルとし, $\triangle PQR$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} & \overrightarrow{PR} \end{pmatrix} \right|$$

であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} & \overrightarrow{PR} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} & -\frac{1}{18}\vec{a} + \frac{5}{18}\vec{b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \right| \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{36} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{36} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{36} \sqrt{(\sqrt{5})^2 \cdot 1^2 - 1^2} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

【別解 2】 \vec{a}, \vec{b} を空間のベクトルとし, $\triangle PQR$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right|$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} \right) \times \left(-\frac{1}{18}\vec{a} + \frac{5}{18}\vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{18} \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{18} \vec{a} \times \vec{b} \right| = \frac{1}{36} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \\ &= \frac{1}{36} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{36} \sqrt{(\sqrt{5})^2 \cdot 1^2 - 1^2} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

1.1.2 二次前期理系(理, 医, 薬, 工学部)120分

1 大小2つのサイコロを投げて, 大きいサイコロの目の数を a , 小さいサイコロの目の数を b とする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ の最小値が -5 より小さくなる確率を求めよ。
- (2) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと x 軸との交点で, x 座標の大きい方を選ぶ。その x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。
- (3) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと関数 $y = bx^2$ のグラフが異なる2点で交わる確率を求めよ。

2 原点を O とする座標空間の4点 $A(\sqrt{3}, 3, 0)$, $B(-\sqrt{3}, 3, 0)$, $C(0, 2, 2)$, $P(0, 1, 0)$ および, 平面 OAC , OBC , ABC 上にそれぞれ点 Q, R, S をとる。ベクトル $\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PS}$ が平面 OAC, OBC, ABC にそれぞれ直交するとき, 次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{PQ} を成分で表せ。
- (2) ベクトル \vec{PS} を成分で表せ。
- (3) $\triangle QRS$ の面積を求めよ。

3 n を自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき, 関数 $f(x) = (1-x)^3 x^n$ の極値を求めよ。
- (2) 定積分 $a_n = \int_0^1 (1-x)^3 x^n dx$ を求めよ。
- (3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。

4 関数 $f(x) = 1 + \int_{-x}^x \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}} \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $u = e^{\tan t}$ を t で微分せよ。
- (2) $f(x)$ を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して得られる図形の体積を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad y = ax^2 + 2x - b = a \left(x + \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} - b$$

$a > 0$ であるから 最小値は $-\frac{1}{a} - b$

条件より $-\frac{1}{a} - b < -5$ すなわち $\frac{1}{a} + b > 5$

$0 < \frac{1}{a} \leq 1$ であるから, $b = 5$ または $b = 6$ のときに常に成り立つ.

よって $\frac{6 \times 2}{6^2} = \frac{1}{3}$

(2) $f(x) = ax^2 + 2x - b$ とおくと

$$f(x) = a \left(x + \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} - b$$

$a > 0$ かつ $-\frac{1}{a} < 1$ であるから $f(1) < 0$ のとき条件を満たすから

$$f(1) = a + 2 - b < 0 \quad \text{より} \quad a > b - 2$$

これを満たすのは,

$$(a, b) = (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 6)$$

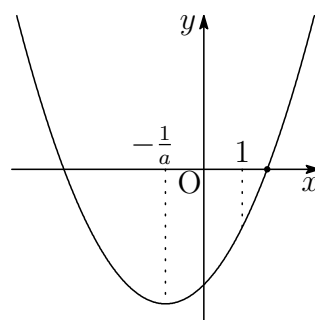
の6通り. よって $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$

(3) 2式より $ax^2 + 2x - b = bx^2$ すなわち $(a - b)x^2 + 2x - b = 0$

条件を満たすのは, $a - b \neq 0$ かつ 判別式 $D > 0$ のときであるから

$$D/4 = 1 + b(a - b) > 0 \quad \text{より} \quad b(b - a) < 1$$

$b \geq 1$ かつ $a \neq b$ より $b < a$ よって $\frac{{}^6C_2}{6^2} = \frac{5}{12}$



2 (1) 点 Q は平面 OAC 上の点であるから

$$\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} \quad (s, t \text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{PQ} \perp$ 平面 OAC より $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OC}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \text{ であるから } & (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ & s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \text{ であるから } & (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \\ & s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + t|\overrightarrow{OC}|^2 - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \end{aligned}$$

上の2式に $\overrightarrow{OA} = (\sqrt{3}, 3, 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0, 2, 2)$, $\overrightarrow{OP} = (0, 1, 0)$ を代入すると

$$12s + 6t - 3 = 0, \quad 6s + 8t - 2 = 0$$

これを解いて $s = \frac{1}{5}$, $t = \frac{1}{10}$

したがって, ①より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{10}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{1}{5}(\sqrt{3}, 3, 0) + \frac{1}{10}(0, 2, 2) - (0, 1, 0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

- (2) 点 S は平面 ABC 上の点であり, $\overrightarrow{PS} \perp$ 平面 ABC より $\overrightarrow{PS} \perp \overrightarrow{AB}$ であるから \overrightarrow{PS} は yz 平面上のベクトルである.

ゆえに, 点 $M(0, 3, 0)$ をとると, S は直線 CM 上の点であるから

$$\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OC} + (1-k)\overrightarrow{OM} \quad (k \text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} \\ &= k\overrightarrow{OC} + (1-k)\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} \\ &= k(0, 2, 2) + (1-k)(0, 3, 0) - (0, 1, 0) \\ &= (0, 2-k, 2k) \end{aligned}$$

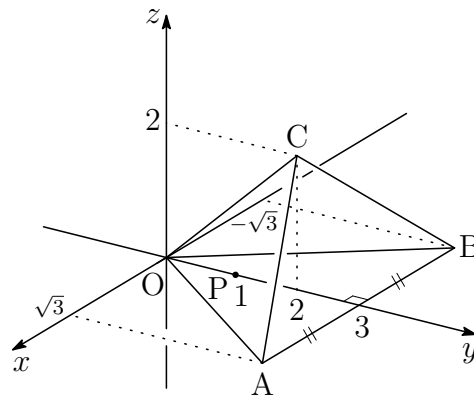
また, $\overrightarrow{PS} \perp \overrightarrow{CM}$ であるから

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = (0, 3, 0) - (0, 2, 2) = (0, 1, -2)$$

これらを $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ に代入すると

$$0 \cdot 0 + (2-k) \cdot 1 + 2k \cdot (-2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{2}{5}$$

したがって $\overrightarrow{PS} = \left(0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$



$$\begin{aligned} (3) (1) \text{より } \vec{OQ} &= \vec{OP} + \vec{PQ} \\ &= (0, 1, 0) + \left(\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{より } \vec{OS} &= \vec{OP} + \vec{PS} \\ &= (0, 1, 0) + \left(0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5} \right) \\ &= \left(0, \frac{13}{5}, \frac{4}{5} \right) \end{aligned}$$

四面体 OABC は yz 平面に関して対称である．点 Q と点 R は yz 平面に関して対称であるから

$$R \left(-\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

$\triangle QRS$ は， $QS = RS$ の二等辺三角形であり， QR の中点を T とすると

$$T \left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

であるから

$$ST = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{4}{5} - \frac{13}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5} \right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$QR = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

したがって，求める $\triangle QRS$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times QR \times ST = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{3\sqrt{30}}{25}$$

3 (1) $n \geq 2$, $f(x) = (1-x)^3 x^n$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1-x)^2(-1) \cdot x^n + (1-x)^3 \cdot n x^{n-1} \\ &= (1-x)^2 x^{n-1} \{n - (n+3)x\} \end{aligned}$$

n が奇数のとき

x	...	0	...	$\frac{n}{n+3}$...	1	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	-
$f(x)$	↗	0	↗	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	↘	0	↘

n が偶数のとき

x	...	0	...	$\frac{n}{n+3}$...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	-
$f(x)$	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	↘	0	↘

n が奇数のとき $x = \frac{n}{n+3}$ で極大値 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$

n が偶数のとき $x = 0$ で極小値 0 ,
 $x = \frac{n}{n+3}$ で極大値 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 (1-x)^3 x^n dx \\ &= \int_0^1 (x^n - 3x^{n+1} + 3x^{n+2} - x^{n+3}) dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{3}{n+2} x^{n+2} + \frac{3}{n+3} x^{n+3} - \frac{1}{n+4} x^{n+4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+4} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+4} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - 2 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

により

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad u' = e^{\tan t}(\tan t)' = \frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}$$

$$(2) \quad \int_{-x}^x \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}} dt = \int_{-x}^0 \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}} dt + \int_0^x \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}} dt \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\int_{-x}^0 \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}} dt \text{ において } t = -u \text{ とおくと } \frac{dt}{du} = -1$$

また, t と u の対応は右のようになる.

$$\begin{aligned} \text{よって } \int_{-x}^0 \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}} dt &= \int_x^0 \frac{1 + \tan^2(-u)}{1 + e^{\tan(-u)}} \cdot (-1) du \\ &= \int_0^x \frac{1 + \tan^2 u}{1 + e^{-\tan u}} du \\ &= \int_0^x \frac{e^{\tan u}(1 + \tan^2 u)}{e^{\tan u} + 1} du \\ &= \int_0^x \frac{e^{\tan t}(1 + \tan^2 t)}{1 + e^{\tan t}} dt \end{aligned}$$

t	$-x \rightarrow 0$
u	$x \rightarrow 0$

ゆえに, $\textcircled{1}$ から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}} dt &= \int_0^x \frac{e^{\tan t}(1 + \tan^2 t)}{1 + e^{\tan t}} dt + \int_0^x \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}} dt \\ &= \int_0^x (1 + \tan^2 t) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \left[\tan t \right]_0^x = \tan x \end{aligned}$$

したがって $f(x) = 1 + \tan x$

(3) 求める回転体の体積を V とすると, (2) の結果より

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2 \tan x + \tan^2 x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \tan x \right) dx \\ &= \pi \left[\tan x - 2 \log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi \left(1 - 2 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \pi(1 + \log 2) \end{aligned}$$

1.1.3 二次後期 (理学部)

1 以下の□に適当な数を入れよ.

xy 平面上の 2 点 $A(1, 2)$, $B(3, \square)$ を通る直線 l_1 の方程式は

$$x + \square y + 3 = 0$$

となる. l_1 に直交し点 $C(3, \square)$ を通る直線 l_2 の方程式は

$$\square x + y - 6 = 0$$

となる. 三角形 ABC の面積は□であり, 外接円の方程式は

$$(x - \square)^2 + (y - \square)^2 = \square$$

となる. 放物線 $y = \square x^2 + \square$ は l_1, l_2 と接している.

2 円 $(x-p)^2 + (y-q)^2 = p^2 + q^2 + 1$ を $C(p, q)$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $C(p, q)$ と x 軸との交点を A, A' とし, $C(p, q)$ と y 軸との交点を B, B' とする. AA', BB' を p, q を用いて表せ.
- (2) $AA' = 2BB'$ であるような $C(p, q)$ の中心 (p, q) の軌跡は双曲線であることを示せ. また双曲線の頂点の座標と漸近線の方程式を求めよ.
- (3) 点 $(3, 4)$ が $C(p, q)$ の周上または内部にあるとき, p, q が満たす条件を求めよ. またその条件が表す領域を pq 平面上に図示せよ.
- (4) p, q が (3) の条件を満たすとき, $C(p, q)$ の半径の最小値を求めよ. また最小値をとるときの p と q の値を求めよ.

3 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+4)}$ の和を求めよ.

(2) 定積分 $\int_0^1 x \log(x^2 + 1) dx$ の値を求めよ.

(3) 関数 $(6x - 7)e^{2x^3}$ の微分係数が 0 となる x の値を求めよ.

(4) 曲線 $y = \log(x^2 + 2x + 2)$ の変曲点における接線の方程式を求めよ.

4 $f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$ とする. ただし, $\alpha > \beta$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ が極大値をとる x を α, β を用いて表せ.
- (2) $f(x)$ の極大値が 4 となるとき, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1 l_1 は点 A を通るから, l_1 の方程式は $x + \boxed{-2}y + 3 = 0$

点 B は l_1 上の点であるから $B(3, \boxed{3})$

l_2 は l_1 に垂直であるから, l_2 の方程式は $\boxed{2}x + y - 6 = 0$

点 C は l_2 上の点であるから $C(3, \boxed{0})$

$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 3 - 2) = (2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3 - 1, 0 - 2) = (2, -2)$ であるから

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|2 \cdot (-2) - 1 \cdot 2| = 3$$

求める外接円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする.

点 A を通るから $1^2 + 2^2 + l \cdot 1 + m \cdot 2 + n = 0$

点 B を通るから $3^2 + 3^2 + l \cdot 3 + m \cdot 3 + n = 0$

点 C を通るから $3^2 + 0^2 + l \cdot 3 + m \cdot 0 + n = 0$

整理すると

$$l + 2m + n + 5 = 0$$

$$3l + 3m + n + 18 = 0$$

$$3l + n + 9 = 0$$

これを解くと $l = -5, m = -3, n = 6$

すなわち $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$

よって, 求める円の方程式は $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

l_1, l_2 に接する放物線の方程式を $y = ax^2 + q$ とおくと, 2つの2次方程式

$$ax^2 + q = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \quad ax^2 + q = -2x + 6$$

はともに重解をもつので

$$2ax^2 - x + 2q - 3 = 0, \quad ax^2 + 2x + q - 6 = 0$$

の係数について

$$(-1)^2 - 4 \cdot 2a(2q - 3) = 0, \quad 1^2 - a(q - 6) = 0$$

整理して $16aq - 24a = 1, \quad aq - 6a = 1$

これを解いて $a = -\frac{5}{24}, q = \frac{6}{5}$

したがって, 求める放物線の方程式は $y = -\frac{5}{24}x^2 + \frac{6}{5}$

2 (1) A, A' においては $y = 0$ であるから

$$(x - p)^2 + (0 - q)^2 = p^2 + q^2 + 1$$

$$(x - p)^2 = p^2 + 1$$

$$x = p \pm \sqrt{p^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } AA' &= (p + \sqrt{p^2 + 1}) - (p - \sqrt{p^2 + 1}) \\ &= 2\sqrt{p^2 + 1} \end{aligned}$$

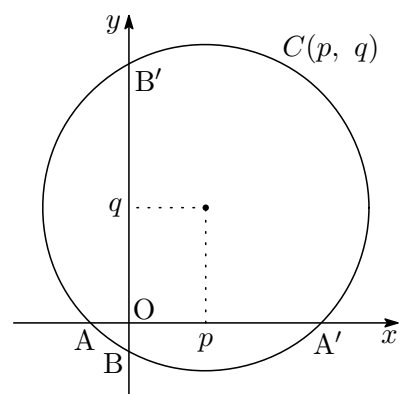
同様に, B, B' においては $x = 0$ であるから

$$(0 - p)^2 + (y - q)^2 = p^2 + q^2 + 1$$

$$(y - q)^2 = q^2 + 1$$

$$y = q \pm \sqrt{q^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } BB' &= (q + \sqrt{q^2 + 1}) - (q - \sqrt{q^2 + 1}) \\ &= 2\sqrt{q^2 + 1} \end{aligned}$$



(2) $AA' = 2BB'$ に (1) の結果を代入して $\sqrt{p^2 + 1} = 2\sqrt{q^2 + 1}$

両辺を平方して整理すると $p^2 - 4q^2 = 3$

よって, 中心 (p, q) の軌跡は, 頂点が $(\pm\sqrt{3}, 0)$, 漸近線が $x \pm 2y = 0$ の双曲線

(3) $C(p, q)$ の周または内部を表す不等式は

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 \leq p^2 + q^2 + 1$$

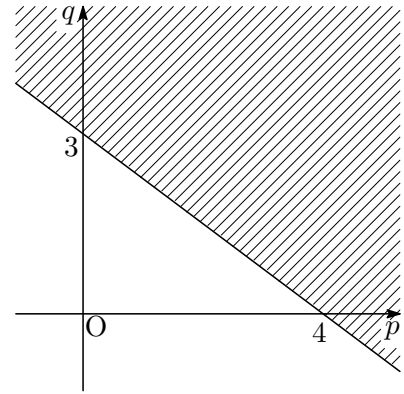
点 $(3, 4)$ はこの不等式の表す領域内の点であるから

$$(3 - p)^2 + (4 - q)^2 \leq p^2 + q^2 + 1$$

$$\text{すなわち } q \geq -\frac{3}{4}p + 3$$

求める領域は、右の図の斜線部分。

ただし境界線を含む。



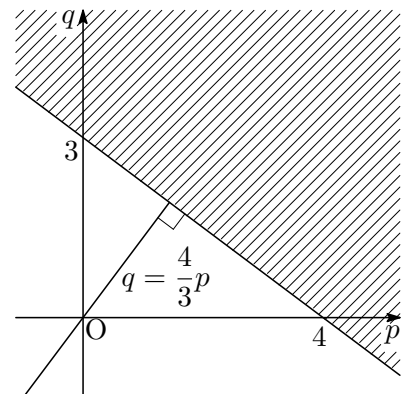
(4) $C(p, q)$ の半径は $\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$ であるからこの半径が最小となるのは、 $p^2 + q^2$ が最小となるときである。

すなわち、原点から領域内の点 (p, q) までの距離が最小となるときであるから、

2直線 $q = -\frac{3}{4}p + 3$, $q = \frac{4}{3}p$ の交点を求めて

$$(p, q) = \left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25} \right) \text{ で}$$

$$\text{最小値 } \sqrt{\left(\frac{36}{25}\right)^2 + \left(\frac{48}{25}\right)^2 + 1} = \frac{13}{5}$$



$$\begin{aligned}
\boxed{3} \quad (1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+4)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)(k+4)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+4)} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} \right) = \frac{11}{96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \int_0^1 x \log(x^2 + 1) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)' \log(x^2 + 1) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[(x^2 + 1) \log(x^2 + 1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1) \times \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\
&= \log 2 - \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_0^1 \\
&= \log 2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(3) $f(x) = (6x - 7)e^{2x^3}$ とおくと

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6e^{2x^3} + (6x - 7)e^{2x^3} \cdot 6x^2 \\
&= 6e^{2x^3} \{1 + (6x - 7)x^2\} \\
&= 6e^{2x^3} (6x^3 - 7x^2 + 1) \\
&= 6e^{2x^3} (x - 1)(2x - 1)(3x + 1)
\end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ を満たす x の値は $x = 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

(4) $y = \log(x^2 + 2x + 2)$ より

$$y' = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{(2x + 2)'(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)(x^2 + 2x + 2)'}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\
&= \frac{2(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2x(x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)}
\end{aligned}$$

$y'' = 0$ となる x の値は $x = 0, -2$ であるから, 変曲点は $(0, \log 2), (-2, \log 2)$

また, $x = 0$ のとき $y' = 1$, $x = -2$ のとき $y' = -1$

したがって, 変曲点における接線の方程式は

$$y - \log 2 = 1(x - 0), \quad y - \log 2 = -1\{x - (-2)\}$$

すなわち $y = x + \log 2$, $y = -x - 2 + \log 2$

4 (1) $f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - \alpha)(x - \beta) + (x - \alpha)^2 \\ &= (x - \alpha)(3x - \alpha - 2\beta) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は $x = \alpha, \frac{\alpha + 2\beta}{3}$

$\frac{\alpha + 2\beta}{3} < \frac{\alpha + 2\alpha}{3} = \alpha$ であるから,

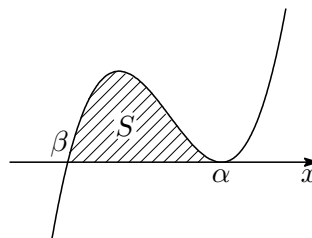
$f(x)$ の増減表は, 右のようになる.

したがって, $x = \frac{\alpha + 2\beta}{3}$ で極大.

x	...	$\frac{\alpha+2\beta}{3}$...	α	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

(2) $f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) = 4$ であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha+2\beta}{3} - \alpha\right)^2 \left(\frac{\alpha+2\beta}{3} - \beta\right) &= 4 \\ \left(\frac{2\beta-2\alpha}{3}\right)^2 \left(\frac{\alpha-\beta}{3}\right) &= 4 \\ \frac{4}{27}(\alpha-\beta)^3 &= 4 \end{aligned}$$



したがって $\alpha - \beta = 3$

求める面積を S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\beta}^{\alpha} (x - \alpha)^2(x - \beta) dx \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} (x - \alpha)^2 \{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} \{(x - \alpha)^3 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)^2\} dx \\ &= \left[\frac{(x - \alpha)^4}{4} - \frac{(\beta - \alpha)(x - \alpha)^3}{3} \right]_{\beta}^{\alpha} \\ &= -\frac{(\beta - \alpha)^4}{4} + \frac{(\beta - \alpha)^4}{3} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^4}{12} = \frac{3^4}{12} = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

1.2 熊本県立大学

1.2.1 二次前期 (環境共生学部居住環境学専攻)

問題 I $0^\circ < \theta < 90^\circ$ である。

$$2 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta - 3 = 0$$

を満たす θ を求めよ。

問題 II 碁石が 6 個ある。6 個のうち、3 個は白石で残りの 3 個は黒石である。この 6 個の石を一行に並べる。以下の問いに答えよ。

問 1 並べ方は全体で何通りあるか。

問 2 黒石が 3 個続いて並ぶことがないような並べ方は、全体で何通りあるか。

問 3 黒石が 3 個続いて並ぶことも、白石が 3 個続いて並ぶこともないような並べ方は、全体で何通りあるか。

問題 III 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

問 1 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき、 $P^{-1}AP$ を求めよ。

問 2 A^n を求めよ。

問題 IV r を正の定数とし、 $f(x) = rxe^{-rx}$ とする。ここで、 e は自然対数の底である。

問 1 n を正の整数とするととき、 $S_n = \int_0^n f(x) dx$ を求めよ。

問 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-rn} = 0$ を利用してよい。

解答例

問題 I $2\sin^2\theta + 5\sin\theta - 3 = 0$

因数分解して $(\sin\theta + 3)(2\sin\theta - 1) = 0$

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$ であるから $2\sin\theta - 1 = 0$

$0 < \theta < 90^\circ$ の範囲で $\sin\theta = \frac{1}{2}$ を解くと $\theta = 30^\circ$

問題 II 問 1 $\frac{6!}{3!3!} = 20$ (通り)

問 2 黒石 3 個が続いて並ぶとき, 黒石 3 個をひとまとめにする.
黒石ひとまとめと白石 3 個の並べ方は

$$\frac{4!}{1!3!} = 4 \quad (\text{通り})$$

したがって, 黒石 3 個が続いて並ばない方法は

$$20 - 4 = 16 \quad (\text{通り})$$

問 3 黒石 3 個が続く並べ方は 4 通り

白石 3 個が続く並べ方は 4 通り

黒石 3 個と白石 3 個がともに続く並べ方は 2 通り

黒石 3 個または白石 3 個が続いて並ぶのは $4 + 4 - 2 = 6$ (通り)

よって, 黒石 3 個と白石 3 個がともに続いて並ぶことがない並べ方は

$$20 - 6 = 14 \quad (\text{通り})$$

問題 III 問 1 $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ であるから

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問 2 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を n 乗すると $P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

したがって

$$A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

問題 IV 問 1

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^n f(x) dx = \int_0^n rxe^{-rx} dx \\ &= \int_0^n x(-e^{-rx})' dx \\ &= \left[x(-e^{-rx}) \right]_0^n - \int_0^n (x)'(-e^{-rx}) dx \\ &= -ne^{-rn} + \int_0^n e^{-rx} dx \\ &= -ne^{-rn} + \left[-\frac{e^{-rx}}{r} \right]_0^n \\ &= -ne^{-rn} - \frac{e^{-rn}}{r} + \frac{1}{r} \end{aligned}$$

問 2 r は正の定数であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-rn} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-rn} = 0$$

問 1 の結果から $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{r}$

1.3 崇城大学

1.3.1 推薦試験1日目(普通高校)60分

1 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = -x^2 + 2x + 1$ と同じ頂点を持ち、点 $(3, 6)$ を通るグラフをもつ2次関数を求めよ。

(2) $x + y = 10$, $\log_3 x + \log_3 y = 1$ のとき, $x^2 + y^2$ の値を求めよ。

(3) $\triangle ABC$ において, $AB = 2$, $\angle B = 60^\circ$ であり, 外接円の半径が3であるとき, CA , BC の長さを求めよ。

2 連立不等式 $y \geq x(x - 2)$, $y \leq x$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 (x, y) が領域 D 内を動くとき, $y - \frac{1}{4}x^2$ のとる値の最大値と最小値を求めよ。

3 a を正の定数とし, $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + a$ とおく。次の各問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が $-1 < x < 3$ において, 異なる3つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

解答例

1 (1) $y = -x^2 + 2x + 1$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 2x) + 1 \\ &= -\{(x - 1)^2 - 1^2\} + 1 \\ &= -(x - 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

したがって、放物線 $y = -x^2 + 2x + 1$ の頂点は $(1, 2)$ である。
よって、放物線の頂点が点 $(1, 2)$ であるから、求める 2 次関数は

$$y = a(x - 1)^2 + 2$$

の形に表される、このグラフが点 $(3, 6)$ を通るから

$$6 = a(3 - 1)^2 + 2$$

よって $6 = 4a + 2$

これを解くと $a = 1$

したがって $y = 1(x - 1)^2 + 2$

すなわち $y = x^2 - 2x + 3$

(2) $\log_3 x + \log_3 y = 1$ から $\log_3 xy = 1$

したがって $xy = 3$

$$\begin{aligned} \text{よって } x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= 10^2 - 2 \cdot 3 = 94 \end{aligned}$$

(3) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする．正弦定理 $\frac{CA}{\sin B} = 2R$ により

$$\begin{aligned} CA &= 2R \sin B \\ &= 2 \cdot 3 \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$BC = a$ とする．余弦定理 $CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos B$ により

$$\begin{aligned} (3\sqrt{3})^2 &= 2^2 + a^2 - 2 \cdot 2 \cdot a \cos 60^\circ \\ 27 &= 4 + a^2 - 4a \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって $a^2 - 2a - 23 = 0$

これを解いて $a = 1 \pm 2\sqrt{6}$

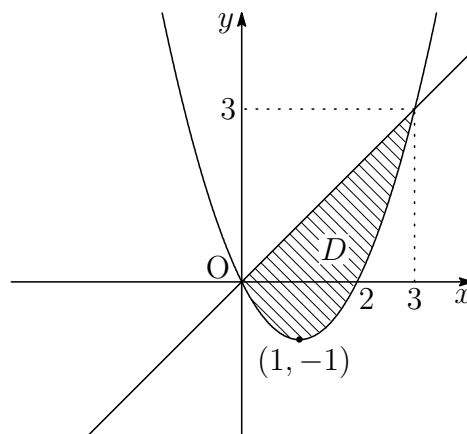
$a > 0$ であるから $BC = 1 + 2\sqrt{6}$

2 (1) 領域 D は

放物線 $y = x(x - 2)$ の上側と

直線 $y = x$ の下側

の共通部分である．すなわち，
右の図の斜線部分である．ただし，
境界線を含む．



$$(2) \quad y - \frac{1}{4}x^2 = k \quad \dots \textcircled{1}$$

とおく．放物線 ① と直線 $y = x$ の
共有点の x 座標は

$$x - \frac{1}{4}x^2 = k$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{4}x^2 - x + k = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから，係数について

$$(-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times k \geq 0$$

$$\text{これを解いて } k \leq 1$$

$k = 1$ のとき ② より $x = 2$ であり，接点 $(2, 2)$ は D に含まれる．

放物線 ① と放物線 $y = x(x - 2)$ の共有点の x 座標は

$$x(x - 2) - \frac{1}{4}x^2 = k$$

$$\text{すなわち } \frac{3}{4}x^2 - 2x - k = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから，係数について

$$(-2)^2 - 4 \times \frac{3}{4} \times (-k) \geq 0$$

$$\text{これを解いて } k \geq -\frac{4}{3}$$

$k = -\frac{4}{3}$ のとき ③ より $x = \frac{4}{3}$ であり，接点 $(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9})$ は D に含まれる．

放物線 ① が領域 D の点を通るときの k の値は

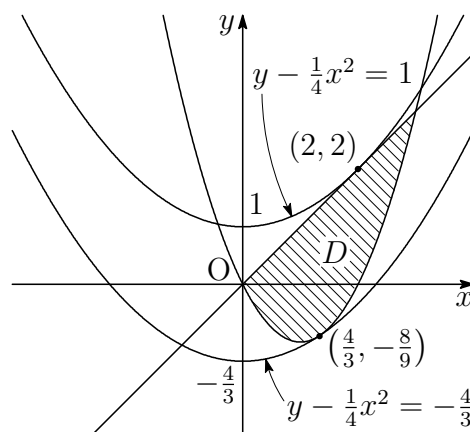
$$(2, 2) \text{ を通るとき } k = 1, \quad \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9}\right) \text{ を通るとき } k = -\frac{4}{3}$$

$$\text{これ以外で領域 } D \text{ の点を通るとき } -\frac{4}{3} < k < 1$$

したがって， $y - \frac{1}{4}x^2$ は

$$x = 2, y = 2 \quad \text{のとき} \quad \text{最大値 } 1 \quad \text{をとり,}$$

$$x = \frac{4}{3}, y = -\frac{8}{9} \quad \text{のとき} \quad \text{最小値 } -\frac{4}{3} \quad \text{をとる.}$$



3 (1) $y' = 6x^2 - 6ax$
 $= 6x(x - a)$

$y' = 0$ とすると

$x = 0, a$

x	...	0	...	a	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 a	↘	極小 $-a^3 + a$	↗

y の増減表は, 右のようになる.

$a > 0$ より, この関数は

$x = 0$ で極大値 a ,

$x = a$ で極小値 $-a^3 + a$

をとる.

(2) $a > 0$... ① より

$f(-1) = -2a - 2 < 0$

$f(0) = a > 0$

であるから, $-1 < x < 3$ において, 異なる3つの実数解をもつためには,

$a < 3$... ②, $f(a) < 0, f(3) > 0$

を満たせばよい.

$f(a) < 0$ より $-a^3 + a < 0$

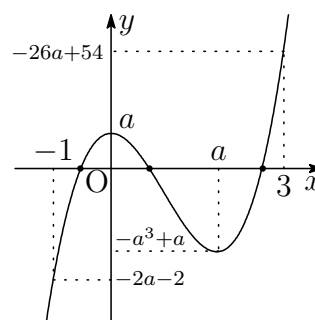
$a^3 - a > 0$

$a(a + 1)(a - 1) > 0$

$-1 < a < 0, 1 < a$... ③

$f(3) > 0$ より $-26a + 54 > 0$

$a < \frac{27}{13}$... ④



したがって, ①, ②, ③, ④ の共通する範囲を求めて

$1 < a < \frac{27}{13}$

1.3.2 推薦試験 2 日目 (普通高校)60 分

1 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3$ の頂点が直線 $y = x$ より上にあるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ のとき, $x^2 - x - 1$ および x^4 の値を求めよ。

(3) 関数 $y = -(\log_3 x)^2 + k \log_3 x^2 - 6$ は $x = \frac{1}{27}$ のとき最大値をとる。 k の値およびその最大値を求めよ。

2 原点を O とし, x 軸上に $A(8, 0)$, y 軸上に $B(0, 4)$ をとる。点 $P(4, -4)$ を通る直線 ℓ が線分 OA , AB と交わる点をそれぞれ Q , R とする。ただし, Q , R は O , A , B とは一致しないものとする。4点 O , Q , R , B が同一円周上にあるとき, 次の各問に答えよ。

(1) $\angle PRB$ の大きさと直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 4点 O , Q , R , B を通る円の方程式を求めよ。

3 放物線 $y = 2x^2$ について, 次の各問に答えよ。

(1) この放物線の点 $(2, 8)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接線を y 軸方向に 2 だけ平行移動した直線とこの放物線とで囲まれる図形の面積を求めよ。

解答例

1 (1) $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 4ax) + 5a^2 - 3 \\ &= \{(x - 2a)^2 - (2a)^2\} + 5a^2 - 3 \\ &= (x - 2a)^2 + a^2 - 3 \end{aligned}$$

したがって、放物線 $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3$ の頂点は $(2a, a^2 - 3)$

この放物線の頂点が直線 $y = x$ より上にあるので

頂点 $(2a, a^2 - 3)$ は不等式 $y > x$ を満たす.

したがって $a^2 - 3 > 2a$

整理して $a^2 - 2a - 3 > 0$

すなわち $(a + 1)(a - 3) > 0$

これを解いて $a < -1, 3 < a$

(2) $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ … ① であるから

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

したがって、 $x^2 - x - 1 = 0$ … ②

右の割り算から

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 1 \overline{) x^4} \\ \underline{x^4 - x^3 - x^2} \\ x^3 + x^2 \\ \underline{x^3 - x^2 - x} \\ 2x^2 + x \\ \underline{2x^2 - 2x - 2} \\ 3x + 2 \end{array}$$

$$x^4 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 2) + 3x + 2$$

② から $= 0 \times (x^2 + x) + 3x + 2$
 $= 3x + 2$

① から $= 3 \times \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$

(3) $t = \log_3 x \cdots \textcircled{1}$ とおくと, $y = -(\log_3 x)^2 + k \log_3 x^2 - 6$ は

$$\begin{aligned} y &= -(\log_3 x)^2 + 2k \log_3 x - 6 \\ &= -t^2 + 2kt - 6 \\ &= -(t^2 - 2kt) - 6 \\ &= -\{(t - k)^2 - k^2\} - 6 \\ &= -(t - k)^2 + k^2 - 6 \end{aligned}$$

したがって, $t = k$ で, 最大値 $k^2 - 6$ をとる.

$\textcircled{1}$ より $x = \frac{1}{27}$ のとき, すなわち $t = -3$ で最大値をとるので

よって $k = -3$, 最大値は $k^2 - 6 = (-3)^2 - 6 = 3$

- 2** (1) $\angle BOQ = 90^\circ$ であるから, $O, Q, R,$
 B を通る円は BQ を直径とする円であ
 るから $\angle PRB = 90^\circ$

直線 AB の傾きは

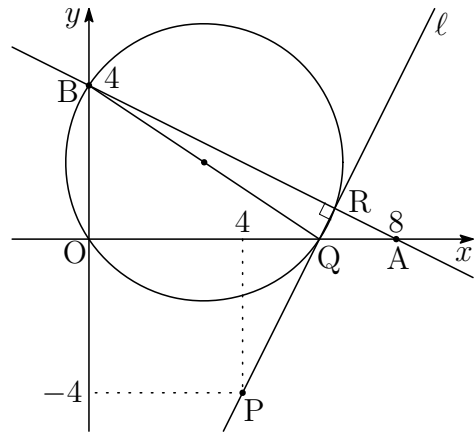
$$\frac{4 - 0}{0 - 8} = -\frac{1}{2}$$

直線 ℓ は直線 AB に垂直であるから,
 直線 ℓ の傾きを m とすると

$$-\frac{1}{2}m = -1 \text{ より } m = 2$$

したがって, 直線 ℓ は, 点 $P(4, -4)$ を通り, 傾き 2 の直線であるから

$$y - (-4) = 2(x - 4) \text{ すなわち } y = 2x - 12$$



- (2) 点 Q は, 直線 ℓ と線分 OA の交点であるから,

$$y = 2x - 12 \text{ に } y = 0 \text{ を代入して } x = 6$$

したがって点 Q の座標は $(6, 0)$

よって, 求める円の方程式は線分 BQ を直径の両端とする円であり, その
 中心を C , 半径を r とすると, C は線分 BQ の中点であるから

$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}\right) \text{ すなわち } (3, 2)$$

$$\text{また } r = BC = \sqrt{(3-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{13}$$

求める円の方程式は

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{13})^2$$

$$\text{すなわち } (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

3 (1) $f(x) = 2x^2$ とすると, 点 $(2, 8)$ における接線の傾きは $f'(2)$ である.

$$f(x) \text{ を微分すると } f'(x) = 4x$$

$$f'(2) = 4 \times 2 = 8$$

ゆえに, 求める接線は点 $(2, 8)$ を通り, 傾き 8 の直線であるから

$$y - 8 = 8(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 8x - 8$$

(2) (1) の接線を y 軸方向に 2 だけ平行移動した直線の方程式は

$$y = 8x - 8 + 2 \quad \text{すなわち} \quad y = 8x - 6$$

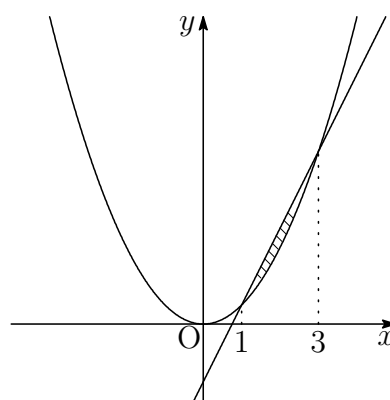
放物線と直線の交点の x 座標は, 方程式

$$2x^2 = 8x - 6$$

を解いて $x = 1, 3$

右の図から, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(8x - 6) - 2x^2\} dx \\ &= -2 \int_1^3 (x - 1)(x - 3) dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) (3 - 1)^3 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



1.3.3 推薦試験 1 日目 (専門高校)60 分

1 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = -x^2 - 6ax + 4$ の最大値が 5 以下となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2}$ と $y = 2x^2 + ax + b$ の頂点が一致するような定数 a, b の値を求めよ。

(3) x の整式 $(x + a)(x^2 + b)(x^3 + c)(x^4 + x^2 + d)$ を展開したとき, x^4 の係数を求めよ。

2 $\triangle ABC$ において, $BC = a, AB = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}a, \angle B = 30^\circ$ のとき, 次の各問に答えよ。

(1) CA を a で表せ。

(2) $\angle A$ の大きさを求めよ。

3 2 次方程式 $x^2 - (a + 2)x + a^2 - 3a + 4 = 0$ の解を α, β とするとき, $1 < \alpha < 2 < \beta$ を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答例

1 (1) 2次関数 $y = -x^2 - 6ax + 4$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 + 6ax) + 4 \\ &= -\{(x + 3a)^2 - (3a)^2\} + 4 \\ &= -(x + 3a)^2 + 9a^2 + 4 \end{aligned}$$

よって、2次関数 $y = -x^2 - 6ax + 4$ は $x = -3a$ で最大値 $9a^2 + 4$ をとる。
この2次関数の最大値は5以下であるから

$$9a^2 + 4 \leq 5$$

整理して $9a^2 - 1 \leq 0$

$$(3a + 1)(3a - 1) \leq 0$$

したがって $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{3}$

(2) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2} \cdots \textcircled{1}$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x^2 - 6x) + \frac{11}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{(x - 3)^2 - 3^2\} + \frac{11}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

したがって、放物線 $\textcircled{1}$ の頂点の座標は $(3, 1)$

放物線 $y = 2x^2 + ax + b \cdots \textcircled{2}$ の頂点の座標の座標は $(3, 1)$ であるから、
 $\textcircled{2}$ の右辺は、 x^2 の係数に注意して次のようにかける。

$$2x^2 + ax + b = 2(x - 3)^2 + 1$$

整理すると $= 2x^2 - 12x + 19$

上式の係数を比較して、 $a = -12$ 、 $b = 19$

$$\begin{aligned} (3) \quad (x + a)(x^2 + b) &= x^3 + ax^2 + bx + ab \\ (x^3 + c)(x^4 + x^2 + d) &= x^7 + x^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + cd \end{aligned}$$

であるから

$(x + a)(x^2 + b) \times (x^3 + c)(x^4 + x^2 + d)$ の x^4 の項は

$$ax^2 \times cx^2, bx \times dx^3, ab \times cx^4$$

したがって、 x^4 の係数は $ac + bd + abc$

2 (1) 余弦定理 $CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \cdot BC \cos B$ により

$$\begin{aligned} CA^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}a \right)^2 + a^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}a \times a \cos 30^\circ \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4}a^2 + a^2 - (\sqrt{3}+1)a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2}a^2 + a^2 - \frac{3+\sqrt{3}}{2}a^2 \\ &= \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

$$CA > 0 \text{ であるから } CA = \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot CA \cdot AB} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}a \right)^2 - a^2}{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}a \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}a} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{2+\sqrt{3}}{2}a^2 - a^2}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2 \div \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ から } A = 45^\circ$$

【別解(2)】 $b = CA$, $c = AB$ とおくと 正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$a \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}a \sin A \quad \text{すなわち} \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを満たす A の値は $A = 45^\circ, 135^\circ$

ここで, $b < a < c$ より $B < A < C$ であるから $A = 135^\circ$ は不適.

よって $A = 45^\circ$

- 3 $f(x) = x^2 - (a+2)x + a^2 - 3a + 4$ とおくと、
 x^2 の係数が正であるから $f(x) = 0$ の解 α, β
が $1 < \alpha < 2 < \beta$ を満たすとき

$$f(1) > 0 \quad \text{かつ} \quad f(2) < 0$$

であればよいから

$$1^2 - (a+2) \cdot 1 + a^2 - 3a + 4 > 0$$

$$2^2 - (a+2) \cdot 2 + a^2 - 3a + 4 < 0$$

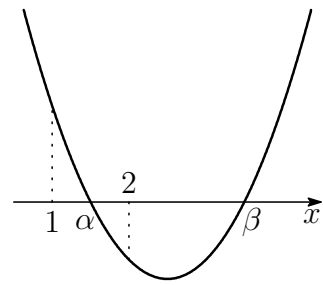
したがって、次の連立不等式を解けばよい。

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 3 > 0 \\ a^2 - 5a + 4 < 0 \end{cases}$$

第1式から $a < 1, 3 < a \dots \textcircled{1}$

第2式から $1 < a < 4 \dots \textcircled{2}$

よって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $3 < a < 4$



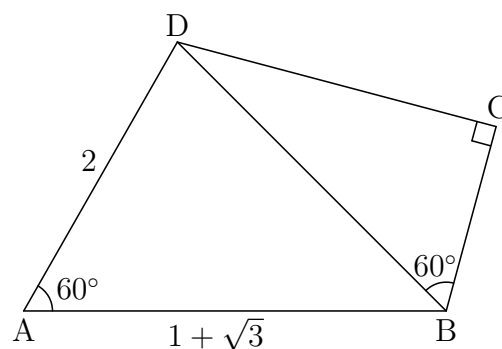
1.3.4 推薦試験 2 日目 (専門高校)60 分

1 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = ax^2 + x - 3$ の最大値が 2 であるような定数 a の値を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y = 2x^2 - 12x + 17$ と $y = ax^2 + bx - 10$ の頂点が一致するような定数 a, b の値を求めよ。

(3) 右図において, 辺 CD の長さを求めよ。



2 $\triangle ABC$ において, BC の中点を D とする。 $AB = \sqrt{3}$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$ であるとき, 次の各問に答えよ。

(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(2) CA の長さを求めよ。

3 関数 $y = -x^2 + 4x$ ($a \leq x \leq a + 4$) の最大値と最小値を求めよ。ただし, 定数 a は $|a| \leq 2$ とする。

解答例

- 1 (1) 2次関数 $y = ax^2 + x - 3$ において, $y = 2$ となる x の値は $ax^2 + x - 3 = 2$ から, 2次方程式

$$ax^2 + x - 5 = 0$$

の解である. この方程式は重解をもつので, 係数について

$$1^2 - 4a \cdot (-5) = 0$$

整理すると $1 + 20a = 0$

$a < 0$ に注意して $a = -\frac{1}{20}$

- (2) $y = 2x^2 - 12x + 17 \cdots \textcircled{1}$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 6x) + 17 \\ &= 2\{(x - 3)^2 - 3^2\} + 17 \\ &= 2(x - 3)^2 - 1 \end{aligned}$$

したがって, 放物線 $\textcircled{1}$ の頂点の座標は $(3, -1)$

放物線 $y = ax^2 + bx - 10 \cdots \textcircled{2}$ の頂点の座標の座標は $(3, -1)$ であるから, $\textcircled{2}$ の右辺は, x^2 の係数に注意して次のようにかける.

$$ax^2 + bx - 10 = a(x - 3)^2 - 1$$

整理すると $= ax^2 - 6ax + 9a - 1$

上式の係数を比較して $b = -6a, -10 = 9a - 1$

これを解いて $a = -1, b = 6$

- (3) $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos A \\ &= (1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 - 2(1 + \sqrt{3}) \cdot 2 \cos 60^\circ \\ &= (4 + 2\sqrt{3}) + 4 - 4(1 + \sqrt{3}) \times \frac{1}{2} \\ &= 8 + 2\sqrt{3} - 2(1 + \sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

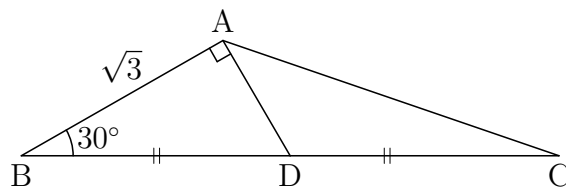
$BD > 0$ であるから $BD = \sqrt{6}$

したがって $CD = BD \sin 60^\circ = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2 (1) 右の図より

$BD = 2$ であるから $BC = 4$
 よって, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin B \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \sin 30^\circ \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$



(2) $AD = 1$, $DC = 2$, $\angle ADB = 120^\circ$ であるから, 余弦定理により

$$\begin{aligned} CA^2 &= AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cos \angle ADC \\ &= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 120^\circ \\ &= 1 + 4 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7 \end{aligned}$$

$CA > 0$ であるから $CA = \sqrt{7}$

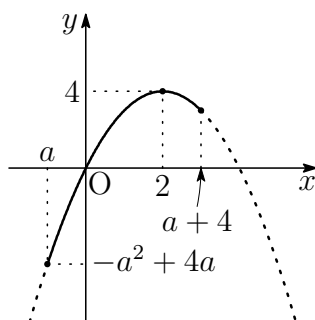
3 $|a| \leq 2$ から $-2 \leq a \leq 2$

$y = -x^2 + 4x$ を変形すると $y = -(x - 2)^2 + 4$

$-2 \leq a < 0$ のとき

$x = 2$ で最大値 4

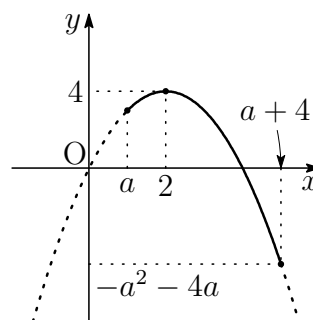
$x = a$ で最小値 $-a^2 + 4a$



$0 \leq a \leq 2$ のとき

$x = 2$ で最大値 4

$x = a + 4$ で最小値 $-a^2 - 4a$



[補足] $-2 \leq a \leq 0$ と $0 < a \leq 2$ の場合に分けてもよい.

1.3.5 前期日程1日目

注意事項

1. この試験問題は、「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は、1~5まで出題されていますが、志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. 印の欄に受験票を確認の上、志望学科名を記入してください。
4. 下表を十分確認の上、志望学部・学科に 印のある問題番号のみ解答してください。
5. 印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。

志望学科		学科				
志望学部	志望学科	問題番号				
		1	2	3	4	5
工学部	機械工学科					
	応用化学科					
	環境建設工学科					
	建築学科					
	宇宙航空システム工学科					
情報学部	全学科					
生物生命学部	全学科					

6. この試験問題は、監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。

1 次の各問に答えよ。

- (1) 放物線 $y = 3x^2$ を平行移動して得られる放物線 $y = f(x)$ が2点 $(0, 2)$, $(1, 4)$ を通るとき, $f(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $y = \cos 2x - 2 \cos x + 2$ ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$) の最大値および最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。
- (3) k を定数とする。 x についての方程式 $\log_2 |x^2 - 2x - 7| = k$ の実数解の個数を求めよ。

2 関数 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ のグラフと直線 $y = x + 2$ の3交点を左から順に A , B , C とする。点 P が $f(x)$ のグラフ上を A から B まで動くとき, 次の各問に答えよ。

- (1) 点 P の x 座標を t とするとき, 点 P から直線 $y = x + 2$ までの距離を t で表せ。
- (2) $\triangle BPC$ の面積の最大値を求めよ。

3 平面上にベクトル \vec{a}, \vec{b} があり, $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$ であるとき, 次の各問に答えよ。

- (1) $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ を求めよ。
- (2) \vec{c} が \vec{a} に垂直で, $\vec{c} - \vec{a}$ が \vec{b} に平行であるとき, \vec{c} を \vec{a}, \vec{b} で表せ。

4 初項が2, 公差が1の等差数列 $\{a_n\}$ がある。 $b_n = 2^{a_n}, c_n = a_n b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと, 次の各問に答えよ。

- (1) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。
- (2) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

5 2次関数 $y = f(x)$ のグラフが原点 O , 点 $P(1, -1)$, 点 $Q(3, 9)$ を通るとき, 線分 OP, OQ およびこのグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。

解答例

- 1 (1) 放物線 $y = 3x^2$ を平行移動して得られる放物線は $y = 3x^2 + bx + c$ の形で表される. 2点 $(0, 2)$, $(1, 4)$ を通るので

$$2 = 3 \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$4 = 3 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

よって $c = 2, b + c = 1$

これを解くと $b = -1, c = 2$

したがって $f(x) = 3x^2 - x + 2$

- (2) $\cos 2x - 2 \cos x + 2 = (2 \cos^2 x - 1) - 2 \cos x + 2$
 $= 2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1$

$\cos x = t$ とおくと, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき

$-1 \leq t \leq 1$ であり

$$y = 2t^2 - 2t + 1$$

すなわち

$$y = 2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

よって $t = -1$ で最大値 5 をとり,

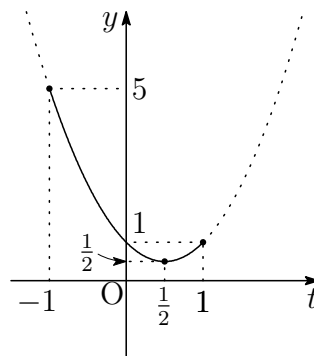
$t = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる.

$t = \frac{1}{2}$ のとき $\cos x = \frac{1}{2}$ より $x = 60^\circ$

$t = -1$ のとき $\cos x = -1$ より $x = 180^\circ$

したがって $x = 180^\circ$ で最大値 5 をとり,

$x = 60^\circ$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる.

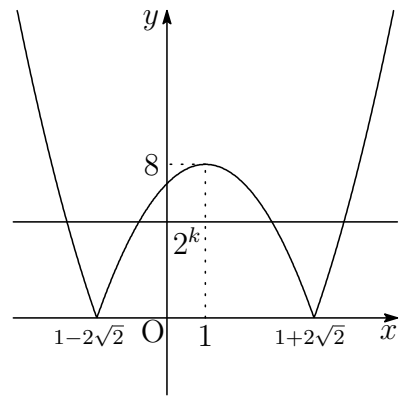


(3) $\log_2 |x^2 - 2x - 7| = k$ から $|x^2 - 2x - 7| = 2^k$ 求める実数解の個数は, $y = |x^2 - 2x - 7|$ のグラフと直線 $y = 2^k$ の共有点の個数に等しい. よって

- $0 < 2^k < 8$ のとき 4個
- $2^k = 8$ のとき 3個
- $2^k > 8$ のとき 2個

したがって

- $k < 3$ のとき 4個
- $k = 3$ のとき 3個
- $k > 3$ のとき 2個



【補足】

$x \leq 1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2} \leq x$ のとき $x^2 - 2x - 7 \geq 0$
 $1 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 1 + 2\sqrt{2}$ のとき $x^2 - 2x - 7 \leq 0$

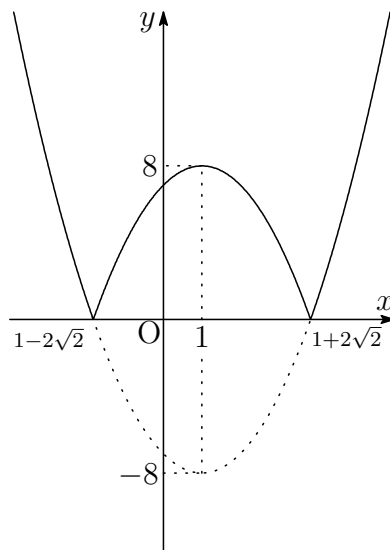
したがって

$x \leq 1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2} \leq x$ のとき $|x^2 - 2x - 7| = x^2 - 2x - 7$
 $1 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 1 + 2\sqrt{2}$ のとき $|x^2 - 2x - 7| = -(x^2 - 2x - 7)$

よって, $y = x^2 - 2x - 7 \dots \textcircled{1}$ に対して, $y = |x^2 - 2x - 7|$ のグラフは,

$x \leq 1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2} \leq x$ のとき $\textcircled{1}$ のグラフに一致し,
 $1 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 1 + 2\sqrt{2}$ のとき $\textcircled{1}$ のグラフと x 軸に関して対称

以上のことから, $y = |x^2 - 2x - 7|$ のグラフは, 図の実線部分である.



- 2 (1) $y = x^3 - 3x + 2$ のグラフと直線 $y = x + 2$ の共有点の座標は、
連立方程式

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

を解いて、

$$(x, y) = (-2, 0), (0, 2), (2, 4)$$

よって

$$A(-2, 0), B(0, 2), C(2, 4)$$

このとき点 P の x 座標 t は

$$-2 \leq t \leq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

点 $P(t, t^3 - 3t + 2)$ から直線 $-x + y - 2 = 0$ までの距離 PQ は、

① に注意して

$$PQ = \frac{|-t + (t^3 - 3t + 2) - 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|t^3 - 4t|}{\sqrt{2}} = \frac{t^3 - 4t}{\sqrt{2}}$$

したがって $PQ = \frac{t^3 - 4t}{\sqrt{2}} \quad (-2 \leq t \leq 0)$

【補足】 $t^3 - 4t = t(t+2)(t-2)$ であるから、 $-2 \leq t \leq 0$ で $t^3 - 4t \geq 0$

したがって、 $-2 \leq t \leq 0$ のとき $|t^3 - 4t| = t^3 - 4t$

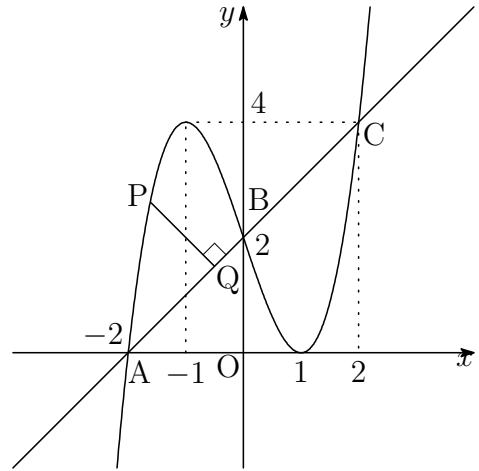
(2) $B(0, 2), C(2, 4)$ より $BC = \sqrt{(2-0)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \triangle BPC &= \frac{1}{2} \times BC \times PQ \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{t^3 - 4t}{\sqrt{2}} = t^3 - 4t \end{aligned}$$

$S(t) = t^3 - 4t \quad (-2 \leq t \leq 0)$ において、この関数の最大値を求めればよい。

$$\begin{aligned} S'(t) &= 3t^2 - 4 \\ &= 3\left(t^2 - \frac{4}{3}\right) \\ &= 3\left(t + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

よって、 $t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ で最大値 $\frac{16}{3\sqrt{3}}$



t	-2	...	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$...	0
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$	0	↗	極大 $\frac{16}{3\sqrt{3}}$	↘	0

$$\boxed{3} \quad (1) \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 10 \text{ より } |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 10$$

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2$ であるから

$$2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 10$$

よって $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

$$\begin{aligned} \text{したがって } |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 - 4 \times 1 + 4 \times 2^2 = 16 \end{aligned}$$

$|\vec{a} - 2\vec{b}| \geq 0$ であるから $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 4$

(2) $\vec{c} - \vec{a}$ は, \vec{b} に平行であるから, 実数 k を用いて

$$\begin{aligned} \vec{c} - \vec{a} &= k\vec{b} \\ \vec{c} &= \vec{a} + k\vec{b} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\vec{c} \perp \vec{a}$ より $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ であるから

$$(\vec{a} + k\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$|\vec{a}|^2 + k\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2^2 + k \times 1 = 0$$

したがって $k = -4$

$$\textcircled{1} \text{ より } \vec{c} = \vec{a} - 4\vec{b}$$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad a_n = 2 + (n-1) \times 1 = n+1 \quad \text{より} \quad b_n = 2^{n+1}$$

b_n は初項 4, 公比 2 の等比数列であるから,

この数列の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} = 4(2^n - 1)$$

$$(2) \quad c_n = a_n b_n = (n+1) \cdot 2^{n+1} \quad \text{の初項から第 } n \text{ 項までの和を } S_n \text{ とし,}$$

$S_n - 2S_n$ を計算すると

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ -) 2S_n &= \quad \quad 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+2} \\ \hline -S_n &= 2 \cdot 2^2 + (2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}) - (n+1) \cdot 2^{n+2} \end{aligned}$$

ここで, $2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}$ は, 初項 2^3 , 公比 2, 項数 $n-1$ の等比数列の和であるから

$$2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = \frac{2^3(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+2} - 8$$

$$\text{よって} \quad -S_n = 2 \cdot 2^2 + (2^{n+2} - 8) - (n+1) \cdot 2^{n+2}$$

$$\text{整理して} \quad -S_n = -n \cdot 2^{n+2}$$

$$\text{したがって} \quad S_n = n \cdot 2^{n+2}$$

等比数列の和

$$\text{初項 } a, \text{ 末項 } l, \text{ 公比 } r \text{ の等比数列の和は } \frac{rl - a}{r - 1}$$

[証明] 末項 l は, $l = ar^{n-1}$ であるから

$$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{r \cdot ar^{n-1} - a}{r - 1} = \frac{rl - a}{r - 1}$$

[証終]

たとえば, $2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}$ は, $a = 2^3$, $l = 2^{n+1}$, $r = 2$ から

$$\frac{rl - a}{r - 1} = \frac{2 \cdot 2^{n+1} - 2^3}{2 - 1} = 2^{n+2} - 8$$

5 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする .

グラフが 3 点 $O(0, 0)$, $P(1, -1)$, $Q(3, 9)$ を通るから

$$0 = c \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-1 = a + b + c \quad \dots \textcircled{2}$$

$$9 = 9a + 3b + c \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入して } a + b = -1 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入して } 3a + b = 3 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } a = 2, b = -3$$

$$\text{よって } f(x) = 2x^2 - 3x$$

直線 OP の傾きは $\frac{-1-0}{1-0} = -1$ より, 直線 OP の方程式は $y = -x$

直線 OQ の傾きは $\frac{9-0}{3-0} = 3$ より, 直線 OQ の方程式は $y = 3x$

$y = 2x^2 - 3x$ のグラフと直線 OP で囲まれた

図形の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{-x - (2x^2 - 3x)\} dx \\ &= -2 \int_0^1 x(x-1) dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) (1-0)^3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

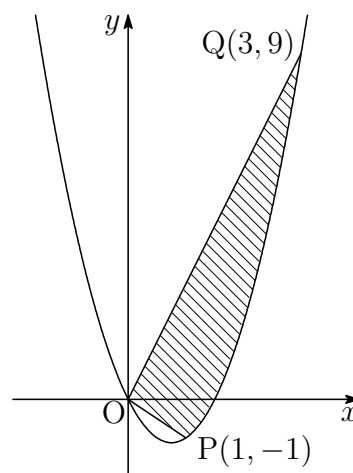
$y = 2x^2 - 3x$ のグラフと直線 OQ で囲まれた

図形の面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^3 \{3x - (2x^2 - 3x)\} dx \\ &= -2 \int_0^3 x(x-3) dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) (3-0)^3 = 9 \end{aligned}$$

よって, 求める面積は, 図の斜線部分であるから

$$S_2 - S_1 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$



1.3.6 前期日程2日目

注意事項

1. この試験問題は、「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は、～まで出題されていますが、志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. 印の欄に受験票を確認の上、志望学科名を記入してください。
4. 下表を十分確認の上、志望学部・学科に 印のある問題番号のみ解答してください。
5. 印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。

志望学科		学科				
志望学部	志望学科	問題番号				
		<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="5"/>
工学部	機械工学科					
	応用化学科					
	環境建設工学科					
	建築学科					
	宇宙航空システム工学科					
情報学部	全学科					
生物生命学部	全学科					

6. この試験問題は、監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。

1 次の各問に答えよ。

- (1) 2次関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$ ($0 \leq x \leq 1$) の最小値を求めよ。
- (2) 3直線 $y = kx + 2k + 1$, $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ によって三角形ができないのは定数 k がどのような値をとるときか。
- (3) 定数 m に対して, $3^m - 20 \cdot 3^{-m} + 1 = 0$ のとき, 3^m の値を求めよ。

2 関数 $f(x)$, $g(x)$ が条件 $f(x) = -x^2 + g(1)x + g(0)$, $f'(x) + g'(x) = 0$, $f'(1) = 4$ を満たしている。次の各問に答えよ。

- (1) $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$, $g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = k$, $a_{n+1} = ka_n - k + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義されている。次の各問に答えよ。

- (1) 一般項 a_n を求めよ。
- (2) k が $0 < k < 1$ の範囲を変化するとき, a_3 の取り得る値の範囲を求めよ。

4 $\triangle ABC$ は $AB = \sqrt{7}$, $CA = 2$, $\angle C = 60^\circ$ である。辺 BC を $2:1$ に内分する点を D とし, 3点 A, B, D を通る円と辺 CA との交点を E とする。次の各問に答えよ。

- (1) 辺 BC の長さを求めよ。
- (2) $\triangle ABE$ の面積を求めよ。

5 $\angle A = 90^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ である $\triangle ABC$ において, 辺 BC 上に点 D を $\angle BAD = 60^\circ$ となるようにとる。次の各問に答えよ。

- (1) $\triangle ABD$ の面積を求めよ。
- (2) $\angle ADB$ の大きさを θ とするとき, $\sin \theta$ の値を求めよ。

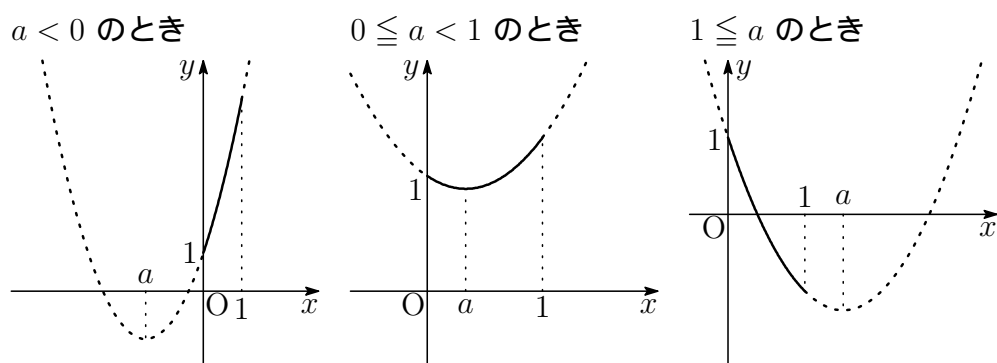
解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = x^2 - 2ax + 1 \\ = (x - a)^2 - a^2 + 1$$

したがって $a < 0$ のとき 最小値 $f(0) = 1$

$0 \leq a < 1$ のとき 最小値 $f(a) = -a^2 + 1$

$1 \leq a$ のとき 最小値 $f(1) = -2a + 2$



(2) 3直線

$$y = kx + 2k + 1 \cdots \textcircled{1}, \quad x + y - 4 = 0 \cdots \textcircled{2}, \quad 2x - y + 1 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

の傾きは、それぞれ $k, -1, 2$ であるから、3直線によって三角形ができないのは、次の3つの場合である。

- i) 直線①と直線②が平行であるときで、 $k = -1$
- ii) 直線①と直線③が平行であるときで、 $k = 2$
- iii) 3直線が1点で交わる時

直線②と直線③の交点の座標は、

$$\textcircled{2} \text{ と } \textcircled{3} \text{ の連立方程式を解いて } (1, 3)$$

このとき、点 $(1, 3)$ は直線①上にあるから

$$3 = k \cdot 1 + 2k + 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{2}{3}$$

したがって $k = -1, 2, \frac{2}{3}$

$$(3) \quad 3^{-m} = \frac{1}{3^m} \text{ より} \quad 3^m - \frac{20}{3^m} + 1 = 0$$

$$3^m = x \text{ とおくと} \quad x - \frac{20}{x} + 1 = 0$$

$$\text{両辺に } x \text{ をかけて} \quad x^2 + x - 20 = 0$$

$$(x + 5)(x - 4) = 0$$

$x > 0$ であるから

$$x = 4 \quad (\text{答}) \quad 3^m = 4$$

2 (1) $f(x) = -x^2 + g(1)x + g(0)$ を微分すると

$$f'(x) = -2x + g(1)$$

$$f'(1) = 4 \text{ より } -2 \cdot 1 + g(1) = 4$$

$$\text{すなわち } g(1) = 6$$

$$\text{よって } f(x) = -x^2 + 6x + g(0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f'(x) + g'(x) = 0$ を x について積分すると

$$f(x) + g(x) = C \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる (C は定数) .

①, ② に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = g(0), f(0) + g(0) = C$$

$$\text{上の 2 式から } f(0) = g(0) = \frac{C}{2}$$

$$g(0) = \frac{C}{2} \text{ を ① に代入して } f(x) = -x^2 + 6x + \frac{C}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ を ② に代入して } g(x) = x^2 - 6x + \frac{C}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$g(1) = 6 \text{ を ④ に代入して } \frac{C}{2} = 11$$

したがって, ③, ④ から

$$f(x) = -x^2 + 6x + 11, g(x) = x^2 - 6x + 11$$

(2) $f(x), g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は

$$-x^2 + 6x + 11 = x^2 - 6x + 11 \quad \text{これを解いて } x = 0, 6$$

$0 \leq x \leq 6$ において $f(x) \geq g(x)$ であるから, 求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^6 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^6 \{(-x^2 + 6x + 11) - (x^2 - 6x + 11)\} dx \\ &= -2 \int_0^6 x(x - 6) dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) (6 - 0)^3 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad a_{n+1} = ka_n - k + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

に対して、次の等式を満たす c を考える。

$$c = kc - k + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

② より $(k-1)c = k-1$ であるから、 $c = 1$ とする。

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } a_{n+1} - c = k(a_n - c)$$

を上式に $c = 1$ を代入すると

$$a_{n+1} - 1 = k(a_n - 1)$$

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項が $a_1 - 1$ 、公比 k の等比数列であるから

$$a_n - 1 = (a_1 - 1)k^{n-1}$$

$$a_1 = k \text{ より } a_n = (k-1)k^{n-1} + 1$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から } a_3 = (k-1)k^{3-1} + 1 \\ = k^3 - k^2 + 1$$

$f(k) = k^3 - k^2 + 1$ ($0 < k < 1$) とすると

$$f'(k) = 3k^2 - 2k \\ = k(3k - 2)$$

$f(k)$ の増減表は右のようになる。

したがって $\frac{23}{27} \leq a_3 < 1$

k	0	...	$\frac{2}{3}$...	1
$f'(k)$		-	0	+	
$f(k)$	1	↘	極小 $\frac{23}{27}$	↗	1

- 4 (1) $BC = a$ において, $AB = \sqrt{7}$, $CA = 2$,
 $\angle C = 60^\circ$ を余弦定理

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA \cos C$$

に適用すると

$$(\sqrt{7})^2 = a^2 + 2^2 - 2 \cdot a \cdot 2 \cos 60^\circ$$

$$7 = a^2 + 4 - 4a \times \frac{1}{2}$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a + 1)(a - 3) = 0$$

$a > 0$ であるから $BC = 3$

- (2) 辺 BC を $2:1$ に内部する点が D であるから, $CD = 1$, $\angle ADC = 90^\circ$
したがって 3 点 A, B, D を通る円は, AB を直径とする円である.
点 E は, 円周上の点であるから, $CA \perp BE$

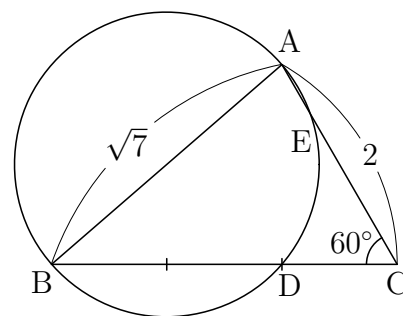
$$BE = BC \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$CE = BC \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$EA = CA - CE = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

したがって $\triangle ABE = \frac{1}{2} \times BE \times EA$

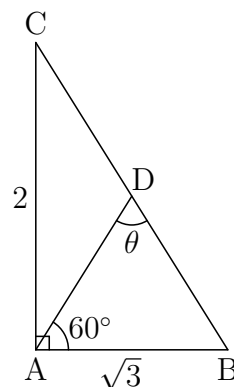
$$= \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$



5 (1) $AD = x$ とおくと

$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} x \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle ACD &= \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} x \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$



$\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ であるから、これに①、②を代入して

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2$$

両辺に4をかけて $3x + 2x = 4\sqrt{3}$

よって $x = \frac{4}{5}\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{3}$

③を①に代入して $\triangle ABD = \frac{3}{5}\sqrt{3}$

(2) $BC = \sqrt{CA^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$ より $\sin B = \frac{CA}{BC} = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \dots \textcircled{4}$

$\triangle ABD$ において、正弦定理を用いると

$$\frac{x}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \theta}$$

$$x \sin \theta = \sqrt{3} \sin B$$

③、④を代入して $\frac{4}{5}\sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{7}}$

したがって $\sin \theta = \frac{5}{2\sqrt{7}}$

【別解】(2) $\sin B = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $\theta + B + 60^\circ = 180^\circ$ より $\theta = 120^\circ - B$

したがって $\sin \theta = \sin(120^\circ - B)$

加法定理により $= \sin 120^\circ \cos B - \cos 120^\circ \sin B$

よって $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$

1.3.7 後期日程

注意事項

1. この試験問題は、「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は、1~5まで出題されていますが、志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. 印の欄に受験票を確認の上、志望学科名を記入してください。
4. 下表を十分確認の上、志望学部・学科に 印のある問題番号のみ解答してください。
5. 印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。

志望学科		学科				
志望学部	志望学科	問題番号				
		1	2	3	4	5
工学部	機械工学科					
	応用化学科					
	環境建設工学科					
	建築学科					
	宇宙航空システム工学科					
情報学部	全学科					
生物生命学部	全学科					

6. この試験問題は、監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。

1 次の各問に答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ において, $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, $\angle ACB = 30^\circ$ のとき, この三角形の面積を求めよ。
- (2) 連立不等式 $x^2 - 6x + 5 > 0$, $x^2 + (3 - a)x - 3a \leq 0$ を満たす整数 x が7つあるように, 定数 a の値の範囲を定めよ。
- (3) 点 A の座標を $(7, -3)$ とする。点 P が円 $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 10 = 0$ 上を動くとき, 線分 AP の最大値と最小値を求めよ。

2 2次関数 $f(x)$ が条件 $3f(x) - xf'(x) = x^2 - 4x + 9$ を満たしている。次の各問に答えよ。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ のグラフと点 $(2, f(2))$ における接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

3 座標空間において, $\triangle ABC$ の3つの辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ $P(0, 4, 1)$, $Q(1, 4, 0)$, $R(1, 2, -1)$ とするとき, 次の各問に答えよ。

- (1) 頂点 A の座標を求めよ。
- (2) $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n - 10$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義されている。次の各問に答えよ。

- (1) a_n を n で表せ。
- (2) a_n の値が最小となるときの n の値を求めよ。

5 連立不等式 $y + \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \leq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

- (1) D を図示せよ。
- (2) D の面積を求めよ。

解答例

1 (1) $BC = x$ とおく . 余弦定理 $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA \cos C$ により

$$2^2 = x^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2x \cdot 2\sqrt{3} \cos 30^\circ$$

$$4 = x^2 + 12 - 4\sqrt{3}x \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

整理して

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$x > 0$ より

$$x = 2, 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

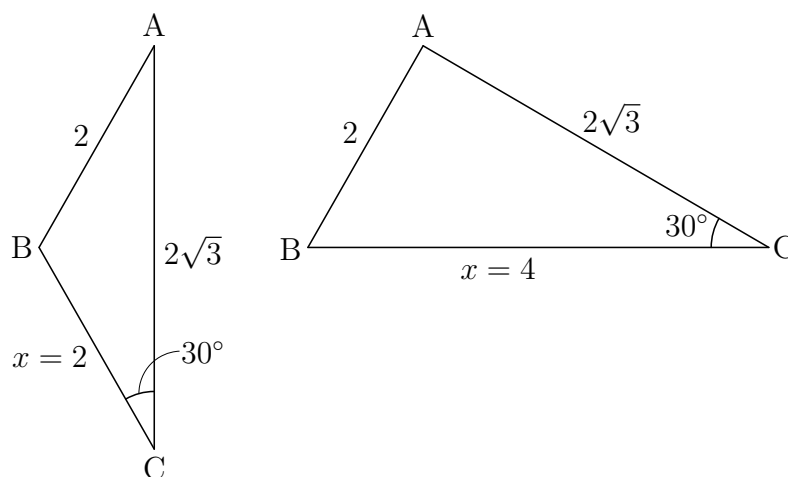
したがって $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC \cdot CA \sin C$

$$= \frac{1}{2}x \cdot 2\sqrt{3} \sin 30^\circ$$

$$= \sqrt{3}x \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \dots \textcircled{2}$$

よって, $\triangle ABC$ の面積は, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$

【補足】 $x = 2$ および $x = 4$ の $\triangle ABC$ は, 次のとおりである .



(2) $x^2 - 6x + 5 > 0$

$(x - 1)(x - 5) > 0$

これを解いて $x < 1, 5 < x \dots \textcircled{1}$

$x^2 + (3 - a)x - 3a \leq 0$

$(x + 3)(x - a) \leq 0$

$a \leq -3$ のとき $a \leq x \leq -3 \dots \textcircled{2}$

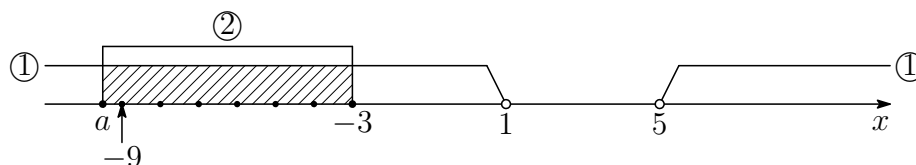
$-3 < a$ のとき $-3 \leq x \leq a \dots \textcircled{3}$

i) $a \leq -3$ のとき

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の満たす整数 x が 7 個であるとき, その整数は

$-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3$

である. このとき a の値の範囲は $-10 < a \leq -9$

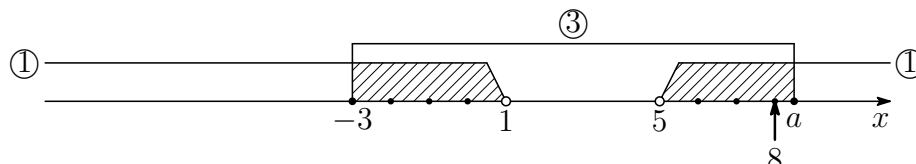


ii) $-3 < a$ のとき

$\textcircled{1}, \textcircled{3}$ の満たす整数 x が 7 個であるとき, その整数は

$-3, -2, -1, 0, 6, 7, 8$

である. このとき a の値の範囲は $8 \leq a < 9$



したがって, 定数 a の値の範囲は $-10 < a \leq -9, 8 \leq a < 9$

(3) 方程式を変形すると

$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 10 + 1 + 9$

すなわち $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$

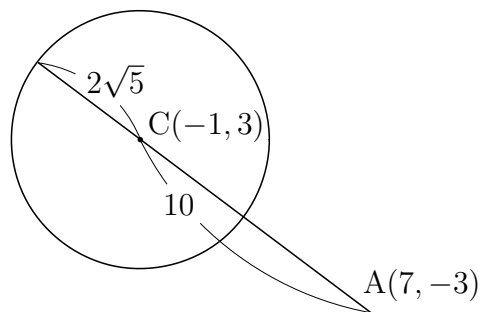
これは, 中心が点 $(-1, 3)$, 半径が $2\sqrt{5}$ の円である.

円の中心を C とすると

$AC = \sqrt{(-1 - 7)^2 + \{3 - (-3)\}^2}$
 $= 10$

$AC > 2\sqrt{5}$ より A は円の外部にある
 から AP の

最大値 $10 + 2\sqrt{5}$, 最小値 $10 - 2\sqrt{5}$



2 (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと, $f'(x) = 2ax + b$

$$\begin{aligned} 3f(x) - xf'(x) &= 3(ax^2 + bx + c) - x(2ax + b) \\ &= ax^2 + 2bx + 3c \end{aligned}$$

条件より $ax^2 + 2bx + 3c = x^2 - 4x + 9$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a = 1, 2b = -4, 3c = 9$$

すなわち $a = 1, b = -2, c = 3$

したがって $f(x) = x^2 - 2x + 3$

(2) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ より $f'(x) = 2x - 2$

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$$

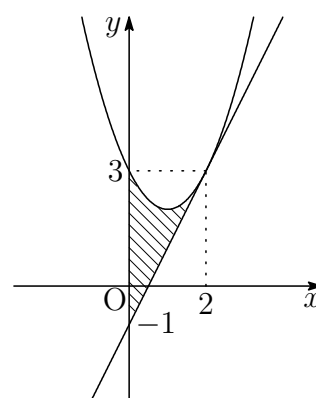
$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

ゆえに, 点 $(2, f(2))$ における接線の方程式は

$$y - 3 = 2(x - 2)$$

$$y = 2x - 1$$

よって, 求める図形の面積 S は, 右の図の斜線部分であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(x^2 - 2x + 3) - (2x - 1)\} dx \\ &= \int_0^2 (x - 2)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - 2)^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}(2 - 2)^3 - \frac{1}{3}(0 - 2)^3 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

重要な積分法

n が自然数のとき

$$\int (x - \alpha)^n dx = \frac{1}{n+1}(x - \alpha)^{n+1} + C$$

3 (1) 中点連結定理により $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

R は AB の中点であるから $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{RA}$

したがって $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{PQ}$ … ①

原点を O とすると

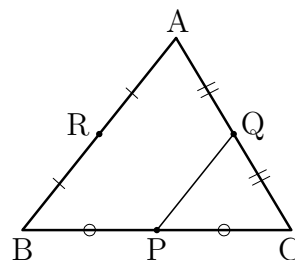
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RA}$$

① から $= \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{PQ}$

$$= (1, 2, -1) + (1 - 0, 4 - 4, 0 - 1)$$

$$= (2, 2, -2)$$

よって $A(2, 2, -2)$



(2) $\angle RAQ$ の大きさを求めればよい.

$$\overrightarrow{AR} = (1 - 2, 2 - 2, -1 - (-2))$$

$$= (-1, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{AQ} = (1 - 2, 4 - 2, 0 - (-2))$$

$$= (-1, 2, 2)$$

よって $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AQ} = -1 \times (-1) + 0 \times 2 + 1 \times 2 = 3$

また $|\overrightarrow{AR}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ}$ のなす角を θ とする.

したがって $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AR}| |\overrightarrow{AQ}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

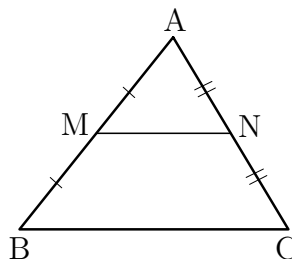
$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 45^\circ$

ゆえに $\angle BAC = 45^\circ$

中点連結定理

$\triangle ABC$ において、辺 AB の中点を M、辺 AC の中点を N とするとき、次のことが成り立つ。

$$MN \parallel BC, \quad MN = \frac{1}{2}BC$$



4 (1) 条件より $a_{n+1} - a_n = n - 10$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $n - 10$ であるから

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k - 10) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1) + 1\} - 10(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - 21n + 22) \end{aligned}$$

初項は $a_1 = 1$ なので, 上の a_n は $n = 1$ のときも成り立つ.

したがって, 一般項は $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - 21n + 22)$

(2) (1) の結果から

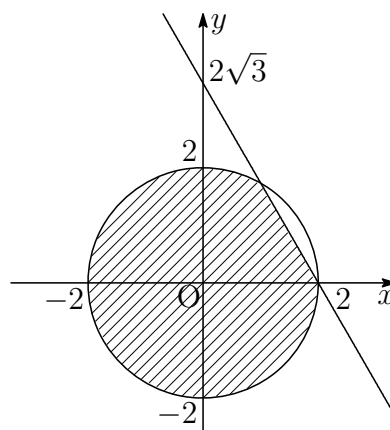
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(n^2 - 21n) + 11 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(n - \frac{21}{2} \right)^2 - \left(\frac{21}{2} \right)^2 \right\} + 11 \\ &= \frac{1}{2} \left(n - \frac{21}{2} \right)^2 - \frac{397}{4} \end{aligned}$$

n は整数なので, a_n は $n = 10, 11$ のとき最小となる.

5 (1) D の表す領域は

直線 $y + \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 0$ の下側，
円 $x^2 + y^2 = 4$ の内部

に共通する部分である．
すなわち右の斜線部分である．
ただし，境界線を含む．



(2) 直線 $y + \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 4$ の共有点を，図のように A, B とする．この直線の傾きは $-\sqrt{3}$ であるから

$$\angle BAO = 60^\circ$$

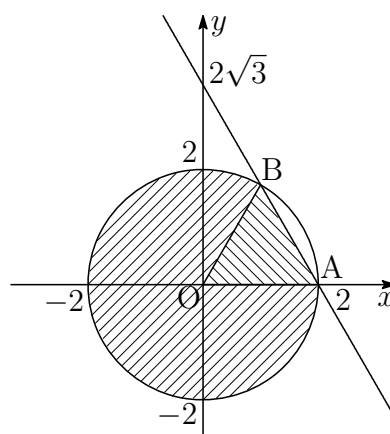
$OA = OB$ であるから

$$\angle BAO = \angle ABO$$

したがって， $\triangle OAB$ は 1 辺が 2 の正三角形である．

D の面積 S は，1 辺が 2 の正三角形と半径 2，中心角 300° の扇形の面積の和であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 60^\circ + \pi \cdot 2^2 \times \frac{300}{360} \\ &= \sqrt{3} + \frac{10}{3}\pi \end{aligned}$$



1.3.8 前期日程 (薬学部)80 分

1 次の各問に答えよ。

(1) a を定数とする。 y 軸上の点 $P(0, a)$ と放物線 $y = x^2$ 上の点 Q との距離の最小値およびそのときの Q の座標を求めよ。

(2) n を正の整数とする。 $x + y + z = n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を a_n で表す。

(a) a_n を n で表せ。

(b) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

2 $\triangle ABC$ において、 $AB = 2, BC = 4, CA = 3$ である。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ とするとき、次の各問に答えよ。

(1) $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 \overrightarrow{AD} を \vec{a}, \vec{b} で表せ。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の中心を O とするとき、 \overrightarrow{AO} を \vec{a}, \vec{b} で表せ。また、 \overrightarrow{AO} の大きさを求めよ。

3 曲線 $y = |x + 2|(x - 4)$ と直線 $y = -2x + k$ が 2 点を共有するとき、これらのグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。ただし、定数 k は $|k| \geq 5$ とする。

解答例

1 (1) PQ間の距離を d とすると

$$\begin{aligned} d^2 &= (x-0)^2 + (x^2-a)^2 \\ &= x^4 + (1-2a)x^2 + a^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{1-2a}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 + a^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{1-2a}{2}\right)^2 + \frac{4a-1}{4} \end{aligned}$$

[1] $\frac{1-2a}{2} > 0$ すなわち $a < \frac{1}{2}$ の場合

$x^2 = 0$ のとき d は最小となる.

$Q(0, 0)$ のとき, d は最小値 $|a|$ をとる.

[2] $\frac{1-2a}{2} \leq 0$ すなわち $a \geq \frac{1}{2}$ の場合

$x^2 = \frac{2a-1}{2}$ のとき d は最小となる.

$Q\left(\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}, \frac{2a-1}{2}\right)$ のとき, d は最小値 $\frac{\sqrt{4a-1}}{2}$ をとる.

(2) (a) 異なる3種類のもの (x, y, z) から, 重複を許して n 個とる組合せの総数であるから (重複組合せ)

$$\begin{aligned} a_n &= {}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

(b) $a_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + 2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) + 2n \right\} \\ &= \frac{1}{6}n(n^2 + 6n + 11) \end{aligned}$$

[例] チョコ, バニラ, メロンの3種類のアイスクリームがたくさんある. これらの中から5個のアイスクリームを選ぶとき, 何通りの選び方があるか. ただし, 含まないアイスクリームがあってもよいものとする.

考え方 2つの仕切り(|)があれば, 3種類のアイスクリームに分けることができるので, 仕切りの左側をチョコ, 仕切りと仕切りの間をバニラ, 仕切りの右側をメロンとする. たとえば

		は チョコ1個, バニラ2個, メロン2個
		は チョコ4個, バニラ0個, メロン1個
		は チョコ2個, バニラ3個, メロン0個

このように考えると, 2つの|と5つの の配列の仕方の総数が3種類のアイスクリーム5個の選び方の総数である. これは同じものを含む順列で, $7 = (3-1) + 5$ 個の場所から5個の の場所を選ぶ組合せの数で

$${}_{(3-1)+5}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ (通り)}$$

一般に, 異なる n 個のものから重複を許して r 個を取る組合せの数は, 上と同じ考えで, $n-1$ 個の仕切り|と r 個の の順列の数で, $(n-1) + r$ 個の場所から, r 個の の場所を選ぶことであるから

$${}_{(n-1)+r}C_r \text{ すなわち } {}_{n+r-1}C_r$$

である. このような組合せを重複組合せといい, その数を ${}_nH_r$ で表す.

重複組合せ

異なる n 個のものから, 重複を許して r 個とる組合せの数は

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r \quad (n < r \text{ でもよい})$$

[問] $x + y + z = 8, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ を満たす整数 x, y, z の組 (x, y, z) は, 全部で何組あるか.

(解) 異なる3種類のものから, 重複を許して8個とる組合せの総数であるから ${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$ (組)

$x + y + z = n (n \geq 0)$ の負でない整数解の個数は

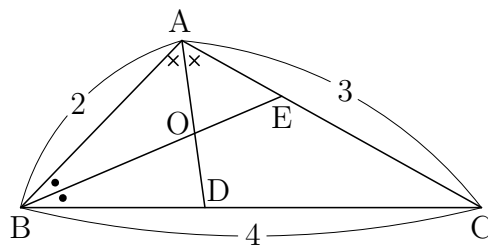
$${}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

2 (1) AD は $\angle A$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 2 : 3$$

D は線分 BC を 2 : 3 に内分する点であるから

$$\vec{AD} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2 + 3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$



$$(2) BD = BC \times \frac{2}{2+3} = 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

BO は $\angle B$ の二等分線であるから

$$AO : OD = BA : BD = 2 : \frac{8}{5} = 5 : 4$$

$$\text{したがって} \quad \vec{AO} = \frac{5}{9}\vec{AD} = \frac{5}{9} \times \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} = \frac{1}{9}(3\vec{a} + 2\vec{b}) \quad \dots \textcircled{1}$$

$\angle BAC = \theta$ とおき, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\cos \theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

したがって, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ および $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から

$$\begin{aligned} |\vec{AO}|^2 &= \frac{1}{9}(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \frac{1}{9}(3\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \frac{1}{81}(9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{81} \left\{ 9 \times 2^2 + 12 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 4 \times 3^2 \right\} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad |\vec{AO}| = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3 曲線 $y = |x + 2|(x - 4)$ は

$$y = \begin{cases} -(x + 2)(x - 4) & (x \leq -2) \\ (x + 2)(x - 4) & (x \geq -2) \end{cases}$$

この曲線と傾き -2 の直線が 2 点を共有するのは、右の図のように点 $(-2, 0)$ を通る直線 l_1 および曲線に接する直線 l_2 である。

$$l_1 \text{ は点 } (-2, 0) \text{ を通るから } k = -4$$

$$l_2 \text{ は放物線に接するから } k = -8$$

$|k| \geq 5$ であるから l_1 は不適

$x < -2$ において、曲線と直線 l_2 の共有点の x 座標は

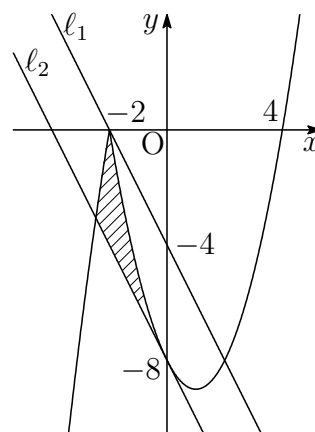
$$-(x + 2)(x - 4) = -2x - 8 \quad \text{これを解いて } x = 2 - 2\sqrt{5}$$

$x > -2$ において、曲線と直線 l_2 の共有点の x 座標は

$$(x + 2)(x - 4) = -2x - 8 \quad \text{これを解いて } x = 0$$

したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{2-2\sqrt{5}}^{-2} \{-(x + 2)(x - 4) - (-2x + 8)\} dx \\ &\quad + \int_{-2}^0 \{(x + 2)(x - 4) - (-2x - 8)\} dx \\ &= \int_{2-2\sqrt{5}}^{-2} \{-(x - 2)^2 + 20\} dx + \int_{-2}^0 x^2 dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}(x - 2)^3 + 20x \right]_{2-2\sqrt{5}}^{-2} + \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^0 \\ &= \frac{80\sqrt{5}}{3} - 56 \end{aligned}$$



重要な積分法

$$n \geq 0 \text{ である整数のとき } \int (x - \alpha)^n dx = \frac{1}{n + 1} (x - \alpha)^{n+1} + C$$

1.3.9 後期日程(薬学部)80分

1 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = (x - p)^2 + p$ が3点 $A(0, 3)$, $B(0, 2)$, $C(1, 3)$ を頂点とする $\triangle ABC$ と共有点をもつような定数 p の値の範囲を求めよ。

(2) $1, 2, 2, 3, 3, 3$ の6個の数字を使って整数をつくる。次の各問に答えよ。

(a) 3桁の整数は何個できるか。

(b) 3の倍数である4桁の整数は何個できるか。

2 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(-1, 1)$, $Q(2, 4)$ を結ぶ線分 PQ とこの放物線で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) (1)の図形の面積を二等分する原点を通る直線の方程式を求めよ。

3 xy 平面において、 x 座標、 y 座標の値が共に整数である点を格子点という。放物線 $y = x^2$ と直線 $y = n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で囲まれる領域(境界を含む)内の格子点の個数を a_n とする。次の各問に答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3 の値を求めよ。また、 $a_n - a_{n-1}$ を n を用いて表せ。

(2) a_n を求めよ。

解答例

1 (1) $f(x) = (x-p)^2 + p$ とおく .

y 軸との共有点の y 座標によって , 次の場合分けを行う .

[1] y 軸との共有点が点 B より下側にある場合

$$\begin{cases} f(0) < 2 \\ f(1) \geq 3 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} p^2 + p < 2 \\ p^2 - p + 1 \geq 3 \end{cases}$$

これを解いて $-2 < p \leq -1$

[2] y 軸との共有点が線分 AB 上にある場合

$$2 \leq f(0) \leq 3 \quad \text{すなわち} \quad 2 \leq p^2 + p \leq 3$$

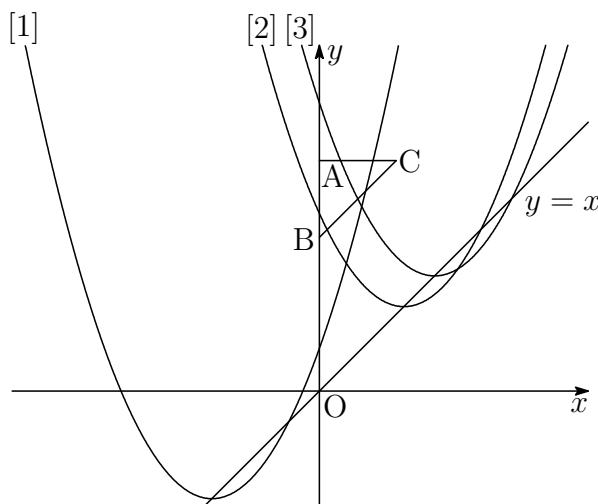
これを解いて $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \leq p \leq -2, 1 \leq p \leq \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

[3] y 軸との共有点が点 A より上側にある場合

$$\begin{cases} f(0) > 3 \\ f(1) \leq 3 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} p^2 + p > 3 \\ p^2 - p + 1 \leq 3 \end{cases}$$

これを解いて $\frac{-1 + \sqrt{13}}{2} < p \leq 2$

[1][2][3] より $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \leq p \leq -1, 1 \leq p \leq 2$



- (2) (a) $\{1, 2, 3\}$ を用いる組合せは $3!$ (個)
 $\{1, 2, 2\}, \{1, 3, 3\}, \{2, 2, 3\}, \{2, 3, 3\}$ を用いる組合せは
それぞれ ${}_3C_1$ (個)
 $\{3, 3, 3\}$ を用いる組合せは 1 (個)
したがって $3! + 4 \times {}_3C_1 + 1 = 19$ (個)

- (b) 3 の倍数となる 4 桁の整数は $\{1, 2, 3, 3\}$ を用いる組合せであるから

$$\frac{4!}{1!1!2!} = 12 \text{ (個)}$$

0 以上の整数 A に対して次のことが成り立つ .

A が 3 の倍数 $\iff A$ の各位の数字の和が 3 の倍数

A が 9 の倍数 $\iff A$ の各位の数字の和が 9 の倍数

[証明] 4 桁の数 $A = 1000a + 100b + 10c + d$ の場合で示すと

$$\begin{aligned} A &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 9(111a + 11b + c) + a + b + c + d \end{aligned}$$

ゆえに , $a + b + c + d$ が 3 の倍数 (9 の倍数) $\iff A$ が 3 の倍数 (9 の倍数)

2 (1) 直線 PQ の方程式は $y = x + 2$

線分 PQ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(x+2) - x^2\} dx \\ &= - \int_{-1}^2 (x+1)(x-2) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6}\right) \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(2) (1) の図形の面積を二等分する原点を通る直線と直線 $y = x + 2$ の交点 A の座標を $(a, a + 2)$, 直線 $y = x + 2$ と y 軸との交点を B とおく.

線分 OB, BP と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \int_{-1}^0 \{(x+2) - x^2\} dx = \frac{7}{6}$$

$S_1 + \triangle OAB = \frac{1}{2}S$ であるから

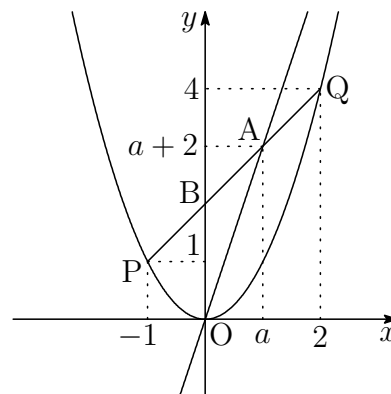
$$\frac{7}{6} + \frac{1}{2} \times 2 \times a = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2}$$

これを解いて $a = \frac{13}{12}$

よって, 点 A の座標は $\left(\frac{13}{12}, \frac{37}{12}\right)$

したがって, 求める直線の方程式は

$$y = \frac{37}{13}x$$

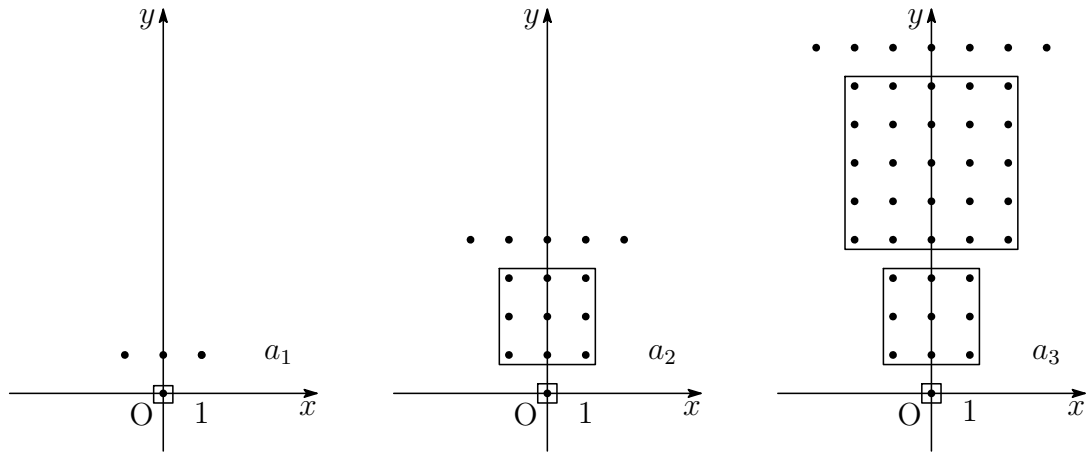


$$\begin{aligned} \boxed{3} \quad (1) \quad a_1 &= 1^2 + (2 \cdot 1 + 1) = 4 \\ a_2 &= 1^2 + 3^2 + (2 \cdot 2 + 1) = 15 \\ a_3 &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + (2 \cdot 3 + 1) = 42 \end{aligned}$$

上の式から

$$a_2 - a_1 = 3^2 + 2, \quad a_3 - a_2 = 5^2 + 2, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = (2n-1)^2 + 2$$

よって $a_n - a_{n-1} = 4n^2 - 4n + 3$



(2) $a_{k+1} - a_k = (2k+1)^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3$ であるから

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k^2 + 4k + 3) \\ &= 4 + 4 \times \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} \\ &\quad + 4 \times \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} + 3(n-1) \\ &= 4 + \frac{2}{3}n(n-1)(2n-1) + 2n(n-1) + 3n - 3 \\ &= \frac{1}{3}(4n^3 + 5n + 3) \end{aligned}$$

数学I・数学A

I 次の□の中にもっとも適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

- (1) $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ の分母を有理化すると, $x = \square 1$ となるから, x の整数部分は $\square 2$, 小数部分は $\square 3$ である。

$\square 1$ の選択肢 ① $5 - 2\sqrt{6}$ ② $5 - 2\sqrt{3}$ ③ $1 + 2\sqrt{6}$

④ $5 + 2\sqrt{3}$ ⑤ $5 + 2\sqrt{6}$

$\square 2$ の選択肢 ① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

$\square 3$ の選択肢 ① $-5 + 2\sqrt{3}$ ② $-3 + 2\sqrt{3}$ ③ $4 - 2\sqrt{3}$

④ $-4 + 2\sqrt{6}$ ⑤ $9 - 2\sqrt{6}$

- (2) 放物線 $y = ax^2 + bx + 1$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線が, 2点 $(-1, 3)$, $(1, 13)$ を通るとき, $a = \square 4$, $b = \square 5$ である。

$\square 4$ の選択肢 ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

$\square 5$ の選択肢 ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

- (3) (i) $(3x^2 - 1)^7$ の展開式における x^4 の項の係数は $\square 6$ である。
 (ii) $(x - 2y + 3z)^6$ の展開式における x^3y^2z の項の係数は $\square 7$ である。

$\square 6$ の選択肢 ① -189 ② -81 ③ 9 ④ 81 ⑤ 189

$\square 7$ の選択肢 ① -720 ② -360 ③ -12 ④ 360 ⑤ 720

- (4) 円に内接する四角形 ABCD で, $AB = 9$, $BC = 6$, $DA = 14$ である。いま, 辺 AD の D の方への延長と, 辺 BC の C の方への延長が点 P で交わり, $PA = 2PC + 6$ である。このとき, $PC = \square 8$, $CD = \square 9$ である。

$\square 8$ の選択肢 ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$\square 9$ の選択肢 ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

II a を実数の定数とする。2 次関数 $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 5a - 1$ について、次の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ の定義域が実数全体であるとき、 $f(x)$ の最小値 m を a の式で表すと、 $m = \boxed{10}a^2 + \boxed{11}a - \boxed{12}$ となる。さらに、 a がすべての実数の値をとって変化するとき、 m の最大値は $\frac{\boxed{13}}{\boxed{14}}$ となる。

(2) $x > 0$ において常に $f(x) > 0$ であるとき、 a のとりうる値の範囲は $\boxed{15} < a < \boxed{16}$ である。

(3) $y = f(x)$ のグラフが x 軸と $0 \leq x \leq 3$ の範囲で異なる 2 つの交点をもつとき、 a のとりうる値の範囲は $\frac{\boxed{17}}{\boxed{18}} \leq a < \boxed{19}$ である。

また、そのときこの放物線が、 x 軸から切り取る線分の長さが $\sqrt{2}$ となるときの a の値は $a = \frac{\boxed{20} - \sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{22}}$

III 1, 2, 3, 4 の数を書いた 10 枚のカード $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{3}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{4}, \boxed{4}, \boxed{4}$ がある。この中から 3 枚のカードを同時に取り出すとき、次の問いに答えなさい。

(1) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数が全て同じになる確率は、 $\frac{\boxed{23}}{\boxed{24} \boxed{25}}$ である。

(2) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数がすべて異なる確率は、 $\frac{\boxed{26}}{\boxed{27} \boxed{28}}$ である。

(3) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数の積が偶数になる確率は、 $\frac{\boxed{29} \boxed{30}}{\boxed{31} \boxed{32}}$ である。

(4) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数の和が 3 の倍数になる確率は、 $\frac{\boxed{33} \boxed{34}}{\boxed{35} \boxed{36} \boxed{37}}$ である。

数学II・数学B

I 次の□の中にもっとも適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

- (1) 多項式 $x^3 + 3x^2 + ax + b$ を多項式 $x^2 - x + 2$ で割ると、割り切れる。このとき、 $a = \square 1$ 、 $b = \square 2$ であり、 $x^3 + 3x^2 + ax + b$ を因数分解すると $(x^2 - x + 2)(x + \square 3)$ となる。

□ 1 の選択肢 ① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

□ 2 の選択肢 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

□ 3 の選択肢 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

- (2) 関数 $y = \log_2 2x + \log_2(4 - x)$ は、 $x = \square 4$ のとき最大値 $\square 5$ をとる。

□ 4 の選択肢 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

□ 5 の選択肢 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

- (3) $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ である2つのベクトル \vec{a} 、 \vec{b} のなす角が 120° である。 $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ が垂直になるとき $t = \square 6$ である。また、 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ が最小になるとき $t = \square 7$ であり、最小値は $\square 8$ である。

□ 6 の選択肢 ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

□ 7 の選択肢 ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

□ 8 の選択肢 ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ 3

- (4) a, b, c を実数の定数とする。関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は、 $x = -1$ で極大、 $x = 3$ で極小となる。このとき、 $a = \square 9$ 、 $b = \square 10$ である。また、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる3点で交わるとき、 c のとりうる値の範囲は $\square 11$ である。

□ 9 の選択肢 ① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

□ 10 の選択肢 ① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

□ 11 の選択肢 ① $c < -5$ ② $c < -5, 27 < c$ ③ $-5 < c < 27$
④ $c < 27$ ⑤ $c > 27$

II 初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

である数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $a_1 = \boxed{12}$, $a_2 = \boxed{13} \boxed{14}$ である。
- (2) $a_n = n(n + \boxed{15})(n + \boxed{16})$ である。ただし、 $\boxed{15} < \boxed{16}$ とする。
- (3) $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+2} = \frac{\boxed{17}}{\boxed{18}}n(n + \boxed{19})(n + \boxed{20})$ である。
 ただし、 $\boxed{19} < \boxed{20}$ とする。
- (4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{n(n + \boxed{21})}{\boxed{22}(n + \boxed{23})(n + \boxed{24})}$ である。
 ただし、 $\boxed{23} < \boxed{24}$ とする。

III 点 O を原点とする xy 平面上に、円 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$, 円 $C_2 : (x-a)^2 + y^2 = r^2$ と、直線 $l : mx - y - 6m = 0$ がある。ただし、 a, r, m は正の定数であるとする。

- (1) 直線 l は、 m の値にかかわらず定点 $(\boxed{25}, \boxed{26})$ を通る。
- (2) 直線 l が円 C_1 に接するとき、 $m = \frac{\sqrt{\boxed{27}}}{\boxed{28}}$ である。
- (3) 直線 l が円 C_1 にも円 C_2 にも接し、さらに C_1 と C_2 が外接するとき、
 $a = \boxed{29}$, $r = \boxed{30}$ である。また、このとき l と C_1, C_2 の接点をそれぞれ P, Q とすると、 $PQ = \boxed{31}\sqrt{\boxed{32}}$ である。

解答例

数学 I・数学 A

$$\text{I (1)} \quad x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{6} = \sqrt{24} \text{ であるから } 4 < 2\sqrt{6} < 5$$

$$\text{各辺に } 5 \text{ をたして } 9 < 5 + 2\sqrt{6} < 10$$

$5 + 2\sqrt{6}$ の整数部分を a , 小数部分を b とすると

$$a + b = 5 + 2\sqrt{6} , a = 9$$

であるから , $b = -4 + 2\sqrt{6}$

- (2) 2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 だけ平行移動した点がそれぞれ $(-1, 3)$, $(1, 13)$ であるとすると

$$\begin{cases} x_1 - 2 = -1 \\ y_1 + 3 = 3 \end{cases} , \begin{cases} x_2 - 2 = 1 \\ y_2 + 3 = 13 \end{cases}$$

であるから , これを解いて $A(1, 0)$, $B(3, 10)$

2点 A , B は放物線 $y = ax^2 + bx + 1$ 上の点であるから

$$0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1$$

$$10 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 1$$

整理すると $a + b = -1 \quad \dots \textcircled{1}$

$$9a + 3b = 9 \quad \text{すなわち} \quad 3a + b = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を解いて $a = 2$, $b = -3$

- (3) (i) 一般項 ${}_7C_r(3x^2)^{7-r}(-1)^r$ において , $2(7-r) = 4$ とすると $r = 5$ によって , 求める係数は ${}_7C_5 \times 3^2 \times (-1)^5 = -189$

$$(ii) \frac{6!}{3!2!1!} \times (-2)^2 \times 3 = 720$$

(4) 方べきの定理により

$$PA \cdot PD = PB \cdot PC \quad \dots \textcircled{1}$$

$PC = x$ とおくと

条件より $PA = 2x + 6$

また $PB = PC + BC = x + 6$

$$PD = PA - DA = (2x + 6) - 14 = 2x - 8$$

① に代入して $(2x + 6)(2x - 8) = (x + 6)x$

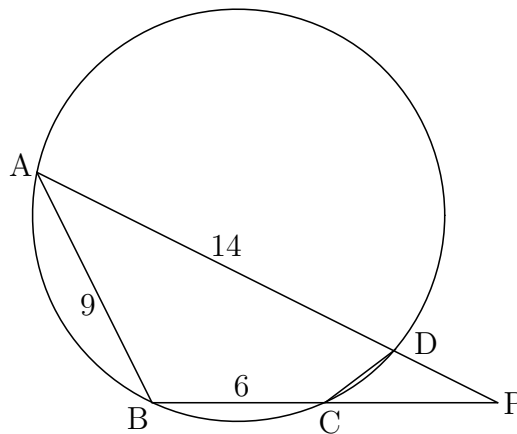
整理して $3x^2 - 10x - 48 = 0$

$$(x - 6)(3x + 8) = 0$$

$x > 0$ であるから $x = 6$ すなわち $PC = 6$

また, $\triangle ABP$ と $\triangle CDP$ の相似比は $PA : PC = 18 : 6 = 3 : 1$

したがって, $AB = 9$, $AB : CD = 3 : 1$ から $CD = 3$



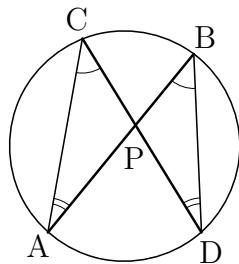
方べきの定理

円の2つの弦 AB, CD の交点, またはそれらの延長の交点を P とすると,

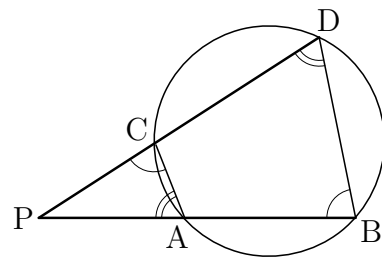
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

が成り立つ.

[1]



[2]



$$\begin{aligned}
 \text{II (1)} \quad f(x) &= x^2 - 2(a+1)x + 5a - 1 \\
 &= x^2 - 2(a+1)x + (a+1)^2 - (a+1)^2 + 5a - 1 \\
 &= \{x - (a+1)\}^2 - a^2 + 3a - 2 \quad \cdots (*)
 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } m = -a^2 + 3a - 2$$

$$\begin{aligned}
 m &= -a^2 + 3a - 2 \\
 &= -(a^2 - 3a) - 2 \\
 &= -\left\{\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} - 2 \\
 &= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

よって, m の最大値は $\frac{1}{4}$

(2) [1] $a+1 \leq 0$ のとき, すなわち $a \leq -1$ のとき

$f(0) \geq 0$ であるから

$$5a - 1 \geq 0 \quad \text{これを解いて } a \geq \frac{1}{5}$$

このとき, $a \leq -1$ と共通する値の範囲はない

[2] $a+1 > 0$ のとき, すなわち $a > -1$ のとき

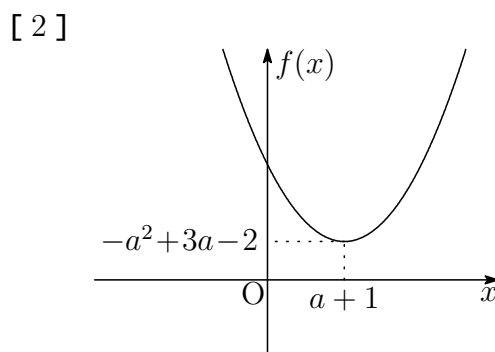
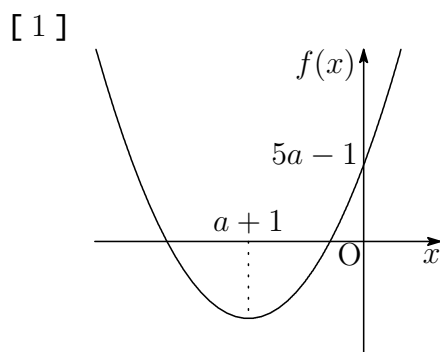
$$(*) \text{ より } -a^2 + 3a - 2 > 0$$

$$a^2 - 3a + 2 < 0$$

$$(a-1)(a-2) < 0$$

$a > -1$ に注意して $1 < a < 2$

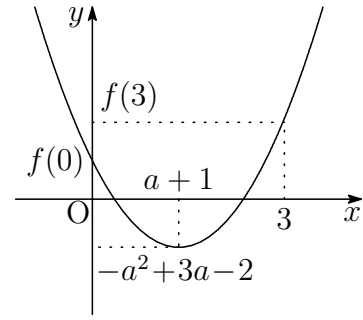
[1] [2] より $1 < a < 2$



(3) (*) から

$$y = \{x - (a + 1)\}^2 - a^2 + 3a - 2$$

であるから，グラフが右の図のような位置
にあればよい．すなわち



$$\begin{cases} 0 < a + 1 < 3 \\ -a^2 + 3a - 2 < 0 \\ f(0) \geq 0 \\ f(3) \geq 0 \end{cases}$$

第1式から $-1 < a < 2$ … ①

第2式から $a^2 - 3a + 2 > 0$
 $(a - 1)(a - 2) > 0$
 $a < 1, 2 < a$ … ②

第3式から $5a - 1 \geq 0$
 $a \geq \frac{1}{5}$ … ③

第4式から $-a + 2 \geq 0$
 $a \leq 2$ … ④

①, ②, ③, ④の共通する値の範囲を求めて $\frac{1}{5} \leq a < 1$ … ⑤

放物線と x 軸との共有点の x 座標を x_1, x_2 とすると ($x_1 < x_2$)，これらは
2次方程式

$$\{x - (a + 1)\}^2 - a^2 + 3a - 2 = 0$$

の解であるから

$$\begin{aligned} \{x - (a + 1)\}^2 &= a^2 - 3a + 2 \\ x - (a + 1) &= \pm\sqrt{a^2 - 3a + 2} \\ x &= a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 3a + 2} \end{aligned}$$

したがって， $x_1 = a + 1 - \sqrt{a^2 - 3a + 2}$ ，
 $x_2 = a + 1 + \sqrt{a^2 - 3a + 2}$

このとき， $x_2 - x_1 = \sqrt{2}$ であるから

$$2\sqrt{a^2 - 3a + 2} = \sqrt{2}$$

両辺を平方して $4(a^2 - 3a + 2) = 2$

整理して $2a^2 - 6a + 3 = 0$

⑤に注意して $a = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

III (1) 「3枚とも同じ数である」という事象は、「3枚とも3である」という事象と「3枚とも4である」という事象の和事象である。

$$3 \text{枚とも } 3 \text{ である確率は } \frac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120}$$

$$3 \text{枚とも } 4 \text{ である確率は } \frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{4}{120}$$

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{120} + \frac{4}{120} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

(2) 「3枚のカードがすべて異なる数である」という事象は、3枚のカードが $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ である事象の和事象である。

$$3 \text{枚のカードが } \{1, 2, 3\} \text{ である確率は } \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{120} = \frac{6}{120}$$

$$3 \text{枚のカードが } \{1, 2, 4\} \text{ である確率は } \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{120} = \frac{8}{120}$$

$$3 \text{枚のカードが } \{1, 3, 4\} \text{ である確率は } \frac{{}_1C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{120} = \frac{12}{120}$$

$$3 \text{枚のカードが } \{2, 3, 4\} \text{ である確率は } \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{120} = \frac{24}{120}$$

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{6}{120} + \frac{8}{120} + \frac{12}{120} + \frac{24}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

(3) 「3枚のカードの数の積が奇数である」という事象は、3枚のカードが $\{1, 3, 3\}$, $\{3, 3, 3\}$ である事象の和事象である。

$$3 \text{枚のカードが } \{1, 3, 3\} \text{ である確率は } \frac{{}_1C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{1 \cdot 3}{120} = \frac{3}{120}$$

$$3 \text{枚のカードが } \{3, 3, 3\} \text{ である確率は } \frac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120} = \frac{1}{120}$$

これらの事象は互いに排反であるから、3枚のカードの数の積が奇数である確率は

$$\frac{3}{120} + \frac{1}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

「3枚のカードの数の積が偶数である」という事象は、「3枚のカードの数の積が奇数である」という事象の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

(4) 「3枚のカードの数の和が3の倍数である」という事象は、3枚のカードが {1, 2, 3}, {1, 4, 4}, {2, 3, 4}, {3, 3, 3}, {4, 4, 4} である事象の和事象である。

3枚のカードが {1, 2, 3} である確率は $\frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{120} = \frac{6}{120}$

3枚のカードが {1, 4, 4} である確率は $\frac{{}_1C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{1 \cdot 6}{120} = \frac{6}{120}$

3枚のカードが {2, 3, 4} である確率は $\frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{120} = \frac{24}{120}$

3枚のカードが {3, 3, 3} である確率は $\frac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120}$

3枚のカードが {4, 4, 4} である確率は $\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{4}{120}$

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{6}{120} + \frac{6}{120} + \frac{24}{120} + \frac{1}{120} + \frac{4}{120} = \frac{41}{120}$$

	解 答 欄		解 答 欄
1	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	21	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
2	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	22	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
3	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	23	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
4	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	24	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
5	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	25	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
6	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	26	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
7	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	27	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
8	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	28	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
9	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	29	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
10	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	30	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
11	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	31	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
12	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	32	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
13	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	33	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
14	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	34	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
15	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	35	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
16	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	36	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
17	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	37	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩
18	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩		
19	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩		
20	⊖ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩		

解答例

数学Ⅱ・数学B

I (1) 右の割り算から, このとき

$$a + 2 = 0 \text{ かつ } b - 8 = 0$$

$$\text{よって } a = -2, b = 8$$

したがって

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2 - 2x + 8 \\ &= (x^2 - x + 2)(x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x \quad +4 \\ x^2 - x + 2 \overline{) x^3 + 3x^2 \quad + ax \quad + b} \\ \underline{x^3 \quad -x^2 \quad + 2x} \\ 4x^2 + (a-2)x \quad + b \\ \underline{4x^2 \quad \quad -4x \quad + 8} \\ (a+2)x + b - 8 \end{array}$$

(2) 真数は正であるから $2x > 0$ かつ $4 - x > 0$

$$\text{すなわち } 0 < x < 4 \quad \cdots \text{①}$$

$$\begin{aligned} y &= \log_2 2x(4-x) \\ &= \log_2 \{-2(x^2 - 4x)\} \\ &= \log_2 \{-2(x-2)^2 + 8\} \end{aligned}$$

①において, y は $x = 2$ のとき最大値 3 をとる.

(3) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ で, \vec{a} , \vec{b} のなす角が 120° であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$(\vec{a} + t\vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}) \text{ のとき } (\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$\text{よって } |\vec{a}|^2 + (t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{b}|^2 = 0$$

$$2^2 + (t-1) \cdot (-3) - t \cdot 3^2 = 0$$

$$\text{これを解いて } t = \frac{7}{12}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 + 2t \cdot (-3) + t^2 \cdot 3^2 \\ &= 9t^2 - 6t + 4 \\ &= 9\left(t^2 - \frac{2}{3}t\right) + 4 \\ &= 9\left\{\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} + 4 \\ &= 9\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

$|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ が最小のとき, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ も最小となるから,

$|\vec{a} + t\vec{b}|$ は, $t = \frac{1}{3}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$ をとる.

$$(4) f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f'(x) = 0$ の解が $-1, 3$ であるから, 解と係数の関係により

$$(-1) + 3 = -\frac{2a}{3}, \quad (-1) \cdot 3 = \frac{b}{3}$$

ゆえに $a = -3, b = -9$

したがって $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

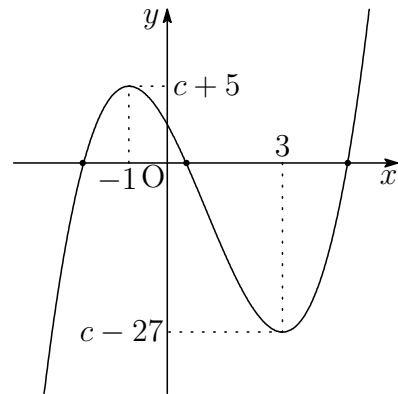
極大値は $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + c = c + 5$

極小値は $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + c = c - 27$

$y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3
点で交わる時,

$$c + 5 > 0 \quad \text{かつ} \quad c - 27 < 0$$

すなわち $-5 < c < 27$



$$\text{II (1)} \quad S_1 = \frac{1}{4} \cdot 1(1+1)(1+2)(1+3) = 6$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \cdot 2(2+1)(2+2)(2+3) = 30$$

$a_1 = S_1, a_1 + a_2 = S_2$ であるから $a_1 = 6, a_2 = 24$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &\quad - \frac{1}{4}(n-1)\{(n-1)+1\}\{(n-1)+2\}\{(n-1)+3\} \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)\{(n+3) - (n-1)\} \\ &= n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

$n = 1$ のときも上式は成り立つから $a_n = n(n+1)(n+2)$

$$(3) \frac{a_k}{k+2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{k+2} = k(k+1) = k^2 + k \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+2} &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(n+2) + 3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+5) \end{aligned}$$

$$(4) \frac{1}{a_k} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ = \frac{1}{2} \times \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)(n+2) - 2}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

III (1) 直線の方程式を m について整理すると

$$(x-6)m - y = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

① が正の値 m にかかわらず成り立つための条件は

$$x-6=0, y=0$$

したがって、求める定点の座標は $(6, 0)$

(2) 円 C_1 の中心は原点であり, 半径は 3

原点と直線 $l : mx - y - 6m = 0$ の距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|-6m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{6m}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

円 C_1 と直線 l が接するのは $d_1 = 3$ のときであるから

$$\frac{6m}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$$

$m > 0$ に注意して解いて $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) 円 C_2 の中心は $(a, 0)$, 半径は r である .

直線 l は $x - \sqrt{3}y - 6 = 0$ であるから, 点 $(a, 0)$ と直線 l の距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|a - 6|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{|a - 6|}{2}$$

円 C_2 と直線 l が接するのは $d_2 = r$ のときであるから $\frac{|a - 6|}{2} = r \dots \textcircled{1}$

C_1, C_2 の半径がそれぞれ 3, r , 中心間の距離 a である 2 つの円が外接するから $3 + r = a \dots \textcircled{2}$

$r > 0$ に注意して, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を解くと $a = 4, r = 1$

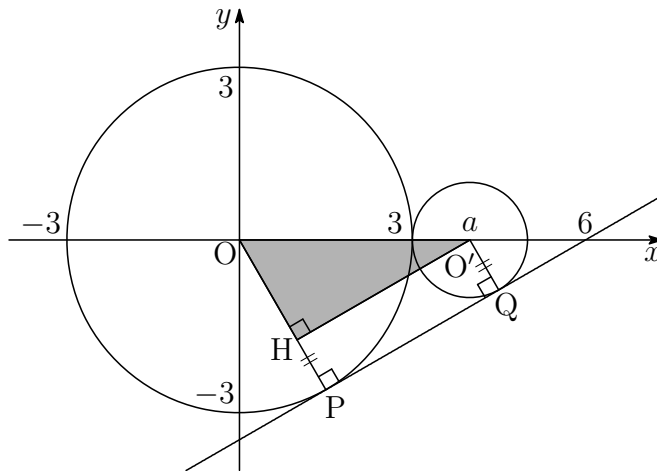
下図のように, C_2 の中心 O' から線分 OP に垂線 $O'H$ を下ろすと

$$OH = OP - O'Q = 3 - 1 = 2$$

$\triangle OO'H$ は直角三角形であるから

$$O'H^2 = OO'^2 - OH^2$$

よって $PQ = O'H = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



	解 答 欄										
1	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
2	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
3	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
4	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
5	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
6	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
7	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
8	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
9	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
10	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
11	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
12	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
13	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
14	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
15	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
16	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
17	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
18	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
19	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
20	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
21	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
22	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
23	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
24	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
25	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
26	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
27	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
28	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
29	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
30	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
31	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
32	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩

数学I・数学A

I 次の□の中にもっとも適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

- (1) 不等式 $6 - 3x < 2x < x + a$ を満たす整数 x がちょうど4個存在するとき、そのうち最小の整数は□1であり、定数 a のとりうる値の範囲は□2である。

□1の選択肢 ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

□2の選択肢 ① $5 < a$ ② $5 < a < 6$ ③ $5 \leq a < 6$
④ $5 < a \leq 6$ ⑤ $5 \leq a \leq 6$

- (2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、等式 $\sin(90^\circ - \theta) - \sqrt{3}\sin\theta + \sqrt{3} = 0$ を満たす θ の値は、小さい方から順に□3、□4である。

□3の選択肢 ① 0° ② 30° ③ 45° ④ 60° ⑤ 90°

□4の選択肢 ① 90° ② 120° ③ 135° ④ 150° ⑤ 180°

- (3) 2桁の自然数全体の集合を U として、 U の部分集合で、6で割り切れる数全体の集合を P 、10で割り切れる数全体の集合を Q とする。集合 X の個数を $n(X)$ と表すとき、 $n(P \cap Q) = \square 5$ 、 $n(P \cup Q) = \square 6$ 、 $n(P \cap \bar{Q}) = \square 7$ である。

□5の選択肢 ① 1 ② 3 ③ 9 ④ 15 ⑤ 21

□6の選択肢 ① 3 ② 9 ③ 15 ④ 21 ⑤ 22

□7の選択肢 ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

- (4) 赤玉3個、白玉2個が入った袋から、任意に1個の玉を取り出し、これをもとに戻してから再び1個の玉を取り出す場合、2個とも赤玉ならば10点、1回だけ赤玉ならば20点、2回とも白玉ならば30点が与えられるものとする。1回だけ赤玉を取り出す確率は□8であり、与えられる得点の期待値は□9点である。

□8の選択肢 ① $\frac{3}{25}$ ② $\frac{4}{25}$ ③ $\frac{6}{25}$ ④ $\frac{9}{25}$ ⑤ $\frac{12}{25}$

□9の選択肢 ① 12 ② 13 ③ 15 ④ 18 ⑤ 20

II 円Oに内接する四角形ABCDにおいて, $AB = 6, BC = 4, \angle ABC = 60^\circ$ であり, $AD : CD = 1 : 2$ である。このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) $AC = \boxed{10}\sqrt{\boxed{11}}$ であり, 円Oの半径は $\frac{\boxed{12}\sqrt{\boxed{13}\boxed{14}}}{\boxed{15}}$ である。

(2) $AD = \boxed{16}, CD = \boxed{17}$ である。

(3) 四角形ABCDの面積は $\boxed{18}\sqrt{\boxed{19}}$ である。

また, $BD = \frac{\boxed{20}\boxed{21}\sqrt{\boxed{22}}}{\boxed{23}}$ であるから, 対角線AC, BDのなす

角を θ とすると, $\sin \theta = \frac{\sqrt{\boxed{24}}}{\boxed{25}}$ である。

III k を実数の定数とする。2つの2次方程式

$$x^2 - (2k - 3)x - k = 0 \quad \dots \textcircled{1} \quad x^2 - (2k + 1)x + 3k = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

について, 次の問いに答えなさい。

(1) 方程式 $\textcircled{1}$ が $x = -2$ を解にもつとき, $k = \frac{\boxed{26}}{\boxed{27}}$ であり,

$\textcircled{1}$ のもう1つの解は $\frac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$ である。

(2) 方程式 $\textcircled{1}$ の2つの解の差が $\sqrt{5}$ であるとき, $k = \boxed{30}$ である。

(3) 方程式 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ が共通な実数の解をもつとき, $k = \boxed{31}$ または $k = \boxed{32}$ である。ただし, $\boxed{31} < \boxed{32}$ とする。また $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の共通でない方の解の和は, $k = \boxed{31}$ のとき, $\boxed{33}\boxed{34}$, $k = \boxed{32}$ のとき $\boxed{35}$ である。

数学II・数学B

I 次の□の中にもっとも適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

- (1) a, b を実数とする。3次方程式 $x^3 + ax^2 + 5x + b = 0$ の1つの解が $1 - \sqrt{2}i$ であるとき, $a = \square 1$, $b = \square 2$ であり, 他の2つの解のうち実数の解は $\square 3$ である。

$\square 1$ の選択肢 ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

$\square 2$ の選択肢 ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

$\square 3$ の選択肢 ① -4 ② -3 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

- (2) $x > -1$ のとき, $\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ は $x = \square 4$ で最小値 $\square 5$ をとる。

$\square 4$ の選択肢 ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

$\square 5$ の選択肢 ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

- (3) $x > 1$ とする。 $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{5}$ のとき, $x + x^{-1} = \square 6$, $x^2 + x^{-2} = \square 7$ であり, $x^2 - x^{-2} = \square 8$ である。

$\square 6$ の選択肢 ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ 5 ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ 25

$\square 7$ の選択肢 ① 3 ② 18 ③ 20 ④ 23 ⑤ 125

$\square 8$ の選択肢 ① $-8\sqrt{5}$ ② $-5\sqrt{5}$ ③ $5\sqrt{5}$ ④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $16\sqrt{5}$

- (4) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $y = 6 \sin \theta + 8 \cos \theta$ の最大値は $\square 9$ であり, そのときの θ の値について, $\sin \theta = \square 10$, $\cos \theta = \square 11$ である。

$\square 9$ の選択肢 ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$\square 10$ の選択肢 ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

$\square 11$ の選択肢 ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

II 3点 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を通る平面を α とし, 原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) $\vec{OH} = l\vec{OA} + m\vec{OB} + n\vec{OC}$ とおくと,

$$m = \frac{\boxed{12}}{\boxed{13}}l, n = \frac{\boxed{14}}{\boxed{15}}l \text{ である。}$$

(2) $\vec{OH} = \left(\frac{\boxed{16}}{\boxed{11}}, \frac{\boxed{17}}{\boxed{11}}, \frac{\boxed{18}}{\boxed{11}} \right)$ である。

(3) $|\vec{OH}| = \frac{\boxed{19}\sqrt{\boxed{20}\boxed{21}}}{\boxed{22}\boxed{23}}$ であり, $\triangle ABC$ の面積は $\sqrt{\boxed{24}\boxed{25}}$ である。

III 放物線 $C_1: y = x^2 - 2x + 2$, 放物線 $C_2: y = -x^2 + 3x$ と, 傾き 2 の直線 l があり, 直線 l は放物線 C_1 と点 A で接する。このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) 直線 l が放物線 C_1 に接するとき, l の方程式は $y = 2x - \boxed{26}$ であり, 点 A の座標は, $(\boxed{27}, \boxed{28})$ である。

(2) 点 A で, 直線 l と直交する直線は $y = \frac{\boxed{29}\boxed{30}}{\boxed{31}}x + \boxed{32}$ であり,

この直線と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{33}\boxed{34}\boxed{35}}{\boxed{36}\boxed{37}}$ である。

(3) 直線 l と放物線 C_2 で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{38}}{\boxed{39}}$ であり, 直線 l と放物線 C_2 で囲まれた図形が, 放物線 C_1 によって分けられる 2 つの部分の面積を S_1, S_2 とし, $S_1 > S_2$ とするとき, $S_1 = \boxed{40}S_2$ である。

解答例

数学I・数学A

$$\begin{aligned} \text{I (1)} \quad & 6 - 3x < 2x \text{ より } \frac{6}{5} < x \quad \cdots \text{①} \\ & 2x < x + a \text{ より } \quad \quad \quad x < a \quad \cdots \text{②} \\ & \text{①, ② より } \quad \quad \quad \frac{6}{5} < x < a \end{aligned}$$

この不等式を満たす整数 x が 4 個存在するとき, その整数は 2, 3, 4, 5 である. したがって, a のとりうる値の範囲は $5 < a \leq 6$

$$(2) \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \text{ であるから } \quad \cos \theta = \sqrt{3}(\sin \theta - 1) \quad \cdots \text{①}$$

$$\sin \theta - 1 \leq 0 \text{ より } \cos \theta \leq 0 \text{ であるから } \quad 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \quad \cdots \text{②}$$

① を $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入して

$$\sin^2 \theta + 3(\sin \theta - 1)^2 = 1$$

$$\text{整理して} \quad 2\sin^2 \theta - 3\sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{因数分解して} \quad (\sin \theta - 1)(2\sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{したがって} \quad \sin \theta = 1 \text{ または } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{② に注意して} \quad \theta = 90^\circ, 150^\circ$$

$$(3) \quad P = \{6 \cdot 2, 6 \cdot 3, 6 \cdot 4, \dots, 6 \cdot 16\} \text{ より } n(P) = 16 - 2 + 1 = 15$$

$$Q = \{10 \cdot 1, 10 \cdot 2, 10 \cdot 3, \dots, 10 \cdot 9\} \text{ より } n(Q) = 9$$

$$P \cap Q = \{30 \cdot 1, 30 \cdot 2, 30 \cdot 3\} \text{ より } n(P \cap Q) = 3$$

$$\text{ゆえに } n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 15 + 9 - 3 = 21$$

$$\text{また } n(P \cap \bar{Q}) = n(P) - n(P \cap Q) = 15 - 3 = 12$$

$$(4) \quad 2 \text{ 回とも赤玉の確率は } \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$1 \text{ 回だけ赤玉の確率は } \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

$$2 \text{ 回とも白玉の確率は } \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

よって, 与えられる得点を X 点とすると, 右のような表ができる.
 X の期待値は

X	10	20	30	計
確率	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	1

$$10 \times \frac{9}{25} + 20 \times \frac{12}{25} + 30 \times \frac{4}{25} = 18$$

II (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B \\ &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos 60^\circ \\ &= 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 28 \end{aligned}$$

$$AC > 0 \text{ であるから } AC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{正弦定理により } \frac{2\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\text{したがって } R = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

(2) $AD : CD = 1 : 2$ であるから, $AD = k$ とおくと $CD = 2k$

四角形 $ABCD$ は円に内接するから $\angle CDA = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$

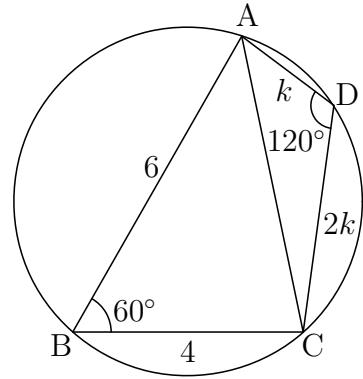
$\triangle ACD$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos 120^\circ \\ (2\sqrt{7})^2 &= k^2 + (2k)^2 - 2 \cdot k \cdot 2k \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 28 &= 7k^2 \\ k^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$k > 0 \text{ であるから } k = 2 \text{ すなわち } AD = 2, CD = 4$$

(3) 四角形 $ABCD$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ADC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \sin 120^\circ \\ &= 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

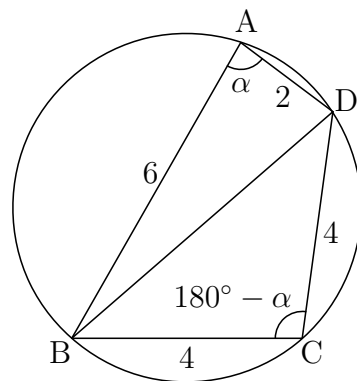


$\angle DAB = \alpha$ とする. $\triangle ABD$ において,
余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cos \alpha \\ &= 40 - 24 \cos \alpha \end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle BCD = 180^\circ - \alpha$$



$\triangle BCD$ において, 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cos(180^\circ - \alpha) \\ &= 32 + 32 \cos \alpha \end{aligned}$$

よって $40 - 24 \cos \alpha = 32 + 32 \cos \alpha$ これを解いて $\cos \alpha = \frac{1}{7}$

ゆえに $BD^2 = \frac{256}{7}$ すなわち $BD = \frac{16\sqrt{7}}{7}$

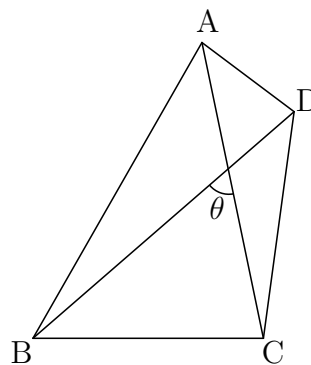
対角線 AC, BD のなす角は θ であるから,
四角形 ABCD の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \theta$$

したがって

$$8\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times \frac{16\sqrt{7}}{7} \sin \theta$$

よって $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$



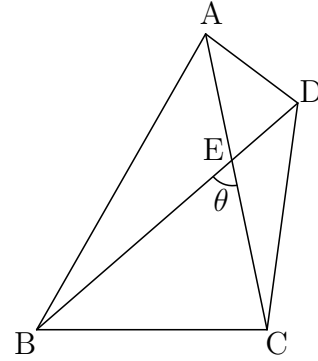
四角形 ABCD の対角線の交点を E とし, $EA = a$, $EB = b$, $EC = c$, $ED = d$, $\angle BEC = \theta$ とすると

$$\triangle EAB = \frac{1}{2}ab \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

$$\triangle EBC = \frac{1}{2}bc \sin \theta$$

$$\triangle ECD = \frac{1}{2}cd \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}cd \sin \theta$$

$$\triangle EDA = \frac{1}{2}da \sin \theta$$



ゆえに, 四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle EAB + \triangle EBC + \triangle ECD + \triangle EDA \\ &= \frac{1}{2}ab \sin \theta + \frac{1}{2}bc \sin \theta + \frac{1}{2}cd \sin \theta + \frac{1}{2}da \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(ab + bc + cd + da) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(a + c)(b + d) \sin \theta = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \theta \end{aligned}$$

したがって, 次のことが成り立つ.

四角形の面積

対角線の長さが p, q , そのなす角が θ である四角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}pq \sin \theta$$

III (1) $x = -2$ が方程式 ① の解であるから

$$(-2)^2 - (2k - 3) \cdot (-2) - k = 0 \quad \text{これを解くと } k = \frac{2}{3}$$

$$\text{このとき方程式は } x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$\text{したがって, 方程式 } 3x^2 + 5x - 2 = 0 \text{ を解いて } x = -2, \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに, もう1つの解は } x = \frac{1}{3}$$

(2) 方程式①の解は

$$x = \frac{-\{-(2k-3)\} \pm \sqrt{\{-(2k-3)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2k-3 \pm \sqrt{4k^2-8k+9}}{2}$$

であるから, 2つの解の差は

$$\frac{2k+1+\sqrt{4k^2-8k+9}}{2} - \frac{2k+1-\sqrt{4k^2-8k+9}}{2}$$

$$= \sqrt{4k^2-8k+9}$$

ゆえに $\sqrt{4k^2-8k+9} = \sqrt{5}$

両辺を平方して $4k^2-8k+9=5$

整理して $k^2-2k+1=0$

これを解いて $k=1$

(3) ①, ②の共通な解を α とすると

① から $\alpha^2 - (2k-3)\alpha - k = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$

② から $\alpha^2 - (2k+1)\alpha + 3k = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$

③ - ④ から $4\alpha - 4k = 0$ すなわち $\alpha = k$

これを③に代入して $k^2 - (2k-3)k - k = 0$

$-k^2 + 2k = 0$

$k = 0, 2$

[1] $k=0$ のとき

方程式①は $x^2 + 3x = 0$ これを解いて $x = 0, -3$

方程式②は $x^2 - x = 0$ これを解いて $x = 0, 1$

このとき, 共通でない方の解の和は $(-3) + 1 = -2$

[2] $k=2$ のとき

方程式①は $x^2 - x - 2 = 0$ これを解いて $x = 2, -1$

方程式②は $x^2 - 5x + 6 = 0$ これを解いて $x = 2, 3$

このとき, 共通でない方の解の和は $(-1) + 3 = 2$

解答例

数学II・数学B

I (1) $1 - \sqrt{2}i$ がこの方程式の解であるから

$$(1 - \sqrt{2}i)^3 + a(1 - \sqrt{2}i)^2 + 5(1 - \sqrt{2}i) + b = 0$$

$$(-5 - \sqrt{2}i) + a(-1 - 2\sqrt{2}i) + 5(1 - \sqrt{2}i) + b = 0$$

整理して $(-a + b) - 2\sqrt{2}(a + 3)i = 0$

a, b は実数であるから

$$-a + b = 0, a + 3 = 0$$

これを解くと $a = -3, b = -3$

このとき, 方程式は $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$

左辺を因数分解すると $(x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0$

したがって $x = 1, 1 \pm \sqrt{2}i$ ゆえに求める解は 1

(2) 右の割り算から

$$x^2 + 3x + 3 = (x + 1)(x + 2) + 1 \qquad \begin{array}{r} x + 2 \\ x + 1 \overline{) x^2 + 3x + 3} \\ \underline{x^2 + x} \\ 2x + 3 \\ \underline{2x + 2} \\ 1 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} &= \frac{(x + 1)(x + 2) + 1}{x + 1} \\ &= x + 2 + \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

$x + 1 > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} x + 2 + \frac{1}{x + 1} &= (x + 1) + \frac{1}{x + 1} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{(x + 1) \times \frac{1}{x + 1}} + 1 = 3 \end{aligned}$$

よって $x + 2 + \frac{1}{x + 1} \geq 3$

等号が成り立つのは $x + 1 = \frac{1}{x + 1}$

すなわち $x = 0$ のときである.

したがって $\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ は $x = 0$ のとき, 最小値 3 をとる.

(3) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ であるから,
これに $a = x^{\frac{1}{3}}, b = x^{-\frac{1}{3}}$ を代入すると

$$\begin{aligned} x + x^{-1} &= (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^3 - 3(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}) \\ &= (\sqrt{5})^3 - 3 \times \sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ であるから,
これに $a = x, b = x^{-1}$ を代入すると

$$\begin{aligned} x^2 + x^{-2} &= (x + x^{-1})^2 - 2 \\ &= (2\sqrt{5})^2 - 2 = 18 \end{aligned}$$

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ であるから,
これに $a = x^2, b = x^{-2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} (x^2 - x^{-2})^2 &= (x^2 + x^{-2})^2 - 4 \\ &= 18^2 - 4 = 320 \end{aligned}$$

$x > 1$ より $x^2 - x^{-2} > 0$ であるから

$$x^2 - x^{-2} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$$

(4) 右の図のように, α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) を

$$\cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

とすると

$$6 \sin \theta + 8 \cos \theta = 10 \sin(\theta + \alpha)$$

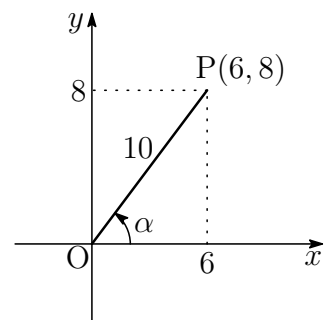
であるから

$$y = 10 \sin(\theta + \alpha) \quad (0 < \theta < \pi)$$

は, $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のとき最大値 10 をとる.

このとき $\sin \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{3}{5}$

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{4}{5}$$



II (1) $\vec{OA} = (3, 0, 0)$, $\vec{OB} = (0, 2, 0)$, $\vec{OC} = (0, 0, 2)$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{OH} &= l\vec{OA} + m\vec{OB} + n\vec{OC} \\ &= l(3, 0, 0) + m(0, 2, 0) + n(0, 0, 2) \\ &= (3l, 2m, 2n)\end{aligned}$$

であり, \vec{OH} は, α 上のベクトル

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = (0, 2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 0) \\ \vec{AC} &= \vec{OC} - \vec{OA} = (0, 0, 2) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 2)\end{aligned}$$

に垂直であるから

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{OH} \text{ より } -3 \cdot 3l + 2 \cdot 2m + 0 \cdot 2n &= 0 \quad \text{すなわち } m = \frac{9}{4}l \\ \vec{AC} \cdot \vec{OH} \text{ より } -3 \cdot 3l + 0 \cdot 2m + 2 \cdot 2n &= 0 \quad \text{すなわち } n = \frac{9}{4}l\end{aligned}$$

(2) H は α 上の点であるから, $l + m + n = 1$

$$\text{これに (1) の結果を代入すると } l + \frac{9}{4}l + \frac{9}{4}l = 1 \quad \text{ゆえに } l = \frac{2}{11}$$

$$\text{さらに } m = \frac{9}{4} \times \frac{2}{11} = \frac{9}{22}, \quad n = \frac{9}{4} \times \frac{2}{11} = \frac{9}{22}$$

$$\text{したがって } \vec{OH} = \left(3 \times \frac{2}{11}, 2 \times \frac{9}{22}, 2 \times \frac{9}{22} \right) = \left(\frac{6}{11}, \frac{9}{11}, \frac{9}{11} \right)$$

(3) $\vec{OH} = \frac{3}{11}(2, 3, 3)$ であるから $|\vec{OH}| = \frac{3}{11}\sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$

$$|\vec{AB}|^2 = (-3)^2 + 2^2 + 0^2 = 13$$

$$|\vec{AC}|^2 = (-3)^2 + 0^2 + 2^2 = 13$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 9$$

であるから, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{13 \cdot 13 - 9^2} = \sqrt{22}\end{aligned}$$

III (1) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ とおくと

$$f'(x) = 2x - 2$$

接点の x 座標を a とすると

$f'(a) = 2$ であるから

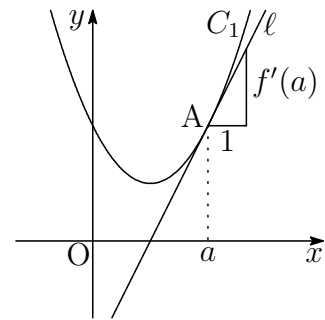
$$2a - 2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

$$\text{また} \quad f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2$$

したがって、接点の A の座標は $(2, 2)$

よって、直線 ℓ は点 $A(2, 2)$ を通り、傾き 2 の直線であるから

$$y - 2 = 2(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - 2$$



(2) 直線 ℓ に垂直な直線の傾きを m とすると

$$2m = -1 \quad \text{から} \quad m = -\frac{1}{2}$$

よって、点 A で ℓ と直交する直線の方程式は

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

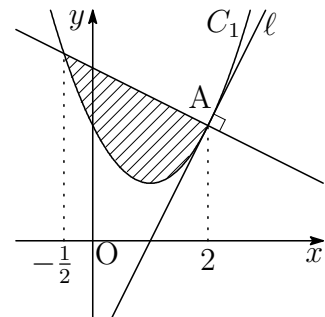
$$\text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{2}x + 3$$

C_1 とこの直線の共有点の x 座標は

$$x^2 - 2x + 2 = -\frac{1}{2}x + 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -\frac{1}{2}, 2$$

求める図形の面積 S は、図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^2 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + 3 \right) - (x^2 - 2x + 2) \right\} dx \\ &= - \int_{-\frac{1}{2}}^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 2) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6} \right) \left\{ 2 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\}^3 = \frac{125}{48} \end{aligned}$$



(3) 直線 l と放物線 C_2 の共有点の x 座標は

$$2x - 2 = -x^2 + 3x \quad \text{これを解いて} \quad x = -1, 2$$

求める図形の面積 $S_1 + S_2$ は、図から

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 3x) - (2x - 2)\} dx \\ &= - \int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6}\right) \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

放物線 C_1 と放物線 C_2 の共有点の x 座標は

$$x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 3x \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{2}, 2$$

C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積は

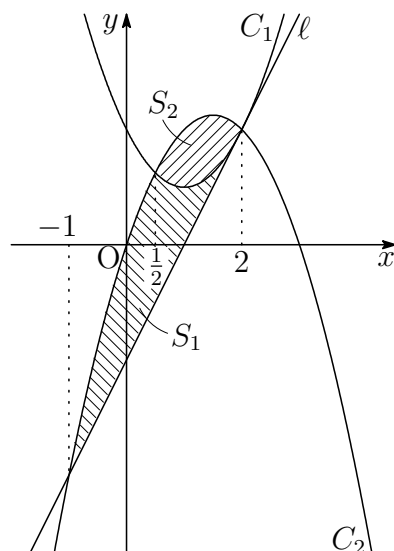
$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{2}}^2 \{(-x^2 + 3x) - (x^2 - 2x + 2)\} dx \\ &= -2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - 2) dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

したがって

$$S_1 + S_2 = \frac{9}{2}, \quad S_2 = \frac{9}{8}$$

$$\text{よって} \quad S_1 = \frac{27}{8}$$

$$\text{ゆえに} \quad S_1 = 3S_2$$



	解 答 欄											解 答 欄											
1	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	21	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
2	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	22	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
3	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	23	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
4	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	24	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
5	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	25	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
6	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	26	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
7	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	27	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
8	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	28	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
9	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	29	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
10	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	30	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
11	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	31	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
12	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	32	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
13	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	33	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
14	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	34	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
15	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	35	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
16	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	36	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
17	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	37	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
18	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	38	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
19	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	39	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
20	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	40	⊖	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩

1.5 熊本学園大学

1.5.1 A日程1日目 70分

全 学 部 (全 学 科) (A日程)

平成18年2月9日実施

(70分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5. 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. $x = \frac{1}{7}(3 + \sqrt{2})$, $y = \frac{1}{7}(3 - \sqrt{2})$ のとき, 以下の値を求めよ。

(1) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(2) $\frac{x^2 - x^2y + xy^2 - y^2}{x - y}$

2. 次の問に答えよ。

(1) 次の条件をみたす直線 ℓ , m のそれぞれの式, および 2 直線の交点の座標を求めよ。

ℓ : 点 A(-1, 2) を通り, 傾き -3

m : 2 点 (-1, -4), (2, -1) を通る

(2) 直線 m に垂直で, 点 A を通る直線の式を求めよ。

3. $\triangle ABC$ において, $\angle A = 30^\circ$, 辺 AB, AC の長さをそれぞれ 6, 8 とする。辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E があり, AD, AE の長さをそれぞれ x, y とする。 $\triangle ADE$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{3}$ である。このとき以下の問に答えよ。

(1) x と y の関係を式で表せ。

(2) $x = 4$ のとき, $\triangle BDE$ の面積を求めよ。

4. $x > 0$ かつ $x \neq 1$ のとき, 方程式 $\log_3 x - \log_x 27 = \log_9 3$ を解け。

5. 3 個のサイコロを投げたとき, 次の確率を求めよ。

(1) 出た目の和が偶数である。

(2) 少なくとも 1 個は 6 の目が出る。

(3) 出た目の和が偶数であるか, または, 少なくとも 1 個は 6 の目が出る。

6. $2x - y = 2$ のとき, $2x^2 - y^2$ の最大値と, そのときの x, y の値を求めよ。

7. 2 直線 $\ell_1 : x + y - 4 = 0$ と $\ell_2 : 2x - y - 11 = 0$ の交点 P を通り, y 軸と $y > 0$ で交わる放物線 $y = x^2 - (a + 3)x + a^2 - 5$ について, 以下の問に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 点 P における放物線の接線の方程式を求めよ。

(3) 放物線と直線 ℓ_1 によって囲まれる領域の面積 S の値を求めよ。

8. 関数 $f(x) = 2a \cos^2 x - 6a \sin x \cdot \cos x - 4a \sin^2 x + b$ が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ で最大値 7, 最小値 $1 - 6\sqrt{2}$ をとるとき, 定数 a と b の値を求めよ。ただし $a > 0$ とする。

解答例

$$\begin{aligned}
 1. (1) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \frac{\left\{\frac{1}{7}(3 + \sqrt{2})\right\}^2 - \left\{\frac{1}{7}(3 - \sqrt{2})\right\}^2}{\left\{\frac{1}{7}(3 + \sqrt{2})\right\}^2 + \left\{\frac{1}{7}(3 - \sqrt{2})\right\}^2} = \frac{\frac{1}{49}(3 + \sqrt{2})^2 - \frac{1}{49}(3 - \sqrt{2})^2}{\frac{1}{49}(3 + \sqrt{2})^2 + \frac{1}{49}(3 - \sqrt{2})^2} \\
 &= \frac{(3 + \sqrt{2})^2 - (3 - \sqrt{2})^2}{(3 + \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2} = \frac{(11 + 6\sqrt{2}) - (11 - 6\sqrt{2})}{(11 + 6\sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2})} \\
 &= \frac{12\sqrt{2}}{22} = \frac{6\sqrt{2}}{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \frac{x^2 - x^2y + xy^2 - y^2}{x - y} &= \frac{(x^2 - y^2) - (x^2y - xy^2)}{x - y} = \frac{(x + y)(x - y) - xy(x - y)}{x - y} \\
 &= \frac{(x - y)(x + y - xy)}{x - y} = x + y - xy \\
 &= \frac{3 + \sqrt{2}}{7} + \frac{3 - \sqrt{2}}{7} - \frac{3 + \sqrt{2}}{7} \times \frac{3 - \sqrt{2}}{7} = \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

$$2. (1) \ell \text{ の方程式は } y - 2 = -3\{x - (-1)\}$$

$$\text{すなわち } y = -3x - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$m \text{ の方程式は } y - (-4) = \frac{-1 - (-4)}{2 - (-1)}\{x - (-1)\}$$

$$\text{すなわち } y = x - 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{連立方程式 } \begin{cases} y = -3x - 1 & \dots \textcircled{1} \\ y = x - 3 & \dots \textcircled{2} \end{cases} \text{ を解いて } x = \frac{1}{2}, y = -\frac{5}{2}$$

$$\text{よって, 2 直線の交点の座標は } \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$(2) \text{ 直線 } m \text{ に垂直な直線の傾きを } a \text{ とすると}$$

$$1 \cdot a = -1 \text{ より } a = -1$$

よって, 点 A(-1, 2) を通り, 直線 m に垂直な直線の方程式は

$$y - 2 = -1\{x - (-1)\} \quad \text{すなわち } y = -x + 1$$

$$3. (1) \quad \triangle ADE = \frac{1}{2}xy \sin 30^\circ = \frac{1}{4}xy \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \sin 30^\circ = 12 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\triangle ADE = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \text{ であるから}$$

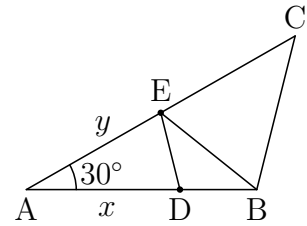
$$\frac{1}{4}xy = \frac{1}{3} \times 12$$

$$\text{すなわち} \quad xy = 16 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(2) \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ より} \quad \triangle ADE = \frac{1}{4} \times 16 = 4$$

$$x = 4 \text{ のとき} \quad AD : DB = 4 : (6 - 4) = 2 : 1$$

$$\triangle ADE : \triangle BDE = AD : DB \text{ であるから} \quad \triangle BDE = 2$$



4. $x > 0$ かつ $x \neq 1$ より $\log_3 x = t \dots \textcircled{1}$ とおくと $t \neq 0$ であるから

$$\text{方程式を変形すると} \quad \log_3 x - \frac{\log_3 27}{\log_3 x} = \frac{\log_3 3}{\log_3 9}$$

$$\textcircled{1} \text{ より} \quad t - \frac{3}{t} = \frac{1}{2}$$

$$\text{両辺に } 2t \text{ をかけると} \quad 2t^2 - 6 = t$$

$$\text{すなわち} \quad (t - 2)(2t + 3) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad t = 2, -\frac{3}{2}$$

$\textcircled{1}$ より $x = 3^t$ であるから

$$t = 2 \text{ のとき} \quad x = 3^2 = 9$$

$$t = -\frac{3}{2} \text{ のとき} \quad x = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{したがって} \quad x = 9, \frac{\sqrt{3}}{9}$$

5. (1) 3個のさいころの目の出方は $6 \times 6 \times 6 = 216$ (通り)

出た目の和が偶数となるのは、以下の $27 + 27 + 27 + 27 = 108$ (通り)

(偶数, 偶数, 偶数) のとき $3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

(偶数, 奇数, 奇数) のとき $3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

(奇数, 偶数, 奇数) のとき $3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

(奇数, 奇数, 偶数) のとき $3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

したがって、求める確率は $\frac{108}{216} = \frac{1}{2}$

(2) 3個のさいころの目すべてが6でない確率は $\frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$

求めるのはこの余事象の確率であるから $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

(3) 出た目の和が偶数である事象を A ,
少なくとも1個は6の目が出る事象を B とすると、

(1), (2) の結果から $P(A) = \frac{108}{216}$, $P(B) = \frac{91}{216}$

事象 $A \cap B$ は、以下の $19 + 9 + 9 + 9 = 46$ (通り)

(偶数, 偶数, 偶数) のとき $3^3 - 2^3 = 19$ (通り)

(偶数, 奇数, 奇数) のとき $1 \times 3 \times 3 = 9$ (通り)

(奇数, 偶数, 奇数) のとき $3 \times 1 \times 3 = 9$ (通り)

(奇数, 奇数, 偶数) のとき $3 \times 3 \times 1 = 9$ (通り)

したがって $P(A \cap B) = \frac{46}{216}$

よって、求める確率 $P(A \cup B)$ は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{108}{216} + \frac{91}{216} - \frac{46}{216} \\ &= \frac{153}{216} = \frac{17}{24} \end{aligned}$$

【別解】(3) 出た目の和が奇数である事象を A , 3個の目すべてが6でない事象を B とすると, 求める確率は $P(\overline{A \cup B})$ であるから

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cup B}) &= P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(A \cap B) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

事象 $A \cap B$ であるのは (5以下の目で3つの目の和が奇数), 以下の $27 + 12 + 12 + 12 = 63$ (通り)

(奇数, 奇数, 奇数) のとき $3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

(奇数, 偶数, 偶数) のとき $3 \times 2 \times 2 = 12$ (通り)

(偶数, 奇数, 偶数) のとき $2 \times 3 \times 2 = 12$ (通り)

(偶数, 偶数, 奇数) のとき $2 \times 2 \times 3 = 12$ (通り)

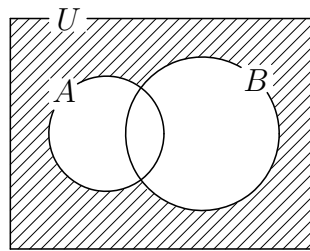
したがって $P(A \cap B) = \frac{63}{6^3} = \frac{7}{24}$

① より求める確率は $1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$

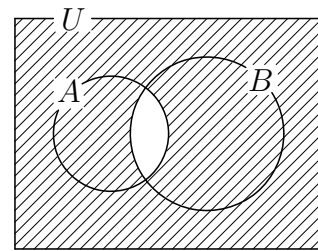
ド・モルガンの法則

1 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



$\overline{A \cup B}$ と $\overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B}$ と $\overline{A} \cup \overline{B}$

6. $2x - y = 2$ から $y = 2x - 2 \quad \dots \textcircled{1}$

① より
$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 &= 2x^2 - (2x - 2)^2 \\ &= -2x^2 + 8x - 4 \\ &= -2(x^2 - 4x) - 4 \\ &= -2\{(x - 2)^2 - 2^2\} - 4 \\ &= -2(x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

したがって, $x = 2$ のとき最大値 4 をとる. このとき ① より $y = 2$ によって, $x = 2, y = 2$ のとき 最大値 4

7. (1) 連立方程式 $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y - 11 = 0 \end{cases}$ を解いて $x = 5, y = -1$

したがって、2直線 l_1, l_2 の交点 P の座標は $(5, -1)$

放物線 $y = x^2 - (a+3)x + a^2 - 5$ は y 軸と $y > 0$ で交わるから

$$x = 0 \text{ のとき } y > 0 \text{ より } a^2 - 5 > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

P は放物線上の点であるから

$$-1 = 5^2 - (a+3) \cdot 5 + a^2 - 5$$

整理して $a^2 - 5a + 6 = 0$

$$(a-2)(a-3) = 0$$

$\textcircled{1}$ に注意して $a = 3$

(2) $f(x) = x^2 - 6x + 4$ とすると $f'(x) = 2x - 6$

$$f'(5) = 2 \times 5 - 6 = 4$$

ゆえに、求める接線の方程式は

$$y - (-1) = 4(x - 5)$$

$$y = 4x - 21$$

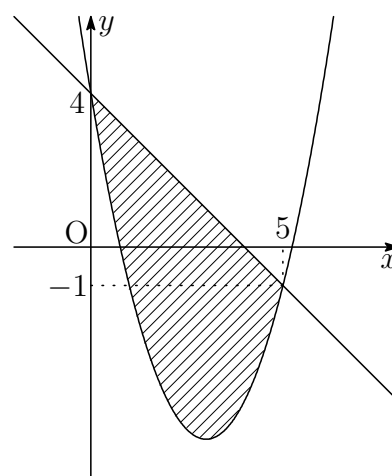
(3) 放物線 $y = x^2 - 6x + 4$ と直線 $y = -x + 4$ の
共有点の x 座標は

$$x^2 - 6x + 4 = -x + 4$$

を解いて $x = 0, 5$

右の図から求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 \{(-x+4) - (x^2-6x+4)\} dx \\ &= \int_0^5 (-x^2+5x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 \right]_0^5 \\ &= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{5}{2} \times 5^2 \right) - 0 \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$



8. $f(x) = 2a \cos^2 x - 6a \sin x \cdot \cos x - 4a \sin^2 x + b \quad (0^\circ \leq x \leq 90^\circ)$

$$\begin{aligned} &= 2a \cos^2 x - 6a \sin x \cdot \cos x - 4a(1 - \cos^2 x) + b \\ &= 6a \cos^2 x - 6a \sin x \cos x - 4a + b \\ &= 3a(2 \cos^2 x - 1) - 3a \cdot 2 \sin x \cos x - a + b \\ &= 3a \cos 2x - 3a \sin 2x - a + b \\ &= 3a(-\sin 2x + \cos 2x) - a + b \\ &= 3a\sqrt{2} \sin(2x + 135^\circ) - a + b \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから

$x = 0^\circ$ で最大値 $2a + b$ をとり,

$x = 67.5^\circ$ で最小値 $-3\sqrt{2}a - a + b$ をとる.

したがって $2a + b = 7$, $-3\sqrt{2}a - a + b = 1 - 6\sqrt{2}$

これを解いて $a = 2$, $b = 3$

1.5.2 A日程2日目 70分

商学部第一部(経営学科) } (A日程)
外国語学部(英米学科) }

平成18年2月10日実施

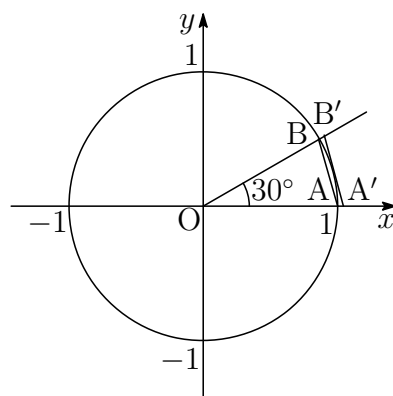
(70分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5. 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ のとき, 次の値を求めよ。
- (1) $a^2 - a$ (2) $2a^4$
2. $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき, 次の値を a, b で表せ。
- (1) $\log_{10} 6^{10}$ (2) $\log_{10} \frac{1}{25}$ (3) $\log_{10}(6!)$
3. 関数 $f(x) = -|2x - 4| + 4$ について, 以下の問に答えよ。
- (1) $f(x) = 0$ のとき, x の値を求めよ。
- (2) $\int_0^6 f(x) dx$ の値を求めよ。
- (3) $y = f(x)$ としたとき, $y \geq 0$ の範囲で $x + 2y$ の最大値と最小値を求めよ。
4. 放物線 $y = x^2 + 1$ の接線 ℓ と x 軸がなす角は正の向きに 30° である。放物線と ℓ の接点の座標および ℓ の式を求めよ。
5. $f(x) = a^x$, $a > 0$ とする。 $f(x+1) = 2f(x)$ が成り立つとき, 以下の問に答えよ。なお $\sqrt{2}$ は, すべて 1.41 という近似値におきかえて計算せよ。
- (1) a の値を求めよ。
- (2) x が 0 から 1 まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ。
- (3) $y = f(x)$ のグラフと, $x = 1$, $x = 1.5$ で交わる直線の式を求めよ。傾きおよび y 切片の値は小数点以下 2 桁まで求めよ。
6. 連立不等式 $|x| \leq 1$, $|2y + x| \leq 2$ によって表される領域を D とする。以下の問に答えよ。
- (1) 原点 $(0, 0)$ を中心にもつ円が D に含まれるとき, その半径が最大である円の方程式を求めよ。
- (2) 原点 $(0, 0)$ を中心にもつ円が D を含むとき, その半径が最小である円の方程式を求めよ。

7. 半径1の円の円周の長さを $2p$ とする。座標平面上で原点 $O(0, 0)$ を中心として半径1の円を描き、右図のように円上に点 A, B をとる。点 A の座標は $(1, 0)$ 、線分 OB と x 軸は正の向きに 30° の角をなす。また、 OA, OB の延長上に、 AB と $A'B'$ が平行かつ $A'B'$ が円に接するよう、右図のように点 A', B' をとる。以下の問に答えよ。



- (1) 弧 AB の長さ (円周上の A から B の長さ) を p で表せ。
 - (2) 線分 $A'B'$ の長さを求めよ。
8. $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする。 a, b, c は $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ から重複を許していずれかの値をとるものとするが、ただし、 a だけは 0 をとらない。以下の問に答えよ。
- (1) $f(x)$ は何通り作ることができるか。
 - (2) $f(0) = 0$ である $f(x)$ は何通り作ることができるか。
 - (3) $x = -1$ で最小値をとる $f(x)$ は何通り作ることができるか。
 - (4) すべての整数 n に対して $f(n)$ の値が偶数である $f(x)$ は何通り作ることができるか。

解答例

1. (1) $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ より

$$\begin{aligned} a^2 - a &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

(2) (1)の結果から $a^2 = a + 1$ であるから

$$\begin{aligned} 2a^4 &= 2(a^2)^2 \\ &= 2(a+1)^2 = 2a^2 + 4a + 2 \\ &= 2(a+1) + 4a + 2 = 6a + 4 \\ &= 6 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 4 = \mathbf{7 + 3\sqrt{5}} \end{aligned}$$

2. (1) $\log_{10} 6^{10} = 10 \log_{10} 6 = 10 \log_{10}(2 \times 3)$

$$= 10(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = \mathbf{10(a + b)}$$

(2) $\log_{10} \frac{1}{25} = \log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 2 \log_{10} \frac{1}{5} = 2 \log_{10} \frac{2}{10}$

$$= 2(\log_{10} 2 - \log_{10} 10) = \mathbf{2(a - 1)}$$

(3) $\log_{10}(6!) = \log_{10} 720 = \log_{10}(2^3 \times 3^2 \times 10)$

$$= 3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 10 = \mathbf{3a + 2b + 1}$$

3. (1) $f(x) = 0$ のとき $-|2x - 4| + 4 = 0$ であるから

$$|2x - 4| = 4$$

したがって $2x - 4 = \pm 4$

$$2x - 4 = 4 \text{ を解いて } x = 4, \quad 2x - 4 = -4 \text{ を解いて } x = 0$$

よって $x = 4, 0$

$$(2) |2x-4| = \begin{cases} -(2x-4) & (x \leq 2) \\ 2x-4 & (x \geq 2) \end{cases} \text{ より } f(x) = \begin{cases} 2x & (x \leq 2) \\ -2x+8 & (x \geq 2) \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \int_0^6 f(x) dx &= \int_0^2 2x dx + \int_2^6 (-2x+8) dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^2 + \left[-x^2 + 8x \right]_2^6 \\ &= 2^2 - 0^2 + (-6^2 + 8 \cdot 6) - (-2^2 + 8 \cdot 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

(3) $y \geq 0$ の範囲では $-|2x - 4| + 4 \geq 0$ であるから

$$|2x - 4| \leq 4$$

$$\text{したがって} \quad -4 \leq 2x - 4 \leq 4$$

$$\text{各辺に } 4 \text{ を加えると} \quad 0 \leq 2x \leq 8$$

$$\text{各辺を } 2 \text{ で割ると} \quad 0 \leq x \leq 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$y = f(x)$ および ① から

$$x + 2y = \begin{cases} 5x & (x \leq 2) \\ -3x + 16 & (x \geq 2) \end{cases}$$

したがって, ② の値の範囲において, $x + 2y$ は

$$x = 2 \text{ で最大値 } 10 \text{ をとり,}$$

$$x = 0 \text{ で最小値 } 0 \text{ をとる.}$$

よって, 最大値 10, 最小値 0

4. $y = x^2 + 1$ を微分すると $y' = 2x$

接点の座標を $(a, a^2 + 1)$ とすると, 接線の傾きは $2a$ となる.

接線 ℓ の傾きは $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$2a = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{を解いて} \quad a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

このとき $a^2 + 1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{13}{12}$

したがって, 接点の座標は $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{13}{12}\right)$

接線 ℓ の方程式は

$$y - \frac{13}{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{11}{12}$$

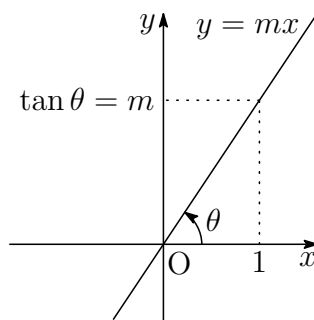
直線の傾き m と x 軸の正の部分となす角 θ

右の図のように, x 軸の正の部分から直線 $y = mx$ まで測った角を θ とすると

$$\tan \theta = \frac{m}{1} = m$$

一般に, 直線 $y = mx + n$ の x 軸の正の部分となす角が θ であるとき

$$m = \tan \theta$$



5. (1) $f(x+1) = 2f(x)$ より $a^{x+1} = 2a^x$
 $a^{x+1} = a^x \cdot a$ であるから $a^x \cdot a = 2a^x$
 両辺を $a^x (\neq 0)$ で割って $a = 2$

(2) x が 0 から 1 まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2^1 - 2^0}{1} = 2 - 1 = 1$$

(3) 求める直線は, 2点 $(1, 2^1)$, $(1.5, 2^{1.5})$ を通る直線であるから

$$y - 2^1 = \frac{2^{1.5} - 2^1}{1.5 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = \frac{2\sqrt{2} - 2}{0.5}(x - 1)$$

$$y - 2 = 4(\sqrt{2} - 1)(x - 1)$$

$$\sqrt{2} = 1.41 \text{ より } y - 2 = 1.64(x - 1)$$

$$y = 1.64x + 0.36$$

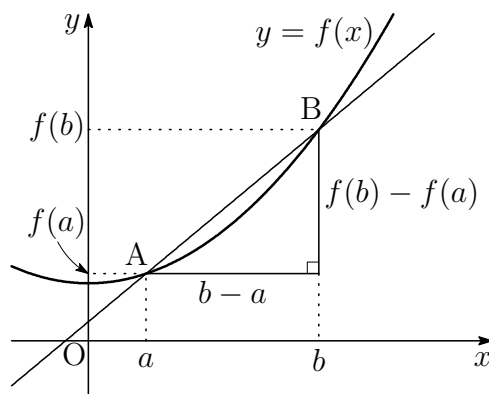
平均変化率

関数 $y = f(x)$ において, x の値が a から b まで変化するとき,

$$\frac{y \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

である. この値を, $x = a$ から $x = b$ までの, $f(x)$ の平均変化率という.

この平均変化率は, 右の図で直線 AB の傾きを表している.



6. $|x| \leq 1$ から $-1 \leq x \leq 1$

$|2y + x| \leq 2$ から $-2 \leq 2y + x \leq 2$ すなわち $-\frac{x}{2} - 1 \leq y \leq -\frac{x}{2} + 1$

したがって、領域 D は、4本の直線

$$x = 1, x = -1, x + 2y + 2 = 0, x + 2y - 2 = 0$$

によって囲まれた部分であるから、 D は4点

$$\left(1, -\frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{3}{2}\right), \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

を結ぶ四角形の内部および周である。

(1) 原点から直線 $x = 1$ および直線 $x = -1$ までの距離はともに 1

原点から直線 $x + 2y + 2 = 0$ までの距離は

$$\frac{|2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

原点から直線 $x + 2y - 2 = 0$ までの距離は

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ であるから、右の図からわかるように求める円の半径は $\frac{2}{\sqrt{5}}$

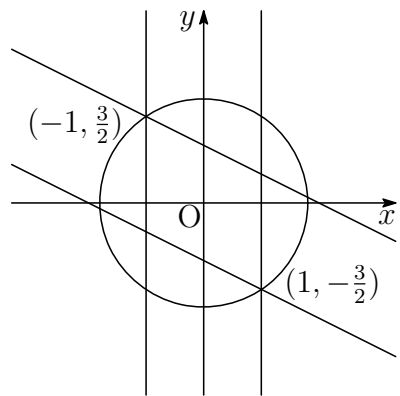
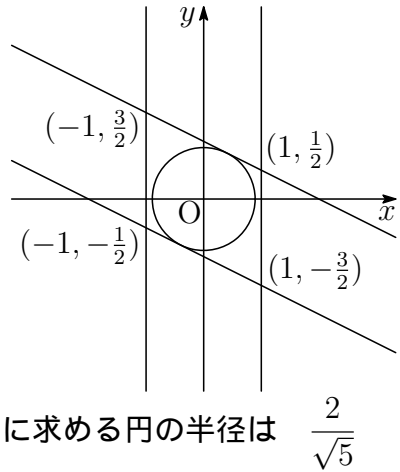
したがって、求める円の方程式は $x^2 + y^2 = \frac{4}{5}$

(2) 求める円の半径は、右の図からわかるように2点 $(1, -\frac{3}{2})$ および点 $(-1, \frac{3}{2})$ を通るとき最小となる。したがって、求める半径は

$$\sqrt{1^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

したがって、求める円の方程式は

$$x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$$



点と直線の距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

7. (1) 円周の長さ $2p$ の円 O において, 中心角 30° に対する円弧の長さであるから

$$2p \times \frac{30}{360} = \frac{p}{6}$$

(2) $OA = OB$ より $\angle OAB = \angle OBA = 75^\circ$

$A'B' // AB$ より $\angle OB'A' = \angle OBA$ であるから $\angle OB'A' = 75^\circ$

$\angle OA'B' = \angle OAB$ であるから $\angle OA'B' = 75^\circ$

円 O と線分 $A'B'$ の接点を M とすると, $OM \perp A'B'$ であるから

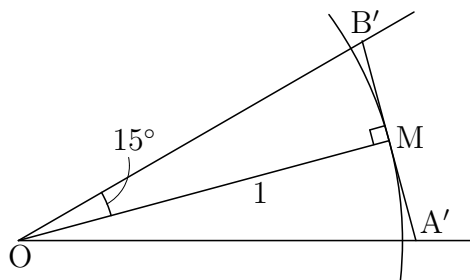
$$\angle A'OM = \angle B'OM = 15^\circ \quad \text{これから} \quad MA' = MB'$$

したがって $A'B' = 2MB' \quad \dots \textcircled{1}$

$MB' = OM \tan 15^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} MB' &= 1 \times \tan 15^\circ \\ &= \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ から $A'B' = 2 \times (2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$



8. (1) a は 0 以外の 1 から 9 の 9 通り, b, c はともに 0 から 9 の 10 通りの選び方であるから

$$9 \times 10 \times 10 = 900 \text{ (通り)}$$

- (2) $f(0) = c$ であるから $c = 0$ となる. よって, a は 0 以外の 1 から 9 の 9 通り, b は 0 から 9 の 10 通り, c は 0 の 1 通りの選び方であるから

$$9 \times 10 \times 1 = 90 \text{ (通り)}$$

- (3) $a > 0$ のとき, $f(x) = ax^2 + bx + c$ は $x = -\frac{b}{2a}$ で最小となるので

$$-\frac{b}{2a} = -1 \quad \text{これから} \quad b = 2a$$

これを満たす a, b の組は,

$$(a, b) = (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)$$

の 4 通りであり, c は 0 から 9 の 10 通りであるから

$$4 \times 10 = 40 \text{ (通り)}$$

- (4) $f(n) = an^2 + bn + c$ の右辺は $an(n+1) + (b-a)n + c$ と変形できる.

このとき, $an(n+1)$ は偶数であるから, $f(n)$ が偶数であるとき $b-a, c$ がともに偶数であればよい.

したがって $(a, b) = (\text{偶数}, \text{偶数})$ のとき $4 \times 5 = 20$ (通り)

$(a, b) = (\text{奇数}, \text{奇数})$ のとき $5 \times 5 = 25$ (通り)

$b-a$ が偶数であるのは, $20 + 25 = 45$ (通り) であり, それぞれに対する c の選び方が 5 通りであるから

$$45 \times 5 = 225 \text{ (通り)}$$

1.5.3 A日程3日目 70分

商学部第一部(商学 科) }
経済学部(国際経済学科) } (A日程)
社会福祉学部第一部(子ども家庭福祉学科) }

平成18年2月11日実施

(70分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で7題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5. 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. $a + b = x$, $ab = y$ とおくととき, 次の式を x と y で表せ。ただし, $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。

$$(1) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$(2) a^4 + a^2b^2 + b^4$$

2. 以下の方程式を解け。

$$(1) 4^{x-\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -3$$

$$(3) \log_4(2x^2 - 8x - 6) = \log_2(x-1)$$

3. 次の定積分 I の値を求めよ。

$$I = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$$

4. 辺の長さが $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 4$ の $\triangle ABC$ において, $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D , 頂点 A から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を E とする。このとき, 以下の問に答えよ。

$$(1) \triangle ABD \text{ と } \triangle ACD \text{ の面積の比を求めよ。}$$

$$(2) \text{線分 } DE \text{ の長さを求めよ。}$$

$$(3) \triangle ADE \text{ の面積を求めよ。}$$

5. 3点 $A(1, 2)$, $B(1, -3)$, $C(3, 1)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の外接円の中心の座標と半径を求めよ。

6. 角 θ が $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲にあるとき, $f(\theta)$ と $g(\theta)$ のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。

$$(1) f(\theta) = 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 2$$

$$(2) g(\theta) = 4 \sin \theta + 4\sqrt{3} \cos \theta - 2$$

7. 1から4のいずれかの数字が書かれているボールが10個、箱に入っている。数字1のボールは1個、数字2のボールは2個、数字3のボールは3個、数字4のボールは4個である。いま、ボールを1個取り出し、数字を確かめた後、もとに戻す。これを4回繰り返すとき、以下の確率を求めよ。
- (1) 数字1のボールを、4回取り出す確率。
 - (2) 数字3のボールをちょうど2回取り出す確率。
 - (3) 取り出したボールの数字の合計が5になる確率。

解答例

$$1. (1) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{(ab)^2} = \frac{x^2 - 2y}{y^2}$$

$$(2) a^4 + a^2 b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - a^2 b^2 = \{(a+b)^2 - 2ab\}^2 - (ab)^2 \\ = (x^2 - 2y)^2 - y^2 = x^4 - 4x^2 y + 3y^2$$

$$2. (1) 4^{x-\frac{1}{2}} = 2^{2(x-\frac{1}{2})} = 2^{2x} \cdot 2^{-1} = (2^x)^2 \times \frac{1}{2} \text{ であるから, 方程式は}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$2 \text{ をかけて } (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$\text{ゆえに } (2^x - 2)(2^x - 4) = 0$$

$$\text{よって } 2^x - 2 = 0 \text{ または } 2^x - 4 = 0$$

$$2^x = 2 \text{ を解いて } x = 1$$

$$2^x = 4 \text{ を解いて } x = 2$$

したがって, 求める解は $x = 1, 2$

$$(2) \text{ 真数は正であるから } x - 3 > 0 \text{ かつ } x - 1 > 0$$

$$\text{すなわち } x > 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{方程式を変形すると } \log_{\frac{1}{2}}(x-3)(x-1) = -3$$

$$\text{よって } (x-3)(x-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 8$$

$$\text{したがって } (x+1)(x-5) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ に注意して } x = 5$$

$$(3) \text{ 真数は正であるから } 2x^2 - 8x - 6 > 0 \text{ かつ } x - 1 > 0$$

$$\text{すなわち } x > 2 + \sqrt{7} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\log_4(2x^2 - 8x - 6) = \frac{1}{2} \log_2(2x^2 - 8x - 6) \text{ であるから, 方程式は}$$

$$\frac{1}{2} \log_2(2x^2 - 8x - 6) = \log_2(x-1)$$

$$2 \text{ をかけて } \log_2(2x^2 - 8x - 6) = 2 \log_2(x-1)$$

$$\text{よって } 2x^2 - 8x - 6 = (x-1)^2$$

$$\text{整理して } x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\text{したがって } (x+1)(x-7) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ に注意して } x = 7$$

3. $1 \leq x \leq 2$ のとき $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \leq 0$ であるから

$$|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_1^2 \{-(x^2 - 3x + 2)\} dx \\ &= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

重要な定積分

α, β を実数とする.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

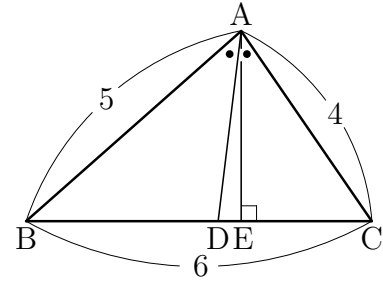
[証明]
$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx - (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\beta} x dx + \alpha\beta \int_{\alpha}^{\beta} dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)\{2(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) - 3(\beta + \alpha)^2 + 6\alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)(-\beta^2 + 2\beta\alpha - \alpha^2) = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

[証終]

【3. の別解】 $\int_1^2 (x - 1)(x - 2) dx = -\frac{1}{6}(2 - 1)^3 = -\frac{1}{6}$ であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = -\int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \\ &= -\int_1^2 (x - 1)(x - 2) dx = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

4. (1) $\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AE,$
 $\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot AE$
 したがって, $\triangle ABD : \triangle ACD = BD : DC$
 AD は角 A の二等分線であるから
 $BD : DC = AB : AC = 5 : 4$
 よって, $\triangle ABD : \triangle ACD = 5 : 4$



(2) $BD : DC = 5 : 4$ であるから

$$BD = BC \times \frac{5}{5+4} = 6 \times \frac{5}{9} = \frac{10}{3}$$

$\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

$BE = AB \cos B$ であるから

$$BE = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

したがって $DE = BE - BD = \frac{15}{4} - \frac{10}{3} = \frac{5}{12}$

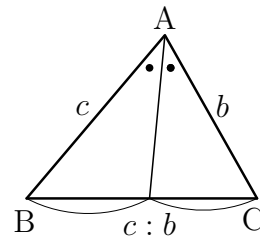
(3) $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$ であるから $\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$AE = AB \sin B$ であるから $AE = 5 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$

したがって $\triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot AE = \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} \times \frac{5\sqrt{7}}{4} = \frac{25\sqrt{7}}{96}$

三角形の角の二等分線と比

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点は、
 辺 BC を $AB : AC$ に内分する。



5. 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする .

点 A を通るから $1^2 + 2^2 + l + 2m + n = 0$

点 B を通るから $1^2 + (-3)^2 + l - 3m + n = 0$

点 C を通るから $3^2 + 1^2 + 3l + m + n = 0$

整理すると $l + 2m + n + 5 = 0$

$$l - 3m + n + 10 = 0$$

$$3l + m + n + 10 = 0$$

これを解くと $l = -2, m = 1, n = -5$

よって, 求める円の方程式は $x^2 + y^2 - 2x + y - 5 = 0$

方程式を変形すると

$$(x^2 - 2x + 1) + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = 5 + 1 + \frac{1}{4}$$

すなわち $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

これは, 中心が $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ で, 半径が $\frac{5}{2}$ の円である .

6. (1) $f(\theta) = 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 2$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} & 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 2 \\ &= 4(1 - \sin^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 2 \\ &= -2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 2 \\ &= -2(\sin^2 \theta - \sin \theta) + 2 \\ &= -2 \left\{ \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} + 2 \\ &= -2 \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より $0 \leq \sin \theta \leq 1$ であるから, $f(\theta)$ は

最大値 $\frac{5}{2}$ ($\theta = 30^\circ$), 最小値 2 ($\theta = 0^\circ, 90^\circ$)

をとる .

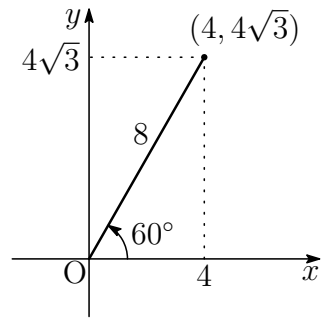
(2) $4 \sin \theta + 4\sqrt{3} \cos \theta = 8 \sin(\theta + 60^\circ)$ より

$$g(\theta) = 8 \sin(\theta + 60^\circ) - 2 \quad (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$$

であるから, $g(\theta)$ は

最大値 6 ($\theta = 30^\circ$), 最小値 2 ($\theta = 90^\circ$)

をとる.



7. (1) ボールを 1 回取り出すとき, 数字 1 のボールを取り出す確率は $\frac{1}{10}$
 この試行を 4 回行って, 数字 1 のボールが 4 回とも出る確率は

$$\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10000}$$

(2) ボールを 1 回取り出すとき, 数字 3 のボールを取り出す確率は $\frac{3}{10}$
 この試行を 4 回行って, 数字 3 のボールがちょうど 2 回出る確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{4-2} = 6 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{1323}{5000}$$

(3) 取り出した数字の合計が 5 になるのは, 次の ① から ④ の場合である.

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目
①	2	1	1	1
②	1	2	1	1
③	1	1	2	1
④	1	1	1	2

① から ④ のどの確率も $\frac{2}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{5000}$

したがって, 求める確率は $4 \times \frac{1}{5000} = \frac{1}{1250}$

反復試行の確率

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする. この試行を n 回行う反復試行で, A がちょうど r 回起こる確率は ${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$

← A が r 回起こり, \bar{A} が $(n-r)$ 回起こる確率

1.5.4 A日程4日目 70分

商学部第一部
 (ホスピタリティ・マネジメント学科)
経済学部(経済学科)
社会福祉学部第一部(福祉環境学科)

} (A日程)

平成18年2月12日実施

(70分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5. 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 次の式を簡単にせよ。

$$(1) 1 - \log_5 \left(\frac{1}{125} \times \frac{1}{25} \right)$$

$$(2) \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$$

2. 以下の条件(ア), (イ)のそれぞれにおいて, 2つの数 $A = a + \frac{1}{2a}$, $B = \sqrt{a^2 + 1}$ の大小関係を調べよ。解答欄には不等号もしくは等号を記入せよ。

(ア) $a < 0$ のとき

(イ) $a > 0$ のとき

3. 連立不等式

$$\begin{cases} y \geq |x - 1| + |x - 2| \\ y \leq 3 \end{cases}$$

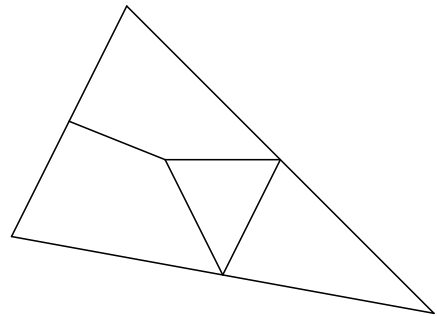
の表す領域の面積を求めよ。

4. 全体集合 U を $U = \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 以上で } 30 \text{ 以下の整数}\}$ とし, その部分集合として $P = \{x \mid x \text{ は偶数}, x \in U\}$, $Q = \{x \mid x \text{ は素数}, x \in U\}$, そして $R = \{x \mid x \text{ は } 2 \text{ つの相異なる素数の和}, x \in U\}$ を考えるとき, 以下の集合を要素を書き並べて表せ。

$$(1) P \cap Q$$

$$(2) Q \cap R$$

5. 異なる4色がある。このうちの何色かを用いて右の図形の4つの領域を塗り分けるとき, 塗り分け方は何通りあるか。ただし, 2つの領域が線分をはさんで隣接する場合は, 各々を異なる色で塗り分けること。



6. 2つの $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ がある。 $\triangle ABC$ については $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle A = A$, $\angle B = B$, $\angle C = C$ とし, 同様に $\triangle A'B'C'$ については $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$, $\angle A' = A'$, $\angle B' = B'$, $\angle C' = C'$ とする。いま, 2つの三角形について以下の(i)~(iii)が成立するものとする。

(i) $b = c$, $b' = c'$

(ii) $b' = b$

(iii) $A' = 2A$

このとき, 以下の問に答えよ。

(1) A' と B' の関係から $\sin B'$ を $\cos A$ で表せ。また, a' を $\sin A$ と b で表せ。

(2) a^2 を b^2 と $\cos A$ で表せ。

(3) $\triangle A'B'C'$ の面積を S' , $\triangle ABC$ の面積を S としたとき, $\frac{S'}{S}$ を $\cos A$ で表せ。

7. 3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)が以下の条件を満たすとき, 定数 a , b , c , d の値を求めよ。

(i) 2次関数 $g(x) = -2x^2 - 4x - 5$ に対して, $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$ が成立する。ただし, $f'(x)$, $g'(x)$ はそれぞれ $f(x)$, $g(x)$ の導関数である。

(ii) $y = f'(x)$ のグラフは $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{25}{6}\right)$ に頂点をもつ。

8. 2つの曲線 $y = x^3 + 2x^2 - x + 2$ と $y = x^3 + x^2 + 3x - 2$ および2つの直線 $x = t$ と $x = t + 1$ で囲まれた図形の面積を S とする。このとき, 以下の問に答えよ。

(1) S を t の関数として求めると $S(t) = at^2 + bt + c$ の形で表すことができる。定数 a , b , c の値を求めよ。

(2) $S(t)$ の最小値と, そのときの t の値を求めよ。

解答例

$$1. (1) 1 - \log_5 \left(\frac{1}{125} \times \frac{1}{25} \right) = 1 - \log_5 (5^{-3} \times 5^{-2}) = 1 - \log_5 5^{-5} \\ = 1 - (-5) \log_5 5 = 1 + 5 = 6$$

$$(2) \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = \frac{\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{-1}} = \frac{\frac{3}{2}}{-1} = -\frac{3}{2}$$

2. (ア) $a < 0$ のとき

$$A = a + \frac{1}{2a} < 0, B = \sqrt{a^2 + 1} > 0 \text{ であるから } A < B$$

(イ) $a > 0$ のとき

$$A^2 - B^2 = \left(a + \frac{1}{2a} \right)^2 - \left(\sqrt{1 + a^2} \right)^2 \\ = \left(a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2} \right) - (1 + a^2) \\ = \frac{1}{4a^2} > 0$$

よって $A^2 > B^2$

$$A = a + \frac{1}{2a} > 0, B = \sqrt{1 + a^2} > 0 \text{ であるから } A > B$$

$$3. |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & (x \geq 1) \\ -(x - 1) & (x < 1) \end{cases}, |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2) \\ -(x - 2) & (x < 2) \end{cases} \text{ であるから}$$

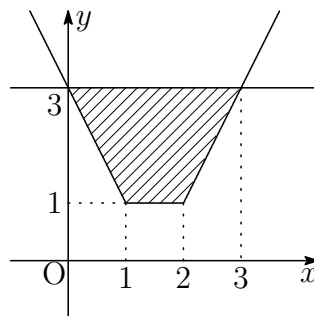
$$x < 1 \text{ のとき } |x - 1| + |x - 2| = -(x - 1) + \{-(x - 2)\} = -2x + 3$$

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき } |x - 1| + |x - 2| = x - 1 + \{-(x - 2)\} = 1$$

$$2 \leq x \text{ のとき } |x - 1| + |x - 2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

不等式の表す領域は、右の図の斜線部分であり、求める領域の面積は

$$\frac{1}{2} \times (1 + 3) \times 2 = 4$$

4. (1) $P \cap Q = \{2\}$,(2) $5 = 3 + 2, 7 = 5 + 2, 13 = 11 + 2, 19 = 17 + 2$ であるから

$$Q \cap R = \{5, 7, 13, 19\}$$

5. 右の図の A, B, C の3つの領域は互いに隣接しているので、4つの領域 A, B, C, D を塗り分けるとき、3色以上用いることになる。

4色用いる場合

A, B, C, D の4つの領域に異なる4色を塗り分ける方法であるから

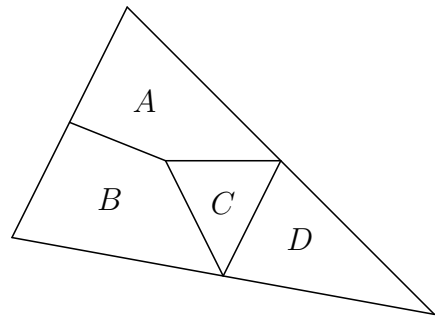
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ (通り)}$$

3色用いる場合

4色の中から A, B, C の3つの領域に異なる3色を塗り分けて、 D は A または B と同色にする方法であるから

$${}_4P_3 \times 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \times 2 = 48 \text{ (通り)}$$

したがって $24 + 48 = 72$ (通り)



6. (1) $b' = c'$ より $C' = B', A' = 2A$

これらを $A' + B' + C' = 180^\circ$ に代入して $2A + 2B' = 180^\circ$

したがって $B' = 90^\circ - A$

よって $\sin B' = \sin(90^\circ - A) = \cos A \quad \dots \textcircled{1}$

$\triangle A'B'C'$ に正弦定理を用いて $\frac{a'}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B'}$

これに $A' = 2A, b' = b$ および $\textcircled{1}$ を代入して

$$\frac{a'}{\sin 2A} = \frac{b}{\cos A}$$

したがって $a' = \frac{b \sin 2A}{\cos A} = \frac{b \cdot 2 \sin A \cos A}{\cos A} = 2b \sin A$

- (2) 余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ に $c = b$ を代入して $a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos A$

- (3) $S = \frac{1}{2}bc \sin A, S' = \frac{1}{2}b'c' \sin A'$

これに $c = b, b' = c' = b, A' = 2A$ を代入すると

$$S = \frac{1}{2}b^2 \sin A, \quad S' = \frac{1}{2}b^2 \sin 2A$$

したがって $\frac{S'}{S} = \frac{\frac{1}{2}b^2 \sin 2A}{\frac{1}{2}b^2 \sin A} = \frac{\sin 2A}{\sin A} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A} = 2 \cos A$

7. $g(x) = -2x^2 - 4x - 5$ より $g(0) = -5$

$g'(x) = -4x - 4$ より $g'(0) = -4$

(i) の条件より $f(0) = -5$, $f'(0) = -4$ であるから

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{より} \quad f(0) = d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{より} \quad f'(0) = c$$

したがって $c = -4$, $d = -5$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 4$

$y = 3ax^2 + 2bx - 4$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} 3ax^2 + 2bx - 4 &= 3a \left(x^2 + \frac{2b}{3a}x \right) - 4 \\ &= 3a \left\{ \left(x + \frac{b}{3a} \right)^2 - \left(\frac{b}{3a} \right)^2 \right\} - 4 \\ &= 3a \left(x + \frac{b}{3a} \right)^2 - 3a \left(\frac{b}{3a} \right)^2 - 4 \end{aligned}$$

$y = 3ax^2 + 2bx - 4$ の頂点の座標は $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{25}{6} \right)$ であるから

$$-\frac{b}{3a} = -\frac{1}{6}, \quad -3a \left(\frac{b}{3a} \right)^2 - 4 = -\frac{25}{6}$$

したがって $\frac{b}{3a} = \frac{1}{6}, \quad 3a \left(\frac{b}{3a} \right)^2 = \frac{1}{6}$

これを解いて $a = 2, b = 1$ (答) $a = 2, b = 1, c = -4, d = -5$

8. (1) $(x^3 + 2x^2 - x + 2) - (x^3 + x^2 + 3x - 2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned}
 S &= \int_t^{t+1} (x^2 - 4x + 4) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_t^{t+1} \\
 &= \frac{1}{3} \left[x^3 \right]_t^{t+1} - 2 \left[x^2 \right]_t^{t+1} + 4 \left[x \right]_t^{t+1} \\
 &= \frac{1}{3} \{(t+1)^3 - t^3\} - 2\{(t+1)^2 - t^2\} + 4\{(t+1) - t\} \\
 &= \frac{1}{3}(3t^2 + 3t + 1) - 2(2t + 1) + 4 \cdot 1 \\
 &= t^2 - 3t + \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

したがって $S(t) = t^2 - 3t + \frac{7}{3}$ すなわち $a = 1, b = -3, c = \frac{7}{3}$

- (2) $S(t) = t^2 - 3t + \frac{7}{3}$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}
 t^2 - 3t + \frac{7}{3} &= (t^2 - 3t) + \frac{7}{3} \\
 &= \left\{ \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right\} + \frac{7}{3} \\
 &= \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

したがって, $S(t)$ は $t = \frac{3}{2}$ で最小値 $\frac{1}{12}$ をとる.

1.5.5 A日程5日目 70分

経済学部
(リーガルエコノミクス学科)
外国語学部(東アジア学科)
社会福祉学部第一部(社会福祉学科) } (A日程)

平成18年2月13日実施

(70分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5. 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. $x = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ のとき, 次の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2$ (2) $x^4 - x^2y^2 + y^4$

2. (1) から (3) のそれぞれについて, 値が大きいのはどちらか, a または b で答えよ。

(1) $a = 8^{\frac{1}{6}}$, $b = 64^{\frac{1}{10}}$

(2) $a = \sqrt[3]{3}$, $b = 3\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

(3) $a = \log_3 5$, $b = \frac{5}{3}$

3. 2次方程式 $x^2 + 5x + k = 0$ の2つの解の比が $2:3$ となるような k の値を求めよ。

4. 長さが $1, 3, 5, 6, 8$ の棒がそれぞれ1本ずつある。いま棒1本を1辺として三角形を作る場合, 以下の間に答えよ。

(1) 三角形を作ることができる棒の選び方は何通りあるか。

(2) 無作為に3本の棒を選んだとき, 三角形を作ることができる確率を求めよ。

5. $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ の α と β に対して

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \beta = 1 \\ \cos \alpha + \sin \beta = \sqrt{3} \end{cases}$$

が成立するとき, $\alpha + \beta$ の値を求めよ。

6. 関数 $f(x) = ax^3 - bx$ (ただし, $a > 0$, $b > 0$) が極大値 $\frac{2}{3}$ をとる。このとき以下の間に答えよ。

(1) 定数 a の値を b を用いて表せ。

(2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を b を用いて表せ。

7. 以下の問に答えよ。

- (1) 点 $(5, -3)$ を通り, 直線 $l_1 : 2x - y - 8 = 0$ に垂直に交わる直線 l_2 の方程式を求めよ。
- (2) l_1 と l_2 の交点を中心とする, 半径 $2\sqrt{2}$ の円 C の方程式を求めよ。
- (3) 円 C と x 軸の2つの交点 P_1, P_2 の座標を求めよ。ただし x 座標の大きい方を P_2 とする。
- (4) 円 C の中心と P_1, P_2 の3点を通る放物線の方程式を $y = ax^2 + bx + c$ としたとき, a, b, c の値を求めよ。
- (5) (4) で求めた放物線と x 軸で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

8. x, y が $2x + y = 1$ および $x \geq 0, y \geq 0$ を満たすとき, xy の最大値と最小値を求めよ。

解答例

$$1. (1) x + y = \frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1) + 2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4\sqrt{3}}{3-1} = 2\sqrt{3}$$

$$xy = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \times \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2 \times 2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4}{3-1} = 2$$

$$\text{したがって } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 = 8$$

(2) (1)の結果から

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 3(xy)^2 = 8^2 - 3 \times 2^2 = 52$$

$$2. (1) a = 8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}, b = 64^{\frac{1}{10}} = (2^6)^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{3}{5}}$$

$$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{5}} \text{ であるから } a < b \text{ (答) } b$$

$$(2) a = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}, b = 3\sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{3}} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$$

$$3^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{3}{4}} \text{ であるから } a < b \text{ (答) } b$$

$$(3) a = \log_3 5 = \frac{1}{3} \log_3 5^3 = \frac{1}{3} \log_3 125$$

$$b = \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \log_3 3 = \frac{1}{3} \log_3 3^5 = \frac{1}{3} \log_3 243$$

$$\frac{1}{3} \log_3 125 < \frac{1}{3} \log_3 243 \text{ であるから } a < b \text{ (答) } b$$

3. 2つの解は $2\alpha, 3\alpha$ と表すことができる.

$$\text{解と係数の関係から } 2\alpha + 3\alpha = -5, \quad 2\alpha \cdot 3\alpha = k$$

$$\text{すなわち } 5\alpha = -5, \quad 6\alpha^2 = k$$

$$\text{よって } \alpha = -1, \quad k = 6(-1)^2 = 6$$

4. (1) 三角形を作ることができるのは, 次の3通りである.

$$\{3, 5, 6\}, \{3, 6, 8\}, \{5, 6, 8\}$$

(2) (1)の結果から, 求める確率は

$$\frac{3}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$$

三角形の存在

また, 正の数 a, b, c を3辺の長さとする三角形が存在するための必要十分条件は, 次の不等式が成り立つことである.

$$|b - c| < a < b + c$$

← $|A|$ は A の絶対値を表す

とくに a が最大辺のときは $a < b + c$ が成り立つことである.

5. $\sin \alpha + \cos \beta = 1$, $\cos \alpha + \sin \beta = \sqrt{3}$ から

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + \cos \beta)^2 + (\cos \alpha + \sin \beta)^2 &= 1^2 + (\sqrt{3})^2 \\ (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) &= 4 \\ 2 + 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) &= 4 \\ 2 + 2 \sin(\alpha + \beta) &= 4 \\ \sin(\alpha + \beta) &= 1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ より $0^\circ \leq \alpha + \beta \leq 180^\circ$ であるから, $\textcircled{1}$ より

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

6. (1) $f'(x) = 3ax^2 - b$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \pm \sqrt{\frac{b}{3a}}$
 $f(x)$ の増減表は, 右のようになる.

x	...	$-\sqrt{\frac{b}{3a}}$...	$\sqrt{\frac{b}{3a}}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	極大	\searrow	極小	\nearrow

極大値 $f\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)$ は

$$\begin{aligned} f\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= a\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^3 - b\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) \\ &= a\left(-\frac{b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) + b\sqrt{\frac{b}{3a}} \\ &= \frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3}{3a}} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3}{3a}} = \frac{2}{3} \quad \text{であるから} \quad \frac{b^3}{3a} = 1 \quad \text{したがって} \quad a = \frac{b^3}{3}$$

(2) $x = -\sqrt{\frac{b}{3a}}$ で極大となる. これに (1) の結果を代入して

$$x = -\sqrt{\frac{b}{3a}} = -\sqrt{\frac{b}{b^3}} = -\sqrt{\frac{1}{b^2}} = -\frac{1}{b}$$

7. (1) l_1 の傾きは 2, l_2 の傾きを m とすると

$$2m = -1 \quad \text{から} \quad m = -\frac{1}{2}$$

よって, l_2 は点 $(5, -3)$ を通り, 傾き $-\frac{1}{2}$ の直線であるから

$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 5) \quad \text{すなわち} \quad x + 2y + 1 = 0$$

$$(2) \text{ 連立方程式 } \begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{を解いて} \quad x = 3, y = -2$$

したがって, l_1 と l_2 の交点の座標は $(3, -2)$

よって, C は中心が $(3, -2)$ で半径 $2\sqrt{2}$ の円であるから

$$(x-3)^2 + \{y-(-2)\}^2 = (2\sqrt{2})^2 \quad \text{すなわち} \quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$$

(3) 円 C の方程式で, $y = 0$ とすると

$$(x-3)^2 + (0+2)^2 = 8$$

$$\text{すなわち} \quad (x-3)^2 = 4$$

$$\text{したがって} \quad x = 5, 1$$

よって $P_1(1, 0), P_2(5, 0)$

(4) $P_1(1, 0), P_2(5, 0)$ を通る放物線の方程式を

$$y = a(x-1)(x-5)$$

とおく. さらにこの放物線は点 $(3, -2)$ を通るので

$$-2 = a(3-1)(3-5) \quad \text{これから} \quad a = \frac{1}{2}$$

よって, 求める放物線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(x-1)(x-5) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

$$\text{(答)} \quad a = \frac{1}{2}, b = -3, c = \frac{5}{2}$$

(5) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ は $1 \leq x \leq 5$ において, $y \leq 0$ であるから, 求める面積 S は

$$S = \int_1^5 \left\{ - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} \right) \right\} dx = \frac{16}{3}$$

2次関数の主な表し方

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1 一般形 | $y = ax^2 + bx + c$ |
| 2 頂点が (p, q) のとき | $y = a(x - p)^2 + q$ |
| 3 x 軸と $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ で交わるとき | $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ |

[注意] 2, 3 の 2 次関数を展開し, 一般形で表してわかるように x^2 の係数 a は等しい値である.

【7.(4) の解説】 求める放物線は x 軸と $(1, 0), (5, 0)$ で交わるから上の 3 の表し方により, 求める放物線の方程式を $y = a(x - 1)(x - 5)$ とおくことができる.

【7.(5) の別解】 $\int_1^5 (x - 1)(x - 5) dx = -\frac{1}{6}(5 - 1)^3 = -\frac{32}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left\{ -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 5) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^5 (x - 1)(x - 5) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{32}{3} \right) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

8. $2x + y = 1$ より $y = 1 - 2x$ …①

このとき $x \geq 0$ かつ $1 - 2x \geq 0$ すなわち $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ …②

① より $xy = x(1 - 2x)$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} x(1 - 2x) &= -2x^2 + x = -2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x \right) \\ &= -2 \left\{ \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right\} = -2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

② の値の範囲において xy は $x = \frac{1}{4}$ で最大値 $\frac{1}{8}$, $x = 0, \frac{1}{2}$ で最小値 0 をとる.

したがって, ① より $(x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$ で最大値 $\frac{1}{8}$

$(x, y) = (0, 1), \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ で最小値 0

1.6 熊本保健科学大学

1.6.1 一般推薦

3 次の各問いの空欄に当てはまるものを下の①～④の中から一つ選び、ア、イ、ウ、…で示された解答欄に記入しなさい。

問1 $x = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ のとき, $x^2 + y^2 =$ である。

① $2\sqrt{3}$

② $22 - 4\sqrt{2}$

③ 22

④ $22 + 4\sqrt{2}$

問2 $|x - 3| < 2$ を解くと である。

① $x < 1, x > 5$

② $1 < x < 5$

③ $x < -1, x > 1$

④ $-1 < x < 1$

問3 2次方程式 $6x^2 + 5x - 4 = 0$ を解くと である。

① $x = -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$

② $x = -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

③ $x = \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$

④ $x = \frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

問4 放物線 $y = -x^2 + 2x - 4$ の頂点は、点 である。

① $(-1, -3)$

② $(-1, 3)$

③ $(1, -3)$

④ $(1, 3)$

- 4 次の各問いの空欄に当てはまるものを答えなさい。なお，問題文中の ， などには，数字 (0~9)，または符号 (-) が入り，ア，イ，ウ，… の一つ一つには，これらのいずれか一つが対応する。それらを，ア，イ，ウ，… で示された解答欄に記入しなさい。

また，分数形で解答が求められる場合には，既約分数で答えなさい。

例： $\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$ に $\frac{23}{7}$ と答えたいときは，アに「2」，イに「3」，ウに「7」を記入する。

例： $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは， $-\frac{4}{5}$ として，エに「-」，オに「4」，カに「5」を記入する。 符号は分子につけ，分母につけてはならない。

- 問1 a を定数とする。2次方程式 $x^2 + (2a + 2)x + (1 - 3a) = 0$ が重解をもつ。このとき $a = \text{アイ}$ のとき，重解は $x = \text{ウ}$ であり， $a = \text{エ}$ のとき，重解は $x = \text{オカ}$ である。

- 問2 a を正の定数とする。2次関数 $y = ax^2 - 6ax + a^2 + 9a - 5$ がある。 $1 \leq x \leq 6$ におけるこの関数の最小値が -1 であるとき， $a = \text{キ}$ である。

問3 a を定数とする。放物線 $y = 2x^2 + (3a - 1)x + a^2 + 1$ が x 軸と共有点をもたないとき、 $\boxed{\text{クケ}} < a < \boxed{\text{コ}}$ である。

問4 三角形 ABC において、 $AC = 6$ 、 $BC = 4$ 、 $\cos B = \frac{1}{4}$ とする。

このとき、 $AB = \boxed{\text{サ}} + \sqrt{\boxed{\text{シス}}}$ である。

問5 1 辺の長さが 1 の正三角形 O-ABC がある。OB の中点を M、OC の中点を N とするとき、三角形 AMN の面積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

解答例

$$\boxed{3} \text{ 問1 } x + y = (\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \\ = 2\sqrt{3}$$

$$xy = (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \\ = (\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2 \\ = 3 - 8 = -5$$

$$\text{したがって } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \\ = (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (-5) \\ = 12 + 10 = \mathbf{22}$$

(答) ③

問2 $|x - 3| < 2$ より $-2 < x - 3 < 2$ の両辺に3をたして

$$1 < x < 5$$

(答) ②

問3 左辺を因数分解すると $(2x - 1)(3x + 4) = 0$ よって $2x - 1 = 0$ または $3x + 4 = 0$ したがって, 解は $x = \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$

(答) ③

【別解】解の公式により

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4)}}{2 \cdot 6} \\ = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-5 \pm 11}{12} \\ = \frac{6}{12}, \frac{-16}{12} = \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$$

問4 $y = -x^2 + 2x - 4$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x - 4 &= -(x^2 - 2x) - 4 \\ &= -\{(x-1)^2 - 1^2\} - 4 \\ &= -(x-1)^2 - 3 \end{aligned}$$

したがって、放物線 $y = -x^2 + 2x - 4$ の頂点の座標は $(1, -3)$

(答) ③

問5 $y = 2x^2 + 4x - 1$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 1 &= 2(x^2 + 2x) - 1 \\ &= 2\{(x+1)^2 - 1^2\} - 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

したがって、2次関数 $y = 2x^2 + 4x - 1$ は $x = -1$ で最小値 -3 をとる。

(答) ②

問6 左辺を因数分解すると $(2x+5)(4x-1) \leq 0$

$$\text{したがって} \quad -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}$$

(答) ②

問7 三角形 ABC の外接円の半径を R とすると

$$\text{正弦定理により} \quad \frac{5}{\sin 30^\circ} = 2R$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad R &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{\sin 30^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \div \frac{1}{2} = 5 \end{aligned}$$

(答) ②

問8 三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \sin 120^\circ \\ &= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

(答) ③

4 問1 重解をもつための条件は、係数について

$$(2a+2)^2 - 4 \cdot 1(1-3a) = 0$$

$$4a^2 + 20a = 0$$

が成り立つことである。これを解いて $a = -5, 0$

重解は $x = -\frac{2a+2}{2 \cdot 1} = -a-1$

よって、重解は $a = -5$ のとき $x = 4$, $a = 0$ のとき $x = -1$

(答) ア . - イ . 5 ウ . 4 エ . 0 オ . - カ . 1

問2 $y = ax^2 - 6ax + a^2 + 9a - 5$

$$= a(x^2 - 6x) + a^2 + 9a - 5$$

$$= a\{(x-3)^2 - 3^2\} + a^2 + 9a - 5$$

$$= a(x-3)^2 + a^2 - 5$$

a は正の定数であるから、 $1 \leq x \leq 6$ における最小値は $a^2 - 5$

したがって $a^2 - 5 = -1$

$a > 0$ に注意して $a = 2$

(答) キ . 2

問3 x 軸と共有点をもたないための条件は、係数について

$$(3a-1)^2 - 4 \cdot 2(a^2+1) < 0$$

整理して $a^2 - 6a - 7 < 0$

すなわち $(a+1)(a-7) < 0$

よって $-1 < a < 7$

(答) ク . - ケ . 1 コ . 7

問4 余弦定理により $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

$$6^2 = c^2 + 4^2 - 2c \cdot 4 \times \frac{1}{4}$$

$$36 = c^2 + 16 - 2c$$

したがって、方程式 $c^2 - 2c - 20 = 0$ を解いて $c = 1 \pm \sqrt{21}$

$c > 0$ であるから $AB = 1 + \sqrt{21}$

(答) サ.1 シ.2 ス.1

問5 $\triangle OAB$ は正三角形で、 M は OB の中点であるから、
 $\triangle ABM$ は $\angle AMB = 90^\circ$ の直角三角形である。

したがって $AM = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

また、 $AM = AN$ 、 $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$ であるから、

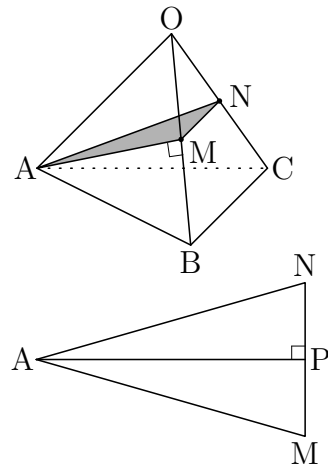
MN の中点を P とすると、 $PM = \frac{1}{4}$ より

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{AM^2 - PM^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{4} \end{aligned}$$

よって、求める $\triangle AMN$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times MN \times AP \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{16} \end{aligned}$$

(答) セ.1 ソ.1 タ.1 チ.6



1.6.2 一般前期 (衛生技術科)

1 次の各問い (問1~5) に答えなさい。

問1 $-2 \leq x \leq 2$ のとき,

$|x+2| + |x-2| = x+3$ を満たす x の値を求めなさい。

問2 $x^4 - 13x^2 + 36$ を因数分解しなさい。

問3 2次方程式 $6x^2 - 7x + 2 = 0$ を解きなさい。

問4 放物線 $y = 2x^2$ を平行移動したところ, 点 $(2, -1)$ を通り, 頂点が直線 $y = -x - 2$ 上の点となった。平行移動後の放物線の方程式を求めなさい。

問5 不等式 $ax^2 - 2x + a + 2 > 0$ がすべての x に対して成り立つとき, 定数 a の値の範囲を求めなさい。

2 次の各問い (問1~5) に答えなさい。

問1 2次方程式 $x^2 + 4x - 2 = 0$ の解を α, β とする。このとき, 2つの解が $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ で, x^2 の係数が1である2次方程式を求めなさい。

問2 整式 $f(x)$ は, $2x + 1$ で割ると2余り, $x - 3$ で割ると-5余る。このとき, $f(x)$ を $2x^2 - 5x - 3$ で割ったときの余りを求めなさい。

問3 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta - 1 = 0$ を満たす θ の値の求めなさい。

問4 方程式 $2 \log_3(x+2) = \log_3(4-x)$ を解きなさい。

問5 2点 $(-2, -1), (4, 3)$ を直径の両端とする円の方程式を求めなさい。

- 3 AB = 10, AC = 8, $\angle A = 60^\circ$ である三角形 ABC があり, $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を M とする。このとき, 次の各問い (問 1 ~ 3) に答えなさい。

問 1 BC の長さ と 三角形 ABC の 外接円の半径を求めなさい。

問 2 三角形 ABC の面積を求めなさい。また, 三角形 ABC の面積を利用して, AM の長さを求めなさい。

問 3 直線 AM と 三角形 ABC の 外接円との交点のうち A でないものを D とするとき, CD の長さを求めなさい。なお, 「円に内接する四角形の向かい合う角の和は 180° である。」という性質を用いてもよい。

- 4 関数 $f(x) = \int_a^x (3t^2 - 3) dt$ がある。このとき, 次の各問い (問 1 ~ 4) に答えなさい。

問 1 $f(x)$ を計算しなさい。

問 2 関数 $y = f(x)$ のグラフが点 (2, 4) を通るとき, 定数 a の値を求めなさい。ただし, $a > 0$ とする。

問 3 問 2 のとき, 関数 $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。

問 4 問 2 のとき, 関数 $y = f(x)$ のグラフの接線のうち, 点 (2, 4) を通るものをすべて求めなさい。

解答例

1 問1 $-2 \leq x \leq 2$ のとき, $x+2 \geq 0$, $x-2 \leq 0$ であるから

$$|x+2| = x+2, \quad |x-2| = -(x-2) = -x+2$$

したがって $x+2 + (-x+2) = x+3$

$-2 \leq x \leq 2$ に注意して $x = 1$

問2 $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$
 $= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

問3 左辺を因数分解すると $(2x-1)(3x-2) = 0$

よって $2x-1 = 0$ または $3x-2 = 0$

したがって, 解は $x = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

【別解】解の公式により

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} \\ &= \frac{8}{12}, \frac{6}{12} = \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

問4 直線 $y = -x - 2$ 上に放物線の頂点があるので, 頂点の座標を $(p, -p-2)$ とする. この放物線は $y = 2x^2$ のグラフを平行移動したものであるから

$$y = 2(x-p)^2 - p - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおける. $\textcircled{1}$ は点 $(2, -1)$ を通るので

$$-1 = 2(2-p)^2 - p - 2$$

整理して $2p^2 - 9p + 7 = 0$

左辺を因数分解して $(p-1)(2p-7) = 0$

したがって $p = 1, \frac{7}{2}$

よって, $\textcircled{1}$ から $y = 2(x-1)^2 - 3, \quad y = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$

問5 不等式 $ax^2 - 2x + a + 2 > 0$ がすべての x について成り立つためには, x^2 の係数は正, $D < 0$ を満たせばよいから

x^2 の係数について $a > 0 \dots ①$

$D < 0$ であるから $(-2)^2 - 4 \cdot a(a + 2) < 0$

整理して $-4a^2 - 8a + 4 < 0$

-4で割って $a^2 + 2a - 1 > 0$

これを解いて $a < -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2} < a \dots ②$

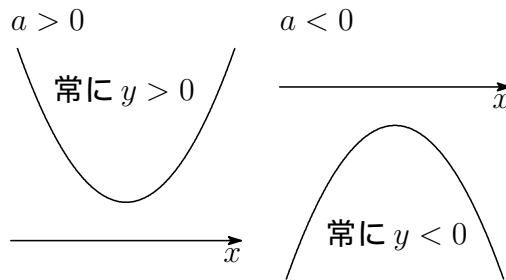
①, ②の共通範囲を求めて $a > -1 + \sqrt{2}$

研究

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は, $D < 0$ のとき x 軸との共有点は存在しないことから, y の値は定符号となる. このとき a の符号により

$a > 0, D < 0 \iff$ 常に $y > 0$

$a < 0, D < 0 \iff$ 常に $y < 0$



2次式の定符号

常に $ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0, D < 0$

常に $ax^2 + bx + c < 0 \iff a < 0, D < 0$

[補足] 常に $ax^2 + bx + c \geq 0 \iff a > 0, D \leq 0$

常に $ax^2 + bx + c \leq 0 \iff a < 0, D \leq 0$

2 問1 2次方程式 $x^2 + 4x - 2 = 0$ の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -\frac{4}{1} = -4, \quad \alpha\beta = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad (2\alpha + 1) + (2\beta + 1) &= 2(\alpha + \beta) + 2 \\ &= 2 \cdot (-4) + 2 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\alpha + 1)(2\beta + 1) &= 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 \\ &= 4 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) + 1 = -15 \end{aligned}$$

よって、求める2次方程式は

$$x^2 - (-6)x - 15 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 6x - 15 = 0$$

問2 $f(x)$ を $2x^2 - 5x - 3$ で割ったときの余りを $ax + b$ とおいて、商を $Q(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 5x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (2x + 1)(x - 3)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$\text{この等式より} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}a + b, \quad f(3) = 3a + b$$

$$\text{また, } 2x + 1 \text{ で割った余りが } 2 \text{ であるから} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$x - 3 \text{ で割った余りが } -5 \text{ であるから} \quad f(3) = -5$$

$$\text{よって} \quad -\frac{1}{2}a + b = 2, \quad 3a + b = -5$$

$$\text{これを解くと} \quad a = -2, \quad b = 1$$

$$\text{したがって、求める余りは} \quad -2x + 1$$

問3 与式から $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = -1$

$$\text{左辺を変形すると} \quad 2 \sin(\theta - 60^\circ) = -1$$

$$\text{よって} \quad \sin(\theta - 60^\circ) = -\frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

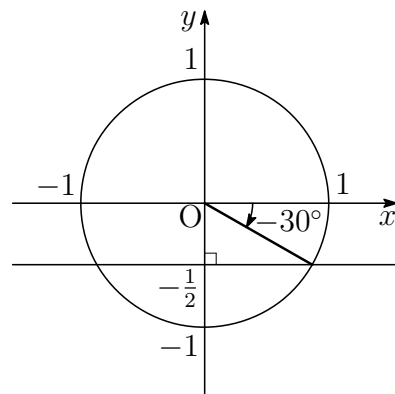
$0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ のとき

$$-60^\circ \leq \theta - 60^\circ < 120^\circ$$

であるから、この範囲で $\textcircled{1}$ を解くと

$$\theta - 60^\circ = -30^\circ$$

$$\text{したがって} \quad \theta = 30^\circ$$



問4 真数は正であるから $x + 2 > 0$ かつ $4 - x > 0$
 すなわち $-2 < x < 4$ …①
 方程式を変形すると $\log_3(x + 2)^2 = \log_3(4 - x)$
 よって $(x + 2)^2 = 4 - x$
 整理して $x^2 + 5x = 0$
 したがって $x(x + 5) = 0$
 ① に注意して $x = 0$

問5 2点 $(-2, -1)$, $(4, 3)$ をそれぞれ A, B , 円の中心を C , 半径を r とする.
 C は線分 AB の中点であるから, その座標は

$$\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad (1, 1)$$

また $r = CA = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{13}$

この円の方程式は

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{13})^2$$

すなわち $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$

3 問1 $\triangle ABC$ を余弦定理に適用して

$$\begin{aligned} BC^2 &= CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cos A \\ &= 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cos 60^\circ \\ &= 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 84 \end{aligned}$$

$BC > 0$ であるから

$$BC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、
正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \times \frac{BC}{\sin A} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{21} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

問2 $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

$AM = x$ とおく、 $\triangle ABM + \triangle ACM = \triangle ABC$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 10x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 8x \sin 30^\circ = 20\sqrt{3}$$

$$\frac{5}{2}x + 2x = 20\sqrt{3}$$

$$x = \frac{40}{9}\sqrt{3}$$

問3 $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 、 $BD = CD$ であるから、
 $BD = CD = y$ とおいて、 $\triangle BCD$ を余弦定理に適用すると

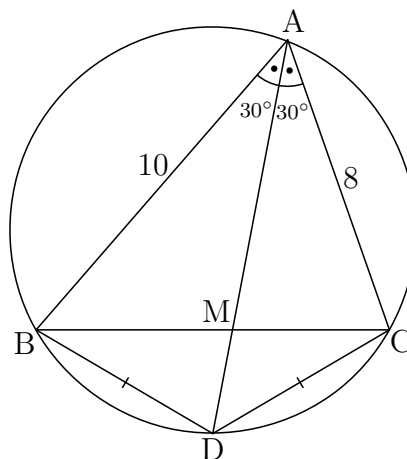
$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cos 120^\circ$$

$$(2\sqrt{21})^2 = y^2 + y^2 - 2y \cdot y \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$84 = 3y^2$$

$$y^2 = 28$$

$y > 0$ であるから $y = 2\sqrt{7}$ すなわち $CD = 2\sqrt{7}$



問 1 $f(x) = \int_a^x (3t^2 - 3) dt$
 $= \left[t^3 - 3t \right]_a^x$
 $= x^3 - 3x - (a^3 - 3a)$

問 2 $f(2) = 4$ であるから $2^3 - 3 \cdot 2 - (a^3 - 3a) = 4$
 整理して $a^3 - 3a + 2 = 0$
 左辺を因数分解して $(a - 1)^2(a + 2) = 0$
 $a > 0$ に注意して $a = 1$

問 3 $a = 1$ から $f(x) = x^3 - 3x + 2$
 $f'(x) = 3x^2 - 3$
 $= 3(x + 1)(x - 1)$
 $f'(x) = 0$ とすると
 $x = -1, 1$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

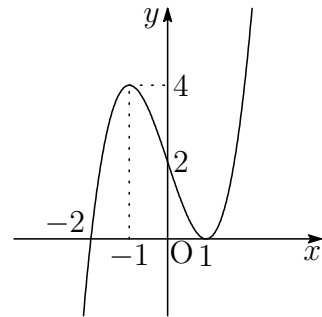
$f(x)$ の増減表は、右のようになる。

したがって、この関数は

$x = -1$ で極大値 4,
 $x = 1$ で極小値 0

をとる。

ゆえに、グラフは右の図のようになる。



問 4 接点の座標を $(c, c^3 - 3c + 2)$ とすると、接線の傾きは $3c^2 - 3$ となるから、その方程式は

$$y - (c^3 - 3c + 2) = (3c^2 - 3)(x - c) \quad \dots \textcircled{1}$$

この直線が点 $(2, 4)$ を通るから

$$4 - (c^3 - 3c + 2) = (3c^2 - 3)(2 - c)$$

よって $c^3 - 3c^2 + 4 = 0$

すなわち $(c + 1)(c - 2)^2 = 0$

$c = -1, 2$

したがって、接線の方程式は、 $\textcircled{1}$ より

$c = -1$ のとき $y = 4$

$c = 2$ のとき $y = 9x - 14$ (答) $y = 4, y = 9x - 14$

1.6.3 一般前期 (看護学科)

1 次の各問い(問1~5)に答えなさい。

問1 $-2 \leq x \leq 2$ のとき,

$|x+2| + |x-2| = x+3$ を満たす x の値を求めなさい。

問2 $x^4 - 13x^2 + 36$ を因数分解しなさい。

問3 2次方程式 $6x^2 - 7x + 2 = 0$ を解きなさい。

問4 放物線 $y = 2x^2$ を平行移動したところ, 点 $(2, -1)$ を通り, 頂点が直線 $y = -x - 2$ 上の点となった。平行移動後の放物線の方程式を求めなさい。

問5 不等式 $ax^2 - 2x + a + 2 > 0$ がすべての x に対して成り立つとき, 定数 a の値の範囲を求めなさい。

2 次の各問い(問1~5)に答えなさい。

問1 2次方程式 $x^2 + 4x - 2 = 0$ の解を α, β とする。このとき, 2つの解が $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ で, x^2 の係数が1である2次方程式を求めなさい。

問2 整式 $f(x)$ は, $2x + 1$ で割ると2余り, $x - 3$ で割ると-5余る。このとき, $f(x)$ を $2x^2 - 5x - 3$ で割ったときの余りを求めなさい。

問3 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta - 1 = 0$ を満たす θ の値の求めなさい。

問4 方程式 $2 \log_3(x+2) = \log_3(4-x)$ を解きなさい。

問5 2点 $(-2, -1), (4, 3)$ を直径の両端とする円の方程式を求めなさい。

- 3 $AB = 10, AC = 8, \angle A = 60^\circ$ である三角形 ABC があり, $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を M とする。このとき, 次の各問い (問 1 ~ 3) に答えなさい。

問 1 BC の長さ と 三角形 ABC の 外接円の半径を求めなさい。

問 2 三角形 ABC の面積を求めなさい。また, 三角形 ABC の面積を利用して, AM の長さを求めなさい。

問 3 直線 AM と 三角形 ABC の 外接円 との 交点のうち A でないものを D とするとき, CD の長さを求めなさい。なお, 「円に内接する四角形の向かい合う角の和は 180° である。」という性質を用いてもよい。

- 4 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は 次の条件を満たしている。

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -2, \quad f'(0) = -3, \quad f'(1) = 0$$

このとき, 次の各問い (問 1 ~ 3) に答えなさい。

問 1 a, b, c, d の値を求めなさい。

問 2 $-3 \leq x \leq \sqrt{3}$ における関数 $y = f(x)$ の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めなさい。

問 3 3 次方程式 $f(x) - k = 0$ が $-3 \leq x \leq \sqrt{3}$ の範囲に異なる実数解を少なくとも 2 個もつとき, 定数 k の値の範囲を求めなさい。

解答例

1 問1 $-2 \leq x \leq 2$ のとき, $x+2 \geq 0$, $x-2 \leq 0$ であるから

$$|x+2| = x+2, \quad |x-2| = -(x-2) = -x+2$$

したがって $x+2 + (-x+2) = x+3$
 $-2 \leq x \leq 2$ に注意して $x = 1$

問2 $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$
 $= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

問3 左辺を因数分解すると $(2x-1)(3x-2) = 0$

よって $2x-1 = 0$ または $3x-2 = 0$

したがって, 解は $x = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

【別解】解の公式により

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} \\ &= \frac{8}{12}, \frac{6}{12} = \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

問4 直線 $y = -x - 2$ 上に放物線の頂点があるので, 頂点の座標を $(p, -p-2)$ とする. この放物線は $y = 2x^2$ のグラフを平行移動したものであるから

$$y = 2(x-p)^2 - p - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける. $\textcircled{1}$ は点 $(2, -1)$ を通るので

$$-1 = 2(2-p)^2 - p - 2$$

整理して $2p^2 - 9p + 7 = 0$

左辺を因数分解して $(p-1)(2p-7) = 0$

したがって $p = 1, \frac{7}{2}$

よって, $\textcircled{1}$ から $y = 2(x-1)^2 - 3, \quad y = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$

問5 不等式 $ax^2 - 2x + a + 2 > 0$ がすべての x について成り立つためには, x^2 の係数は正, $D < 0$ を満たせばよいから

x^2 の係数について $a > 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$D < 0$ であるから $(-2)^2 - 4 \cdot a(a + 2) < 0$

整理して $-4a^2 - 8a + 4 < 0$

-4で割って $a^2 + 2a - 1 > 0$

これを解いて $a < -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2} < a \quad \dots \textcircled{2}$

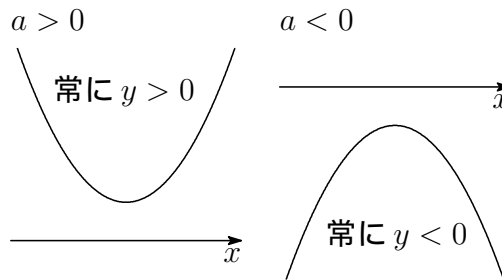
$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $a > -1 + \sqrt{2}$

研究

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は, $D < 0$ のとき x 軸との共有点は存在しないことから, y の値は定符号となる. このとき a の符号により

$a > 0, D < 0 \iff$ 常に $y > 0$

$a < 0, D < 0 \iff$ 常に $y < 0$



2次式の定符号

常に $ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0, D < 0$

常に $ax^2 + bx + c < 0 \iff a < 0, D < 0$

[補足] 常に $ax^2 + bx + c \geq 0 \iff a > 0, D \leq 0$

常に $ax^2 + bx + c \leq 0 \iff a < 0, D \leq 0$

2 問1 2次方程式 $x^2 + 4x - 2 = 0$ の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -\frac{4}{1} = -4, \quad \alpha\beta = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad (2\alpha + 1) + (2\beta + 1) &= 2(\alpha + \beta) + 2 \\ &= 2 \cdot (-4) + 2 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\alpha + 1)(2\beta + 1) &= 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 \\ &= 4 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) + 1 = -15 \end{aligned}$$

よって、求める2次方程式は

$$x^2 - (-6)x - 15 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 6x - 15 = 0$$

問2 $f(x)$ を $2x^2 - 5x - 3$ で割ったときの余りを $ax + b$ とおいて、商を $Q(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 5x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (2x + 1)(x - 3)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$\text{この等式より} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}a + b, \quad f(3) = 3a + b$$

$$\text{また, } 2x + 1 \text{ で割った余りが } 2 \text{ であるから} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$x - 3 \text{ で割った余りが } -5 \text{ であるから} \quad f(3) = -5$$

$$\text{よって} \quad -\frac{1}{2}a + b = 2, \quad 3a + b = -5$$

$$\text{これを解くと} \quad a = -2, \quad b = 1$$

$$\text{したがって、求める余りは} \quad -2x + 1$$

問3 与式から $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = -1$

$$\text{左辺を変形すると} \quad 2 \sin(\theta - 60^\circ) = -1$$

$$\text{よって} \quad \sin(\theta - 60^\circ) = -\frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

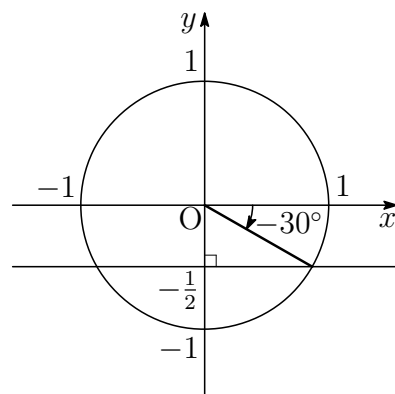
$0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ のとき

$$-60^\circ \leq \theta - 60^\circ < 120^\circ$$

であるから、この範囲で $\textcircled{1}$ を解くと

$$\theta - 60^\circ = -30^\circ$$

$$\text{したがって} \quad \theta = 30^\circ$$



問4 真数は正であるから $x + 2 > 0$ かつ $4 - x > 0$
 すなわち $-2 < x < 4$ …①
 方程式を変形すると $\log_3(x + 2)^2 = \log_3(4 - x)$
 よって $(x + 2)^2 = 4 - x$
 整理して $x^2 + 5x = 0$
 したがって $x(x + 5) = 0$
 ① に注意して $x = 0$

問5 2点 $(-2, -1)$, $(4, 3)$ をそれぞれ A , B , 円の中心を C , 半径を r とする.
 C は線分 AB の中点であるから, その座標は

$$\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad (1, 1)$$

また $r = CA = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{13}$

この円の方程式は

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{13})^2$$

すなわち $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$

3 問1 $\triangle ABC$ を余弦定理に適用して

$$\begin{aligned} BC^2 &= CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cos A \\ &= 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cos 60^\circ \\ &= 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 84 \end{aligned}$$

$BC > 0$ であるから

$$BC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、
正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \times \frac{BC}{\sin A} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{21} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

問2 $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

$AM = x$ とおく、 $\triangle ABM + \triangle ACM = \triangle ABC$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 10x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 8x \sin 30^\circ = 20\sqrt{3}$$

$$\frac{5}{2}x + 2x = 20\sqrt{3}$$

$$x = \frac{40}{9}\sqrt{3}$$

問3 $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 、 $BD = CD$ であるから、
 $BD = CD = y$ とおいて、 $\triangle BCD$ を余弦定理に適用すると

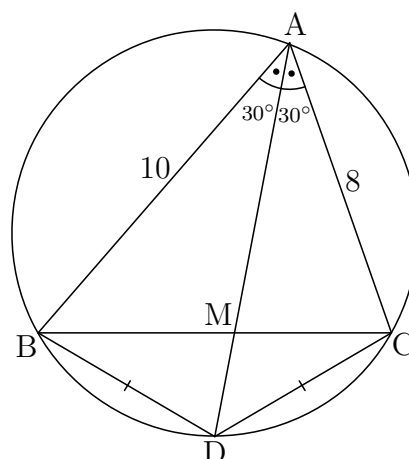
$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cos 120^\circ$$

$$(2\sqrt{21})^2 = y^2 + y^2 - 2y \cdot y \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$84 = 3y^2$$

$$y^2 = 28$$

$y > 0$ であるから $y = 2\sqrt{7}$ すなわち $CD = 2\sqrt{7}$



4 問1 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 0$ から $d = 0$ …①

$f(1) = -2$ から $a + b + c + d = -2$ …②

$f'(0) = -3$ から $c = -3$ …③

$f'(1) = 0$ から $3a + 2b + c = 0$ …④

①, ③ を ② に代入して $a + b = 1$ …⑤

③ を ④ に代入して $3a + 2b = 3$ …⑥

⑤, ⑥ を解いて $a = 1, b = 0$

(答) $a = 1, b = 0, c = -3, d = 0$

問2 問1の結果から

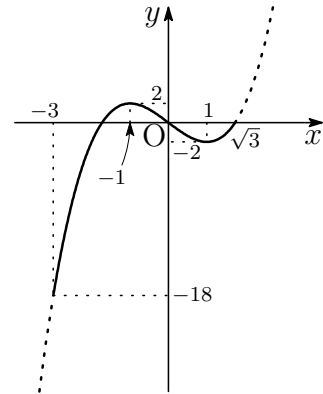
$y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = -1, 1$

y の増減表は, 次のようになる.

x	-3	...	-1	...	1	...	$\sqrt{3}$
y'		+	0	-	0	+	
y	-18	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗	0



よって, この関数は

$x = -1$ で最大値 2 をとり,

$x = -3$ で最小値 -18 をとる.

問3 求める k の値の範囲は, $y = x^3 - 3x$ ($-3 \leq x \leq \sqrt{3}$) のグラフと直線 $y = k$ が少なくとも 2 個の共有点をもつ範囲であるから

$-2 \leq k < 2$

1.7 九州看護福祉大学

1.7.1 一般試験(地方試験1)

入学試験問題

数 学 I

(地方試験)

福岡・長崎・宮崎・那覇
看護学科・社会福祉学科

平成18年2月1日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具(鉛筆・消しゴム)、時計(時間表示機能のみ)以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙をふくめて3ページあり、これとは別に解答用紙が、1枚ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
(解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情(病気・トイレ等)のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

1 次の各問いに答えよ。

問 1. $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ のとき, $x + \frac{1}{x} = \boxed{\text{ア}}$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \boxed{\text{イ}}$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \boxed{\text{ウ}}$ である。

問 2. $a^2b - ab^2 + ab - 2a + 2b - 2$ を因数分解すると $\boxed{\text{エ}}$ である。

問 3. 不等式 $|5x - 3| < x$ を解くと $\boxed{\text{オ}}$ であり,
不等式 $4x^2 - 3 < (x + 2)(3x - 2)$ を解くと $\boxed{\text{カ}}$ である。

問 4. 2 つの 2 次関数 $y = 2x^2 + 3mx + m$, $y = x^2 - (m - 1)x + m^2$ (m は定数) のグラフがある。

- (1) 2 つのグラフがともに x 軸と 2 個の共有点をもつとき, m の値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である。
- (2) 2 つのグラフのどちらか一方のみが x 軸と 2 個の共有点をもつとき, m の値の範囲は $\boxed{\text{ク}}$ である。

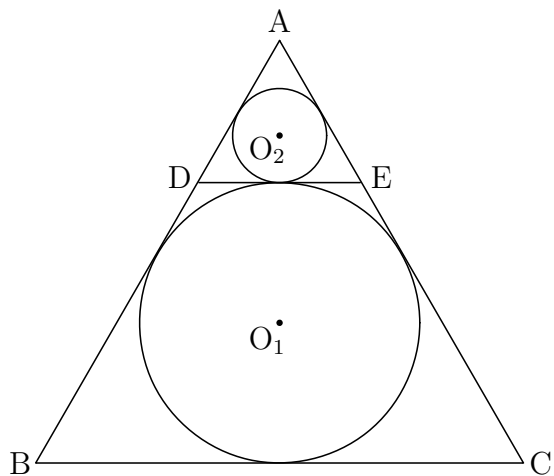
2 次の各問いに答えよ。

なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 三角形 ABC は，1 辺の長さが a の正三角形である。点 D は辺 AB 上の点，点 E は辺 AC 上の点で， $DE \parallel BC$ とする。円 O_1 が三角形 ABC に内接し，しかも台形 DBCE に内接している。さらに円 O_2 が三角形 ADE に内接している。

(1) 円 O_1 の面積を求めよ。

(2) 円 O_2 の面積を求めよ。



問 B. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき，関数 $f(\theta) = 2 \sin^2 \theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 1$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答例

□1 問 1. $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ より $\frac{1}{x} = 1 \div \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ であるから

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{(3+2\sqrt{3}+1) + (3-2\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{8}{2} = 4 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \end{aligned}$$

① から $= 4^2 - 2 = 14 \quad \dots \textcircled{2}$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left\{ x^2 - x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \right\} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) \end{aligned}$$

①, ② から $= 4 \times (14 - 1) = 52$

(答) ア. 4 イ. 14 ウ. 52

[補足] $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

であるからこれらに $a = x$, $b = \frac{1}{x}$ を代入すると, ① より

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = 4^2 - 2 = 14$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4^3 - 3 \cdot 4 = 52$$

$$\begin{aligned} \text{問2. } a^2b - ab^2 + ab - 2a + 2b - 2 &= ab(a - b + 1) - 2(a - b + 1) \\ &= (ab - 2)(a - b + 1) \end{aligned}$$

$$\text{(答) 工. } (ab - 2)(a - b + 1)$$

問3. $|5x - 3| < x$ より $-x < 5x - 3 < x$ であるから

$$-x < 5x - 3 \text{ を解いて } x > \frac{1}{2} \quad \cdots \text{①}$$

$$5x - 3 < x \text{ を解いて } x < \frac{3}{4} \quad \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ② の共通範囲を求めて } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$$

$$4x^2 - 3 < (x + 2)(3x - 2)$$

$$\text{右辺を展開して } 4x^2 - 3 < 3x^2 + 4x - 4$$

$$\text{移項して整理すると } x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$\text{2次方程式 } x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ の解は } x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{したがって, 求める2次不等式の解は } 2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{(答) オ. } x < \frac{1}{2}, \frac{3}{4} < x \quad \text{カ. } 2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$$

問4. 2つの2次関数の係数について,

$$\begin{aligned} D_1 &= (3m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot m & D_2 &= \{-(m-1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 \\ &= 9m^2 - 8m & &= -3m^2 - 2m + 1 \\ &= m(9m - 8) & &= -(3m^2 + 2m - 1) \\ & & &= -(m+1)(3m-1) \end{aligned}$$

(1) 2つのグラフがともに x 軸と2個の共有点をもつとき

$$\begin{cases} m(9m - 8) > 0 \\ -(m+1)(3m-1) > 0 \end{cases}$$

第1式から $m < 0, \frac{8}{9} < m \dots \textcircled{1}$

第2式から $-1 < m < \frac{1}{3} \dots \textcircled{2}$

①と②の共通範囲を求めて $-1 < m < 0$

(2) 2つのグラフのどちらか一方のみが x 軸と2個の共有点をもつとき

$$(*) \begin{cases} m(9m - 8) > 0 \\ -(m+1)(3m-1) \leq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad (**) \begin{cases} m(9m - 8) \leq 0 \\ -(m+1)(3m-1) > 0 \end{cases}$$

(*)の第1式から $m < 0, \frac{8}{9} < m$

(*)の第2式から $m \leq -1, \frac{1}{3} \leq m$

連立不等式(*)の解は $m \leq -1, \frac{8}{9} < m \dots \textcircled{3}$

(**)の第1式から $0 \leq m \leq \frac{8}{9}$

(**)の第2式から $-1 < m < \frac{1}{3}$

連立不等式(**)の解は $0 \leq m < \frac{1}{3} \dots \textcircled{4}$

求める m の値の範囲は③または④であるから

$$m \leq -1, 0 \leq m < \frac{1}{3}, \frac{8}{9} < m$$

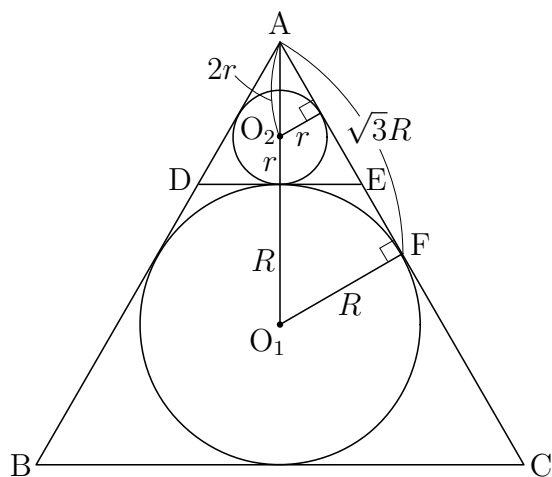
(答) キ. $-1 < m < 0$ ク. $m \leq -1, 0 \leq m < \frac{1}{3}, \frac{8}{9} < m$

- 2 問 A. (1) 円 O_1 の半径を R , O_1 と辺 AC の接点を F とすると,
 $\triangle FAO_1$ は $\angle A = 30^\circ$ の直角三角形であるから

$$AF = \sqrt{3}R, AO_1 = 2R$$

$$F \text{ は } AC \text{ の中点であるから, } \sqrt{3}R = \frac{a}{2} \text{ より } R = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{したがって, 円 } O_1 \text{ の面積は } \pi R^2 = \pi \left(\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$$



- (2) 円 O_2 の半径を r とすると, $AO_1 = 2R$ から

$$2r + r + R = 2R \quad \text{これを解いて } r = \frac{1}{3}R$$

$$\text{よって, } \textcircled{1} \text{ から } r = \frac{1}{3} \times \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{6\sqrt{3}}$$

$$\text{したがって, 円 } O_2 \text{ の面積は } \pi r^2 = \pi \left(\frac{a}{6\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{108}$$

問 B.
$$2 \sin^2 \theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 1 = 2(1 - \cos^2 \theta) - 2\sqrt{3} \cos \theta - 1$$

$$= -2 \cos^2 \theta - 2\sqrt{3} \cos \theta + 1$$

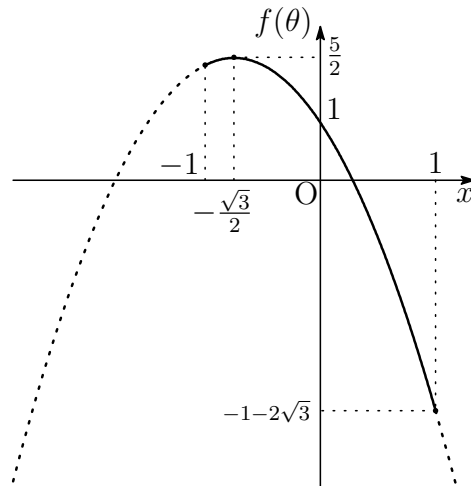
$\cos \theta = x$ とおくと, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $-1 \leq x \leq 1$ であり

$$f(\theta) = -2x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$$

よって $f(\theta) = -2 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}$

したがって $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta = 150^\circ$ で 最大値 $\frac{5}{2}$

$x = 1$ すなわち $\theta = 0^\circ$ で 最小値 $-1 - 2\sqrt{3}$



1.7.2 一般試験(地方試験2)

入学試験問題

数 学 I

(地方試験)

広島・佐賀・熊本・大分・鹿児島

看護学科・社会福祉学科

平成18年2月2日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具(鉛筆・消しゴム)、時計(時間表示機能のみ)以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙をふくめて3ページあり、これとは別に解答用紙が、1枚ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
(解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情(病気・トイレ等)のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

1 次の各問いに答えよ。

問 1. $x = \frac{2}{2 + \sqrt{5}}$, $y = \frac{2}{2 - \sqrt{5}}$ のとき, $x + y = \boxed{\text{ア}}$, $xy = \boxed{\text{イ}}$,
 $x^2 + y^2 = \boxed{\text{ウ}}$, $x^2 - y^2 = \boxed{\text{エ}}$ である。

問 2. 不等式 $|x + 1| + |x - 2| \leq 4$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である。

問 3. 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + a$ (a は実数) に対し, $y = f(x)$ のグラフを C とする。

- (1) C の頂点の座標は $\boxed{\text{カ}}$ である。
- (2) C の頂点の y 座標は $a = \boxed{\text{キ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。
- (3) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき, a の値の範囲は $\boxed{\text{ケ}}$ である。
- (4) C が x 軸と, $x > 1$ と $x < 1$ に 1 つずつ交点をもつとき, a のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- (5) C が x 軸と, $x < -1$ で異なる 2 つの交点をもつとき, a のとりうる範囲は $\boxed{\text{サ}}$ である。

2 次の各問いに答えよ。

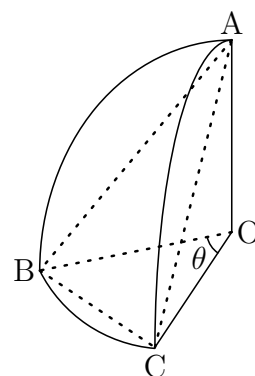
なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 中心 O ，半径 r の球の球面上に 3 点 A, B, C がある。

立体 $OABC$ は，この球を 3 つの扇形の平面 OAB, OAC, OBC で切り取ったものである。 $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$ ， $\angle BOC = \theta$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) とする。この立体 $OABC$ から，三角錐 $OABC$ を除いた残りの部分の体積を $V(\theta)$ とする。

(1) $V(45^\circ)$ を求めよ。

(2) 体積の比 $V(30^\circ) : V(60^\circ)$ を求めよ。



問 B. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき，関数 $f(\theta) = \cos^2 \theta + \sqrt{2} \sin \theta + 2$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \text{ 問 1. } x + y = \frac{2}{2 + \sqrt{5}} + \frac{2}{2 - \sqrt{5}} = \frac{2(2 - \sqrt{5}) + 2(2 + \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \frac{8}{-1} = -8$$

$$x - y = \frac{2}{2 + \sqrt{5}} - \frac{2}{2 - \sqrt{5}} = \frac{2(2 - \sqrt{5}) - 2(2 + \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \frac{-4\sqrt{5}}{-1} = 4\sqrt{5}$$

$$xy = \frac{2}{2 + \sqrt{5}} \times \frac{2}{2 - \sqrt{5}} = \frac{2 \times 2}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\text{したがって } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (-8)^2 - 2 \cdot (-4) = 72$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = -8 \times 4\sqrt{5} = -32\sqrt{5}$$

(答) ア. -8 イ. -4 ウ. 72 エ. $-32\sqrt{5}$

$$\text{問 2. } |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & (x \geq -1) \\ -x - 1 & (x < -1) \end{cases}, \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2) \\ -x + 2 & (x < 2) \end{cases}$$

したがって

$x < -1$ のとき

$$(-x - 1) + (-x + 2) \leq 4 \text{ を解いて } x \geq -\frac{3}{2}$$

$$x < -1 \text{ に注意して } -\frac{3}{2} \leq x < -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$-1 \leq x < 2$ のとき

$$(x + 1) + (-x + 2) \leq 4 \text{ において 左辺} = 3 \text{ となり}$$

$$\text{このとき不等式の解は } -1 \leq x < 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$2 \leq x$ のとき

$$(x + 1) + (x - 2) \leq 4 \text{ を解いて } x \leq \frac{5}{2}$$

$$2 \leq x \text{ に注意して } 2 \leq x \leq \frac{5}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{よって, } \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から } -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{(答) オ. } -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{問3. (1) } x^2 + ax + a &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a \end{aligned}$$

したがって、 C の頂点の座標は $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + a\right)$

$$\begin{aligned} \text{(2) } -\frac{a^2}{4} + a &= -\frac{1}{4}(a^2 - 4a) \\ &= -\frac{1}{4}\{(a-2)^2 - 2^2\} \\ &= -\frac{1}{4}(a-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

したがって、 C の頂点の y 座標は $a = 2$ のとき最大値1をとる.

(3) C が x 軸と異なる2点で交わる時、係数について

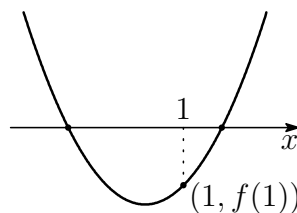
$$\begin{aligned} a^2 - 4 \cdot 1 \cdot a &> 0 \\ a(a-4) &> 0 \end{aligned}$$

したがって $a < 0, 4 < a$

(4) C が x 軸と、 $x > 1$ と $x < 1$ に1つずつ交点をもつには、 x^2 の係数が正であるから、 $f(1) < 0$ であればよい.

$$\begin{aligned} 1^2 + a \cdot 1 + a &< 0 \\ 2a + 1 &< 0 \end{aligned}$$

したがって $a < -\frac{1}{2}$



(5) C が x 軸と、 $x < -1$ で異なる2つの交点をもつには、 x^2 の係数が正であるから

(3)の結果から $a < 0, 4 < a \dots \textcircled{1}$

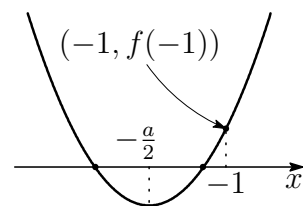
(1)の結果から $-\frac{a}{2} < -1$

すなわち $a > 2 \dots \textcircled{2}$

$$f(-1) = (-1)^2 + a \cdot (-1) + a = 1 > 0$$

に注意し、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ の共通部分を求めて

$$a > 4$$



(答) カ. $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + a\right)$ キ. 2 ク. 1 ケ. $a < 0, 4 < a$
 コ. $a < -\frac{1}{2}$ サ. $a > 4$

2 問 A. (1) $V(45^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 \times \frac{45}{360} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} r^2 \sin 45^\circ \right) \times r$
 $= \frac{1}{12} \pi r^3 - \frac{\sqrt{2}}{12} r^3 = \frac{\pi - \sqrt{2}}{12} r^3$

(2) $V(30^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 \times \frac{30}{360} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} r^2 \sin 30^\circ \right) \times r$
 $= \frac{1}{18} \pi r^3 - \frac{1}{12} r^3 = \frac{2\pi - 3}{36} r^3$

$V(60^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} r^2 \sin 60^\circ \right) \times r$
 $= \frac{1}{9} \pi r^3 - \frac{\sqrt{3}}{12} r^3 = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{36} r^3$

したがって $V(30^\circ) : V(60^\circ) = \frac{2\pi - 3}{36} r^3 : \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{36} r^3$
 $= (2\pi - 3) : (4\pi - 3\sqrt{3})$

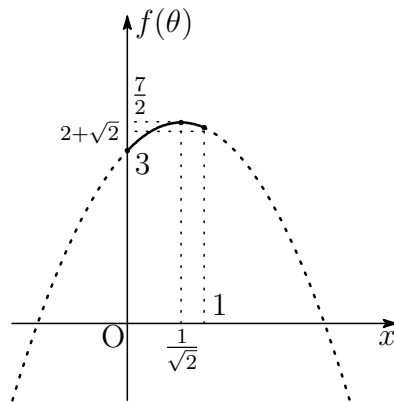
問 B. $\cos^2 \theta + \sqrt{2} \sin \theta + 2 = (1 - \sin^2 \theta) + \sqrt{2} \sin \theta + 2$
 $= -\sin^2 \theta + \sqrt{2} \sin \theta + 3$

$\sin \theta = x$ とおくと, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $0 \leq x \leq 1$ であり

$f(\theta) = -x^2 + \sqrt{2}x + 3$

よって $f(\theta) = -\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{7}{2}$

したがって $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち $\theta = 45^\circ, 135^\circ$ で 最大値 $\frac{7}{2}$
 $x = 0$ すなわち $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ で 最小値 3



1.7.3 一般試験(看護学科・リハビリテーション学科)

入学試験問題

数 学 I

(看護学科・リハビリテーション学科共通)

本学会場

平成18年2月3日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具(鉛筆・消しゴム)、時計(時間表示機能のみ)以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙をふくめて3ページあり、これとは別に解答用紙が、1枚ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
(解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情(病気・トイレ等)のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

1 次の各問いに答えよ。

問1. a, b は実数で, $a > b > 0, a + b = 5, a^3 + b^3 = 110$ とする。このとき,
 $ab = \boxed{\text{ア}}, \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \boxed{\text{イ}}, \sqrt{a} - \sqrt{b} = \boxed{\text{ウ}}, a - b = \boxed{\text{エ}}$ である。

問2. 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは2点 $(1, 6), (-1, 30)$ を通る。また,
 このグラフの軸は2次関数 $y = 3x^2 - 18x + 7$ のグラフの軸と同じである。
 このとき, $a = \boxed{\text{オ}}, b = \boxed{\text{カ}}, c = \boxed{\text{キ}}$ である。

問3. 2次関数 $y = |x^2 - 9| - 8x$ ($-2 \leq x \leq 6$) は, $x = \boxed{\text{ク}}$ のとき最大値
 $\boxed{\text{ケ}}, x = \boxed{\text{コ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

問4. $\frac{3}{5 - \sqrt{13}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とする。このとき, $a = \boxed{\text{シ}},$
 $b = \boxed{\text{ス}}$ である。 $a + b^2$ の小数部分の値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

2 次の各問いに答えよ。

なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 三角形 ABC において， $BC = 3\sqrt{3}$ ， $AC = 3\sqrt{2}$ ， $\angle B = 45^\circ$ とする。

- (1) $\angle A$ の大きさを求めよ。
- (2) $\angle C$ の大きさを求めよ。
- (3) AB の長さを求めよ。

問 B. $x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 5y - 6 = 0$ を満たす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。

解答例

1 問 1. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ であるから,

これに $a + b = 5$, $a^3 + b^3 = 110$ を代入すると

$$110 = 5^3 - 3ab \cdot 5 \quad \text{これから } ab = 1$$

$$\text{したがって } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2b^2} = \frac{(a + b)^2 - 2ab}{(ab)^2} = \frac{5^2 - 2 \cdot 1}{1^2} = 23$$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$ であるから, これに $a + b = 5$, $ab = 1$ に代入すると

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 5 - 2\sqrt{1} = 3$$

$a > b > 0$ より $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$ であるから $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{3}$

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ であるから, これに $a + b = 5$, $ab = 1$ を代入して

$$(a - b)^2 = 5^2 - 4 \cdot 1 = 21$$

$a > b$ より $a - b > 0$ であるから $a - b = \sqrt{21}$

(答) ア. 1 イ. 23 ウ. $\sqrt{3}$ エ. $\sqrt{21}$

問 2. 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ の軸の式は $x = -\frac{b}{2a}$

放物線 $y = 3x^2 - 18x + 7$ の軸の式は $x = -\frac{-18}{2 \cdot 3} = 3$

このとき, $-\frac{b}{2a} = 3$ であるから $b = -6a$ …①

① から放物線の方程式を $y = ax^2 - 6ax + c$ とおく.

点 (1, 6) を通るから $6 = a \cdot 1^2 - 6a \cdot 1 + c$

点 (-1, 30) を通るから $30 = a \cdot (-1)^2 - 6a \cdot (-1) + c$

これらを整理して $-5a + c = 6$ …②

$$7a + c = 30 \quad \dots \text{③}$$

②, ③ を解いて $a = 2$, $c = 16$

$a = 2$ を ① に代入して $b = -12$

(答) オ. 2 カ. -12 キ. 16

問3. $|x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9 & (x \leq -3, 3 \leq x) \\ -(x^2 - 9) & (-3 \leq x \leq 3) \end{cases}$ であるから

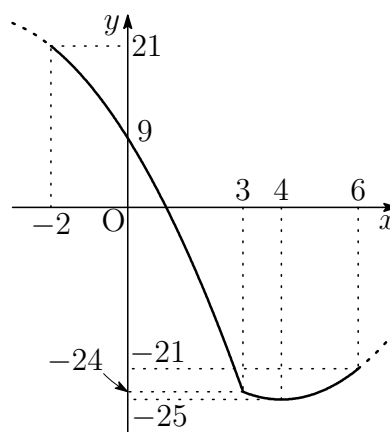
$$y = \begin{cases} -(x^2 - 9) - 8x & (-2 \leq x \leq 3) \\ (x^2 - 9) - 8x & (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

すなわち $y = \begin{cases} -(x+4)^2 + 25 & (-2 \leq x \leq 3) \\ (x-4)^2 - 25 & (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$

右の図から

$x = -2$ のとき 最大値 21

$x = 4$ のとき 最小値 -25



(答) ク. -2 ケ. 21 コ. 4 サ. -25

問4. $\frac{3}{5 - \sqrt{13}} = \frac{3(5 + \sqrt{13})}{(5 - \sqrt{13})(5 + \sqrt{13})} = \frac{3(5 + \sqrt{13})}{25 - 13} = \frac{5 + \sqrt{13}}{4}$

$$3 < \sqrt{13} < 4 \text{ より } \frac{5+3}{4} < \frac{5+\sqrt{13}}{4} < \frac{5+4}{4}$$

よって $2 < \frac{5 + \sqrt{13}}{4} < \frac{9}{4}$ これから $a = 2$

$$a + b = \frac{5 + \sqrt{13}}{4} \text{ より } b = \frac{5 + \sqrt{13}}{4} - a = \frac{-3 + \sqrt{13}}{4}$$

$0 < b < 1$ より $0 < b^2 < 1$ であるから, $a + b^2$ の小数部分は b^2

$$\text{ゆえに } b^2 = \left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{4} \right)^2 = \frac{11 - 3\sqrt{13}}{8}$$

(答) シ. 2 ス. $\frac{\sqrt{13} - 3}{4}$ セ. $\frac{11 - 3\sqrt{13}}{8}$

2 問 A. (1) 正弦定理により $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$

よって $3\sqrt{3} \sin 45^\circ = 3\sqrt{2} \sin A$

$$3\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \sin A$$

したがって $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ これから $A = 60^\circ, 120^\circ$

(2) $C = 180^\circ - (A + B)$ であるから

$A = 60^\circ$ のとき $C = 75^\circ$,

$A = 120^\circ$ のとき $C = 15^\circ$

(3) 余弦定理により $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

$$(3\sqrt{2})^2 = c^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2c \cdot 3\sqrt{3} \cos 45^\circ$$

$$18 = c^2 + 27 - 6\sqrt{3}c \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって, 方程式 $c^2 - 3\sqrt{6}c + 9 = 0$ を解いて

$$c = \frac{3\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}}{2} \quad \text{すなわち} \quad AB = \frac{3\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

問 B. x について整理すると $x^2 + (2y - 4)x + 3y^2 - 5y - 6 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

x は実数であるから, 係数について

$$(2y - 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3y^2 - 5y - 6) \geq 0$$

整理して $-8y^2 + 4y + 40 \geq 0$

両辺を -4 で割って $2y^2 - y - 10 \leq 0$

$$(y + 2)(2y - 5) \leq 0$$

したがって $-2 \leq y \leq \frac{5}{2}$

y は正の整数であるから $y = 1, 2$

$y = 1$ のとき 方程式 $\textcircled{1}$ は $x^2 - 2x - 8 = 0$

このとき, x は正の整数であることに注意して $x = 4$

$y = 2$ のとき 方程式 $\textcircled{1}$ は $x^2 - 4 = 0$

このとき, x は正の整数であることに注意して $x = 2$

よって, 求める x, y の組は $(x, y) = (4, 1), (2, 2)$

1.7.4 一般試験(社会福祉学科)

入学試験問題

数 学 I

(社会福祉学科)

本学会場

平成18年2月3日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具(鉛筆・消しゴム)、時計(時間表示機能のみ)以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙をふくめて3ページあり、これとは別に解答用紙が、1枚ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
(解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情(病気・トイレ等)のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

1 次の各問いに答えよ。

問1. 三角形 ABC において, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$ とする。この条件を満たす三角形 ABC は常に半径 $r =$ の円に内接する。さらに, $AB = 2\sqrt{3}$ のとき, $AC =$ であり, 三角形 ABC の面積は である。

問2. $(5x - 3)(x + 1) + (x - 4)(x + 3)$ を因数分解すると ,
 $x(y^2 - 4) + y(4 - x^2) + 2(x^2 - y^2)$ を因数分解すると である。

問3. 放物線 $y = 2x^2 + 4x + 5$ を x 軸方向に , y 軸方向に だけ平行移動した放物線は, $y = 2x^2 - 8x + 7$ である。

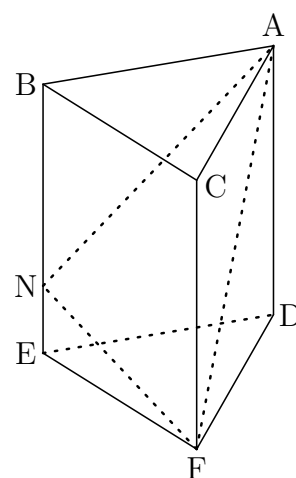
問4. 2次方程式 $2x^2 + mx + 4 = 0$ が重解をもつとき, m の値は $m_1 =$ または $m_2 =$ である。ただし, $m_1 > m_2$ とする。 $m = m_1$ のときの重解は $x =$ であり, $m = m_2$ のときの重解は $x =$ である。また, 2次方程式が異なる2つの実数解をもつとき, 実数 m の値の範囲は である。

2 次の各問いに答えよ。

なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 立体 ABC-DEF は高さ 4 の三角柱で，三角形 ABC は 1 辺の長さが 3 の正三角形とする。また，N は辺 BE 上の点で， $NE = 1$ とする。

- (1) $\angle NAF = \theta$ とするとき， $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) 三角形 ANF の面積を求めよ。
- (3) 平面 ANF で三角柱を 2 つの部分に切断したとき，立体 ANEFD の方の体積を求めよ。



問 B. 不等式 $|2 - x^2 - x| > x + \frac{7}{4}$ を解け。

解答例

$$\boxed{1} \text{ 問 1. 正弦定理により } 2r = \frac{3}{\sin 60^\circ}$$

$$\text{よって } r = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{2} \times 3 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{余弦定理により } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$3^2 = b^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2b \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ$$

$$9 = b^2 + 12 - 4\sqrt{3}b \times \frac{1}{2}$$

したがって, 方程式 $b^2 - 2\sqrt{3}b + 3 = 0$ を解いて

$$b = \sqrt{3} \quad \text{すなわち } AC = \sqrt{3}$$

三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{(答) ア. } \sqrt{3} \quad \text{イ. } \sqrt{3} \quad \text{ウ. } \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{問 2. } & (5x - 3)(x + 1) + (x - 4)(x + 3) \\ &= 6x^2 + x - 15 \\ &= (2x - 3)(3x + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \longrightarrow -9 \\ 3 \quad 5 \longrightarrow 10 \\ \hline 6 \quad -15 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & x(y^2 - 4) + y(4 - x^2) + 2(x^2 - y^2) \\ &= xy^2 - 4x + 4y - x^2y + 2(x^2 - y^2) \\ &= -x^2y + xy^2 - 4x + 4y + 2(x + y)(x - y) \\ &= -xy(x - y) - 4(x - y) + 2(x + y)(x - y) \\ &= -(x - y)\{xy + 4 - 2(x + y)\} \\ &= -(x - y)(x - 2)(y - 2) \end{aligned}$$

$$\text{(答) 工. } (2x - 3)(3x + 5) \quad \text{オ. } -(x - y)(x - 2)(y - 2)$$

問3. $y = 2x^2 + 4x + 5$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 + 2x) + 5 \\ &= 2\{(x+1)^2 - 1^2\} + 5 \\ &= 2(x+1)^2 + 3 \end{aligned}$$

$y = 2x^2 - 8x + 7$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 4x) + 7 \\ &= 2\{(x-2)^2 - 2^2\} + 7 \\ &= 2(x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

よって、頂点は点 $(-1, 3)$ から点 $(2, -1)$ に移動している。
したがって、

$$\begin{aligned} x \text{ 軸方向に } & 2 - (-1) = 3, \\ y \text{ 軸方向に } & -1 - 3 = -4 \end{aligned}$$

だけ平行移動している。

(答) カ. 3 キ. -4

問4. 2次方程式 $2x^2 + mx + 4 = 0$ が重解をもつための条件は、係数について

$$m^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad m^2 = 32$$

ゆえに、 m の値は $m = \pm 4\sqrt{2}$

そのときの重解は $x = -\frac{m}{2 \cdot 2} = -\frac{m}{4}$

よって、 $m = 4\sqrt{2}$ のとき重解 $-\sqrt{2}$ 、 $m = -4\sqrt{2}$ のとき重解 $\sqrt{2}$

2次方程式 $2x^2 + mx + 4 = 0$ が異なる2つの実数解をもつための条件は、
係数について

$$m^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad m < -4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} < m$$

(答) ク. $4\sqrt{2}$ ケ. $-4\sqrt{2}$ コ. $-\sqrt{2}$ サ. $\sqrt{2}$ シ. $m < -4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} < m$

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が重解をもつのは、 $b^2 - 4ac = 0$ ときで

$$\text{その解(重解)は} \quad x = -\frac{b}{2a}$$

$$\begin{aligned} \boxed{2} \text{ 問 A. (1)} \quad AN &= \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \\ NF &= \sqrt{NE^2 + EF^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \\ AF &= \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \end{aligned}$$

したがって、余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AN^2 + AF^2 - NF^2}{2 \cdot AN \cdot AF} = \frac{18 + 25 - 10}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5} \\ &= \frac{33}{30\sqrt{2}} = \frac{11}{10\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(2) $\sin \theta > 0$ であるから、(1) の結果より

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{10\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{79}{200}} = \frac{\sqrt{79}}{10\sqrt{2}} \end{aligned}$$

したがって、求める三角形 ANF の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} AN \cdot AF \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{79}}{10\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{79}}{4}$$

- (3) 立体 ABC-DEF は平面 ANC と平面 ANF によって、
3つの部分に分けられる。

立体 ABC-DEF の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \triangle ABC \times BE = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin 60^\circ \times 4 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

三角柱 ABCN の体積 V_1 は

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times BN = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin 60^\circ \times 3 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

N から平面 ACF におろした垂線の長さ h は

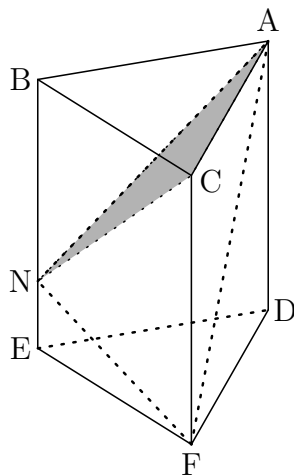
$$h = 3 \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

三角柱 ACFN の体積 V_2 は

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{3} \times \triangle ACF \times h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって、求める体積は $V - (V_1 + V_2)$ であるから

$$V - (V_1 + V_2) = 9\sqrt{3} - \left(\frac{9\sqrt{3}}{4} + 3\sqrt{3} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$



問 B. $2 - x^2 - x < -\left(x + \frac{7}{4}\right)$ または $x + \frac{7}{4} < 2 - x^2 - x$ であるから

第1式から $x^2 - \frac{15}{4} > 0$

ゆえに $x < -\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2} < x \quad \dots \textcircled{1}$

第2式から $x^2 + 2x - \frac{1}{4} < 0$

ゆえに $\frac{-2 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-2 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots \textcircled{2}$

よって, $\textcircled{1}$ または $\textcircled{2}$ であるから $x < \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2} < x$

1.8 九州ルーテル学院大学

1.8.1 一般I期試験 70分

1 次の各問に答えよ.

(1) $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)$ を展開せよ.

(2) $x + \frac{1}{x} = 2$ とするとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ の値は であり, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ の値は である.

(3) $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{\tan \theta}$ を簡単にせよ.

(4) $x^2 - 3px + 2p + 4 = 0$ の1つの解が他の解の2倍であるとき, p の値を求めよ.

(5) $1 \leq \left| x + \frac{1}{2} \right| < 2$ を解け.

2 2次関数 $f(x) = x^2 - 2kx + 3k^2 - k$ を考える.

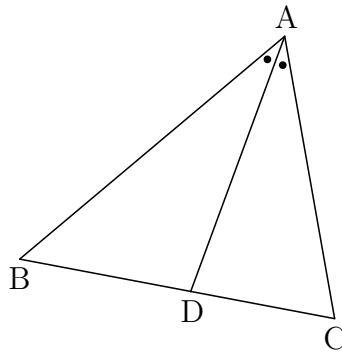
(1) $k = 1$ のとき, $y = f(x)$ のグラフを描け.

(2) $f(x)$ の最小値を m とするとき, m を k の式で表せ.

(3) m の最小値とそのときの k の値を求めよ.

- 3 二次方程式 $x^2 - 2mx + 2m^2 - 3m - 2 = 0$ は $x < 0$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つ．このとき m の値の範囲を求めよ．

- 4 $\triangle ABC$ において， $AB = 6$ ， $CA = 5$ ， $\angle A = 60^\circ$ とする．また， $\angle A$ の二等分線と BC との交点を D とする．



- (1) BC の長さを求めよ．
- (2) $\triangle ABC$ の外接円の半径 R を求めよ．
- (3) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ．
- (4) AD の長さを求めよ．

解答例

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad & (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) = (x+2)(x+8) \times (x+4)(x+6) \\
 & = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) \\
 & = (x^2 + 10x)^2 + 40(x^2 + 10x) + 384 \\
 & = x^4 + 20x^3 + 140x^2 + 400x + 384
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2^3 - 3 \times 2 = 2$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta - \cos \theta(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta - \cos \theta + \cos^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\
 &= \frac{1 - \cos \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\
 &= \frac{1}{\sin \theta}
 \end{aligned}$$

(4) 2つの解を $\alpha, 2\alpha$ とおくことができる.

$$\text{解と係数の関係から} \quad \alpha + 2\alpha = 3p, \quad \alpha \cdot 2\alpha = 2p + 4$$

$$\text{すなわち} \quad \alpha = p, \quad \alpha^2 = p + 2$$

$$\text{上の2式から} \quad p^2 = p + 2$$

$$\text{これを解いて} \quad p = 2, -1$$

$$(5) \quad \left|x + \frac{1}{2}\right| \geq 1 \text{ より} \quad x + \frac{1}{2} \leq -1, \quad 1 \leq x + \frac{1}{2}$$

$$\text{すなわち} \quad x \leq -\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| < 2 \text{ より} \quad -2 < x + \frac{1}{2} < 2$$

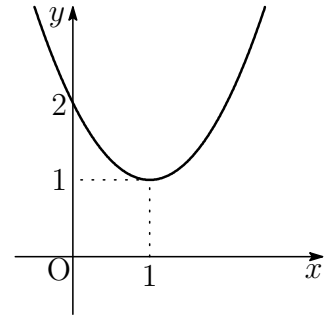
$$\text{すなわち} \quad -\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

したがって, ①, ②の共通範囲を求めて

$$-\frac{5}{2} < x \leq -\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$$

2 (1) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
 $= (x - 1)^2 + 1$

したがって, $y = f(x)$ は頂点が $(1, 1)$ で下に凸の放物線である.



(2) $f(x) = x^2 - 2kx + 3k^2 - k$
 $= (x^2 - 2kx) + 3k^2 - k$
 $= \{(x - k)^2 - k^2\} + 3k^2 - k$
 $= (x - k)^2 + 2k^2 - k$

したがって, $m = 2k^2 - k$

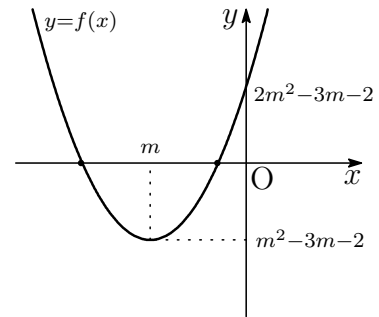
(3) $m = 2k^2 - k$
 $= 2 \left(k^2 - \frac{1}{2}k \right)$
 $= 2 \left\{ \left(k - \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right\}$
 $= 2 \left(k - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{8}$

したがって, $k = \frac{1}{4}$ のとき, 最小値 $-\frac{1}{8}$ をとる.

3 $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 - 3m - 2$ とおくと

$f(x) = (x^2 - 2mx) + 2m^2 - 3m - 2$
 $= \{(x - m)^2 - m^2\} + 2m^2 - 3m - 2$
 $= (x - m)^2 + m^2 - 3m - 2$

$f(x) = 0$ が $x < 0$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は



$$\begin{cases} f(0) = 2m^2 - 3m - 2 > 0 \\ m < 0 \\ m^2 - 3m - 2 < 0 \end{cases}$$

第 1 式から $m < -\frac{1}{2}, 2 < m$

第 3 式から $\frac{3 - \sqrt{17}}{2} < m < \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$

したがって, 求める m の値の範囲は $\frac{3 - \sqrt{17}}{2} < m < -\frac{1}{2}$

4 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} BC^2 &= 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos 60^\circ \\ &= 25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \times \frac{1}{2} \\ &= 31 \end{aligned}$$

$$BC > 0 \text{ であるから } BC = \sqrt{31}$$

(2) 正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \times \frac{BC}{\sin A} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{31}}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{31} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{93}}{3} \end{aligned}$$

$$(3) S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

(4) $AD = x$ とすると, $\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \sin 30^\circ &= \frac{15\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}x &= \frac{15\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{30\sqrt{3}}{11}$$

1.8.2 一般II期試験 70分

1 次の各問に答えよ.

(1) $x^8 - 256$ を因数分解せよ.

(2) $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2}$ とするとき, $x^2 + y^2$ および $x^3 + y^3$ の値を求めよ.

(3) $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{3}{2}$ であるとき, $\tan \theta$ の値を求めよ.

(4) x および y が $x + y = 2$ を満たすとき, $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ.

(5) 不等式 $x^2 - 2(m+1)x + m + 3 > 0$ が常に成り立つような m の値の範囲を求めよ.

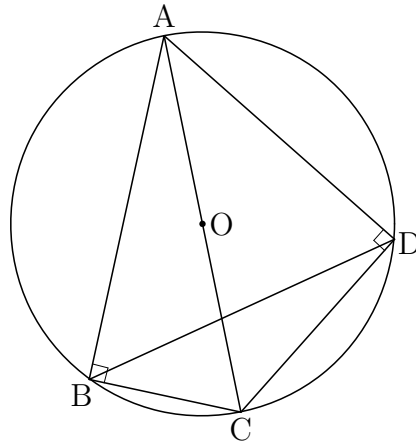
2 以下の空欄に入る値を求めよ.

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, 関数 $f(\theta) = 2 \cos \theta - 2 \sin^2 \theta + 6$ は, $\theta =$ $^\circ$ のとき
最小値 をとり, $\theta =$ $^\circ$ のとき最大値 をとる.

3 2次方程式 $x^2 - 2ax + (a-1)^2 = 0$ について以下の問いに答えよ.

- (1) 異なる2つの実数解を持つとき, 定数 a の値の範囲を求めよ.
- (2) 2つの解を α, β としたとき, $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$ となるような定数 a の値の範囲を求めよ.

4 四角形 ABCD において, $BC = 2, CD = 3, \angle DAB = 60^\circ, \angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ とする. また四角形 ABCD は点 O を中心とする円に内接している.



- (1) 対角線 BD の長さを求めよ.
- (2) 対角線 AC の長さを求めよ.
- (3) 辺 AB の長さを求めよ.
- (4) 辺 DA の長さを求めよ.

解答例

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (1) \quad x^8 - 256 &= (x^4 + 16)(x^4 - 16) \\ &= (x^4 + 16)(x^2 + 4)(x^2 - 4) \\ &= (x^4 + 16)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x + y &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{5} \\ xy &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{5 - 2}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= (\sqrt{5})^2 - 2 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= (\sqrt{5})^3 - 3 \times \frac{3}{4} \times \sqrt{5} = \frac{11\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1} = \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1}$$

であるから

$$\frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1} = \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad \tan \theta = 5$$

(4) $y = 2 - x$ であるから

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (2 - x)^2 \\ &= 2x^2 - 4x + 4 \\ &= 2(x - 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

したがって, 最小値は 2

(5) 与えられた 2 次不等式の係数について

$$D = \{-2(m + 1)\}^2 - 4 \cdot 1(m + 3) = 4(m^2 + m - 2)$$

とする.

2 次不等式の x^2 の係数が正であるから, $D < 0$ が成り立てばよい.

$$m^2 + m - 2 < 0 \quad \text{から} \quad (m + 2)(m - 1) < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -2 < m < 1$$

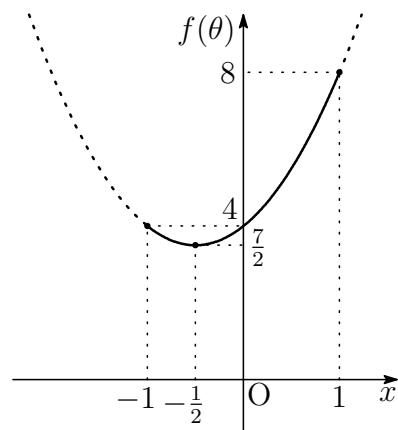
$$\begin{aligned}
 & \boxed{2} \quad 2 \cos \theta - 2 \sin^2 \theta + 6 \\
 & = 2 \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) + 6 \\
 & = 2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 4
 \end{aligned}$$

$\cos \theta = x$ とおくと,

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $-1 \leq x \leq 1$ であり

$$f(\theta) = 2x^2 + 2x + 4$$

$$\text{よって } f(\theta) = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{2}$$



したがって $x = -\frac{1}{2}$ すなわち $\theta = 120^\circ$ のとき 最小値 $\frac{7}{2}$
 $x = 1$ すなわち $\theta = 0^\circ$ のとき 最大値 8

$\boxed{3}$ (1) 与えられた2次方程式の係数について

$$D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a-1)^2 = 4(2a-1)$$

とする. 異なる2つの実数解をもつための条件は, $D > 0$ が成り立つことであるから $2a - 1 > 0$

これを解いて $a > \frac{1}{2}$

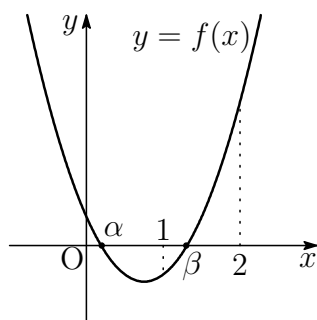
(2) $f(x) = x^2 - 2ax + (a-1)^2$ とする. x^2 の係数が正であるから, $f(x) = 0$ の2つの解 α, β が $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$ を満たすためには

$$f(0) = (a-1)^2 > 0 \quad \text{すなわち } a \neq 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f(1) = a^2 - 4a + 2 < 0 \quad \text{すなわち } 2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f(2) = a^2 - 6a + 5 > 0 \quad \text{すなわち } a < 1, 5 < a \quad \dots \textcircled{3}$$

したがって, $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ の共通範囲を求めて $2 - \sqrt{2} < a < 1$



$$\boxed{4} \quad (1) \quad \angle BCD = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$\triangle BCD$ に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} BD^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 120^\circ \\ &= 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 19 \end{aligned}$$

$$BD > 0 \text{ であるから } BD = \sqrt{19}$$

- (2) 点 O を中心とする円は $\triangle BCD$ の外接円であり, AC はその直径であるから, 外接円の半径を R とすると

$$AC = 2R$$

また, 正弦定理により

$$2R = \frac{BD}{\sin 120^\circ} = \sqrt{19} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{57}}{3}$$

$$\text{したがって } AC = \frac{2\sqrt{57}}{3}$$

- (3) $\angle ABC = 90^\circ$ であるから

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = \left(\frac{2\sqrt{57}}{3}\right)^2 - 2^2 = \frac{192}{9}$$

$$AB > 0 \text{ であるから } AB = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

- (4) $\angle CDA = 90^\circ$ であるから

$$DA^2 = AC^2 - CD^2 = \left(\frac{2\sqrt{57}}{3}\right)^2 - 3^2 = \frac{147}{9}$$

$$DA > 0 \text{ であるから } DA = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

1.9 熊本県立保育大学校

1.9.1 一般試験 60分

設問 1 次の循環小数 x を分数で表しなさい。

$$x = 0.\dot{5}6\dot{7}$$

設問 2 次のような四角形 ABCD の面積を求めなさい。

$$AB = 2, BC = \sqrt{3} + 1, CD = \sqrt{2}, \angle B = 60^\circ, \angle C = 75^\circ$$

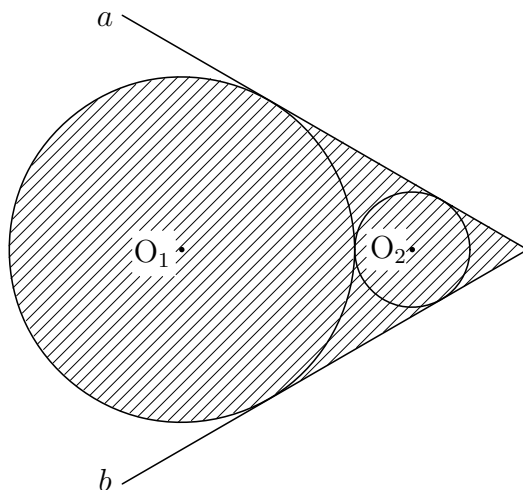
設問 3 次の不等式の解を求めなさい。

$$|x^2 - 2x - 3| \leq x + 1$$

設問 4 任意の整数 x, y に対し, $x = a \times y + b$ ($0 \leq b < y$) を満たす「整数 a 」と「自然数か 0 である b 」が, ただ 1 組存在する。いま, $x = -21, y = 6$ のとき, a と b を求めなさい。

設問 5 直線 $x + y = k$ が, 2 点 A(-5, -8), B(5, 0) を結ぶ線分 AB と交わる時, k の値の範囲を求めなさい。

設問 6 図のように半径 6cm の円 O_1 と半径 2cm の円 O_2 が外接していて, その共通外接線 a と b があるとき, 斜線部分の面積を求めなさい。ただし, 円周率は π とする。



解答例

設問 1 $x = 0.567567567\cdots$, $1000x = 567.567567567\cdots$ であるから

$$1000x - x = 567$$

すなわち $999x = 567$

よって $x = \frac{567}{999} = \frac{21}{37}$

設問 2 $\triangle ABC$ に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} CA^2 &= 2^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2 \cdot 2(\sqrt{3} + 1) \cos 60^\circ \\ &= 4 + (3 + 2\sqrt{3} + 1) - 4(\sqrt{3} + 1) \times \frac{1}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$CA > 0$ であるから $CA = \sqrt{6}$
 $\triangle ABC$ において, $\angle BCA = \theta$ とし,
 正弦定理を使うと

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin \theta}$$

$$\sqrt{6} \sin \theta = 2 \sin 60^\circ$$

すなわち $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

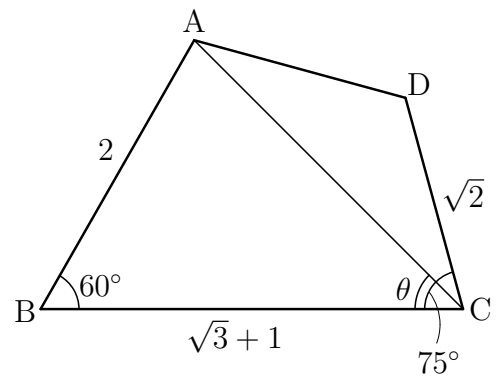
$AB < CA$ より $\theta < B$ であるから

$$\theta = 45^\circ$$

また, $\angle ACD = 75^\circ - \theta = 30^\circ$

したがって, 求める四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \sqrt{6} \sqrt{2} \sin 30^\circ \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



[補足] A から BC に垂線を下ろすと簡単に求めることができる.

設問 3 $|x^2 - 2x - 3| \leq x + 1$ より $-(x + 1) \leq x^2 - 2x - 3 \leq x + 1$ であるから

$$-(x + 1) \leq x^2 - 2x - 3 \text{ を解いて } x \leq -1, 2 \leq x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 2x - 3 \leq x + 1 \text{ を解いて } -1 \leq x \leq 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } x = -1, 2 \leq x \leq 4$$

設問 4 $x = -21, y = 6$ より $-21 = 6a + b$ ($0 \leq b < 6$)

$$\text{すなわち } b = -6a - 21 \quad \cdots \textcircled{1} \text{ であるから}$$

$$0 \leq -6a - 21 < 6$$

$$\text{各辺に } 21 \text{ をたして } 21 \leq -6a < 27$$

$$\text{各辺を } -6 \text{ で割って } -\frac{9}{2} \leq a < -\frac{7}{2}$$

$$a \text{ は整数であるから } a = -4$$

$$a = -4 \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して } b = 3$$

設問 5 直線 $x + y = k$ が点 $A(-5, -8)$ を通るとき

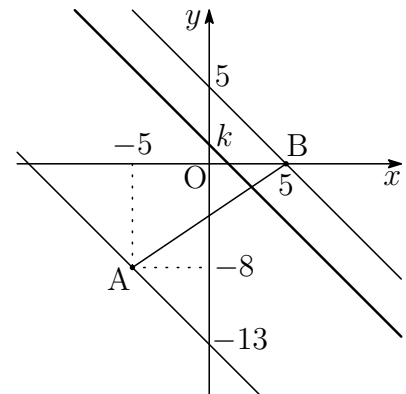
$$k = -13$$

直線 $x + y = k$ が点 $B(5, 0)$ を通るとき

$$k = 5$$

直線 $x + y = k$ は、傾き -1 、切片 k の直線であるから、線分 AB とこの直線が交わるとき
の k の値の範囲は

$$-13 \leq k \leq 5$$



設問 6 $\triangle O_1P_1Q$ と $\triangle OP_2Q$ の相似比は 3 : 1

$O_2Q = x$ とすると $O_1Q = 6 + 2 + x = 8 + x$ であるから

$(8 + x) : x = 3 : 1$ これを解いて $x = 4$

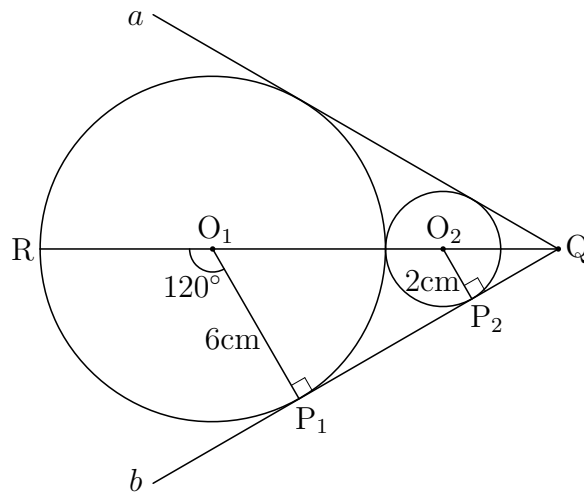
したがって $\angle O_2QP_2 = 30^\circ$

ゆえに $\triangle O_1P_1Q$ は $\angle QO_1P_1 = 60^\circ$, $P_1Q = 6\sqrt{3}$ の直角三角形である.

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S &= \triangle O_1P_1Q + \text{扇形 } O_1P_1R \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} + \pi \cdot 6^2 \times \frac{120}{360} \\ &= 18\sqrt{3} + 12\pi \end{aligned}$$

したがって $S = 36\sqrt{3} + 24\pi$ (cm²)



1.10 熊本県立技術短期大学校

1.10.1 推薦試験 90分

熊本県立技術短期大学校

推薦入学試験問題

数学I(90分)

平成17年9月18日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題冊子および答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題・答案用紙の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督者に合図し、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆又はシャープペンシル、ナイフ又は鉛筆削り、消しゴム、定規、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能及び翻訳機能を持つ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

- [1] (1) $x = \frac{4 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$ の分母を有理化すると $x = \boxed{\text{ア}}$ となる。このとき、 $x^2 + 2x + 1$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $2x^2 - xy - y^2 + 3x + 1 = 0$ を満たす y を x で表すと $y = \boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 関数 $y = -3x^2 + 6x + a$ の $0 \leq x \leq 3$ における最大値が 7 であるとする。このとき、 $a = \boxed{\text{オ}}$ であり、 $0 \leq x \leq 3$ における y の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ となる。
- (4) 関数 $y = |2x - 1|$ の定義域が $-1 \leq x \leq 2$ であるならば値域は $\boxed{\text{キ}} \leq y \leq \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ で、 $\tan \theta = 2$ のとき、 $\sin \theta = \boxed{\text{ケ}}$, $\cos \theta = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) すべての x に対して、 $-2x^2 + (a + 3)x + \frac{a}{2} < 0$ であるならば、 $\boxed{\text{サ}} < a < \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 2 次関数 $y = x^2$ の表すグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ス}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{セ}}$ だけ平行移動した曲線の式は、 $y = x^2 + 4x - 2$ となる。
- (3) 3 点 $(1, 1)$, $(\frac{1}{2}, -2)$, $(-2, 3)$ を通る 2 次関数は、 $y = \boxed{\text{ソ}}x^2 + \boxed{\text{タ}}x + \boxed{\text{チ}}$ である。
- (4) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ で、 $2\sin^2 \theta - 3\sqrt{3}\cos(90^\circ - \theta) + 3 = 0$ が成り立つとき、 $\theta = \boxed{\text{ツ}}^\circ$ または $\theta = \boxed{\text{テ}}^\circ$ である。
- (5) $\triangle ABC$ において、 $AB = 10$, $BC = 5$, $\angle B = 60^\circ$ のとき、 $AC = \boxed{\text{ト}}$, $\angle A = \boxed{\text{ナ}}^\circ$ である。
- [3] 不等式 $|x + 1| \geq 2|x|$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{ニ}} \leq x \leq \boxed{\text{ヌ}}$ である。この範囲の x に対して、 $y = 3x^2 + 4x - 1$ の最小値は $\boxed{\text{ネ}}$, 最大値は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

- [4] 2点 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ を通る放物線 $C : y = 2(x - a)(x - b)$ を考える。ただし, $a < b$ とする。A, B の中点を M とし, 2点 A, M を通る放物線の頂点 P が C 上にあるとすると, P の座標を a, b を用いて表すと, (,) となる。2点 M, B を通り, C 上に頂点をもつ放物線の頂点 Q は, P を x 軸方向に だけ平行移動した点であるから, Q の座標は a, b を用いて, (,) と書ける。さらに, $\angle PMQ = 90^\circ$ とすると, $b - a =$ となる。
- [5] 円に内接する四角形 ABCD において, $AB = 4$, $BC = 4$, $CD = 1$, $DA = 5$ のとき, $\angle A =$ $^\circ$, $\angle C =$ $^\circ$, $BD =$ である。また, この四角形の面積は である。

解答例

$$\begin{aligned}
 [1] (1) \quad x &= \frac{4 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(4 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\
 &= \frac{4 \times 2 + 4 \times (-\sqrt{2}) + \sqrt{2} \times 2 + \sqrt{2} \times (-\sqrt{2})}{2^2 - (\sqrt{2})^2} \\
 &= \frac{8 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2}{4 - 2} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = \mathbf{3 - \sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2x + 1 &= (x + 1)^2 = \{(3 - \sqrt{2}) + 1\}^2 \\
 &= (4 - \sqrt{2})^2 \\
 &= 4^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\
 &= \mathbf{18 - 8\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

(答) ア. $3 - \sqrt{2}$ イ. $18 - 8\sqrt{2}$

(2) 左辺を因数分解すると (x について整理)

$$\begin{aligned}
 &2x^2 - xy - y^2 + 3x + 1 \\
 &= 2x^2 + (-y + 3)x - (y^2 - 1) \\
 &= 2x^2 + (-y + 3)x - (y + 1)(y - 1) \\
 &= \{x - (y - 1)\}\{2x + (y + 1)\} \\
 &= (x - y + 1)(2x + y + 1)
 \end{aligned}$$

1	\times	$-(y - 1)$	\longrightarrow	$-2y + 2$
2	\times	$y + 1$	\longrightarrow	$y + 1$
2	\times	$-(y + 1)(y - 1)$	\longrightarrow	$-y + 3$

したがって, $(x - y + 1)(2x + y + 1) = 0$ から

$$x - y + 1 = 0 \quad \text{または} \quad 2x + y + 1 = 0$$

これを y について解いて $y = x + 1, -2x - 1$

(答) ウ. $x + 1, -2x - 1$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad -3x^2 + 6x + a &= -3(x^2 - 2x) + a \\
 &= -3\{(x-1)^2 - 1^2\} + a \\
 &= -3(x-1)^2 + a + 3
 \end{aligned}$$

よって $y = -3(x-1)^2 + a + 3$

$0 \leq x \leq 3$ でのグラフは右の図の実線部分である。よって、 y は

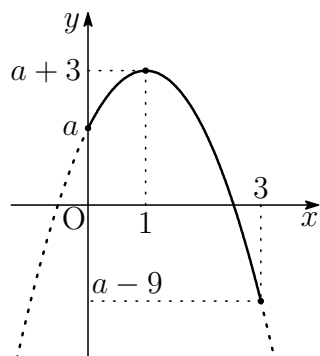
$x = 1$ で最大値 $a + 3$ をとり、

$x = 3$ で最小値 $a - 9$ をとる。

したがって $a + 3 = 7$ を解いて $a = 4$

このとき、最小値は $4 - 9 = -5$

(答) オ. 4 カ. -5

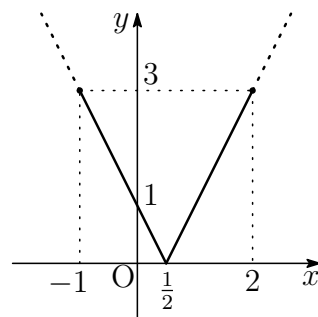


$$(4) \quad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & (x \geq \frac{1}{2}) \\ -(2x-1) & (x < \frac{1}{2}) \end{cases} \text{ であるから}$$

$-1 \leq x \leq 2$ での $y = |2x-1|$ のグラフは右の図の実線部分である。よって、値域は

$$0 \leq y \leq 3$$

(答) キ. 0 ク. 3



$$(5) \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ から}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\cos \theta > 0$ である。

よって $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

また $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(答) ケ. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ コ. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

[2] (1) $-2x^2 + (a + 3)x + \frac{a}{2}$ の x^2 の係数は負であり, すべての x に対して,
 $-2x^2 + (a + 3)x + \frac{a}{2} < 0$ であるためには, $D < 0$ を満たせばよいから

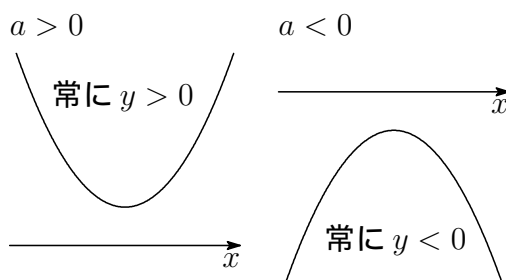
$$\begin{aligned} (a + 3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot \frac{a}{2} &< 0 \\ a^2 + 10a + 9 &< 0 \\ (a + 1)(a + 9) &< 0 \\ -9 &< a < -1 \end{aligned}$$

(答) サ. -9 シ. -1

研究

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は, $D < 0$ のとき x 軸との共有点は存在しないことから, y の値は定符号となる. このとき a の符号により

$$\begin{aligned} a > 0, D < 0 &\iff \text{常に } y > 0 \\ a < 0, D < 0 &\iff \text{常に } y < 0 \end{aligned}$$



2次式の定符号

$$\begin{aligned} \text{常に } ax^2 + bx + c > 0 &\iff a > 0, D < 0 \\ \text{常に } ax^2 + bx + c < 0 &\iff a < 0, D < 0 \end{aligned}$$

[補足]

$$\begin{aligned} \text{常に } ax^2 + bx + c \geq 0 &\iff a > 0, D \leq 0 \\ \text{常に } ax^2 + bx + c \leq 0 &\iff a < 0, D \leq 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x^2 + 4x - 2 &= (x + 2)^2 - 2^2 - 2 \\ &= (x + 2)^2 - 6 \end{aligned}$$

よって、 $y = x^2$ の頂点は $(0, 0)$ 、 $y = x^2 + 4x - 2$ の頂点は $(-2, -6)$ であるから、 $y = x^2$ を x 軸方向に -2 、 y 軸方向に -6 だけ平行移動したものが $y = x^2 + 4x - 2$ である。

(答) ス. -2 セ. -6

(3) 求める2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする。

グラフが3点 $(1, 1)$ 、 $(\frac{1}{2}, -2)$ 、 $(-2, 3)$ を通るから

$$1 = a + b + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-2 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$3 = 4a - 2b + c \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} \text{ から } 3a - 3b = 2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b = 3 \quad \text{すなわち } 3a + 2b = 12 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } a = \frac{8}{3}, b = 2$$

$$\text{これらを } \textcircled{1} \text{ に代入して } c = -\frac{11}{3}$$

$$\text{よって、求める2次関数は } y = \frac{8}{3}x^2 + 2x - \frac{11}{3}$$

(答) ソ. $\frac{8}{3}$ タ. 2 チ. $-\frac{11}{3}$

(4) 方程式を変形すると $2\sin^2\theta - 3\sqrt{3}\sin\theta + 3 = 0$

因数分解すると $(\sin\theta - \sqrt{3})(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $0 < \sin\theta < 1$ であるから $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

この範囲で $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

(答) ツ. テ. 60, 120

[別解] $2\sin^2\theta - 3\sqrt{3}\sin\theta + 3 = 0$ を解の公式に適用すると

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{-(-3\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{4} \\ &= \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$0 < \sin\theta < 1$ に注意して $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) 余弦定理により

$$\begin{aligned}AC^2 &= 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cos 60^\circ \\ &= 100 + 25 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 75\end{aligned}$$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

正弦定理により $\frac{5}{\sin A} = \frac{5\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$

よって $\sin A = \frac{5}{5\sqrt{3}} \sin 60^\circ = \frac{5}{5\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$

$A + C = 120^\circ$ より $A < 120^\circ$ であるから $A = 30^\circ$

(答) ト. $5\sqrt{3}$ ナ. 30

$$[3] |x+1| = \begin{cases} x+1 & (x \geq -1) \\ -x-1 & (x < -1) \end{cases}, \quad |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{であるから}$$

$x < -1$ のとき

$$-x-1 \geq 2(-x) \quad \text{を解いて} \quad x \geq 1$$

このとき $x \geq 1$ は不適.

$-1 \leq x < 0$ のとき

$$x+1 \geq 2(-x) \quad \text{を解いて} \quad x \geq -\frac{1}{3}$$

$$\text{このときの } x \text{ の値の範囲は} \quad -\frac{1}{3} \leq x < 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$x \geq 0$ のとき

$$x+1 \geq 2x \quad \text{を解いて} \quad x \leq 1$$

$$\text{このときの } x \text{ の値の範囲は} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, 求める } x \text{ の値の範囲は} \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x - 1 &= 3 \left(x^2 + \frac{4}{3}x \right) - 1 \\ &= 3 \left\{ \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right\} - 1 \\ &= 3 \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 1 \\ &= 3 \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

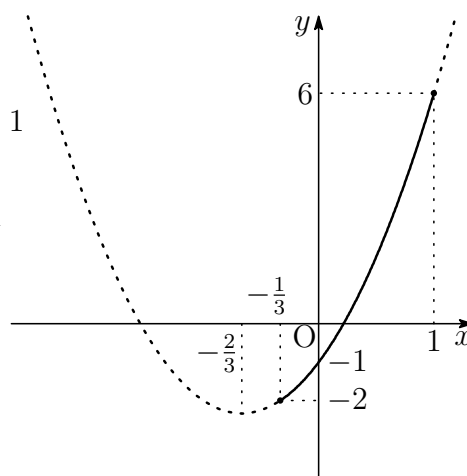
$$\text{よって} \quad y = 3 \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{7}{3}$$

$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ でのグラフは右の図の実線部分である. よって, y は

$$x = -\frac{1}{3} \text{ で最小値 } -2 \text{ をとり,}$$

$$x = 1 \text{ で最大値 } 6 \text{ をとる.}$$

(答) 二. $-\frac{1}{3}$ 又. 1 ネ. -2 ノ. 6



[4] M は A, B の中点であるから, M の x 座標は

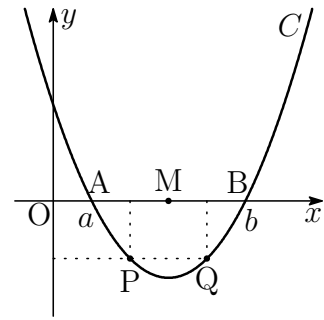
$$x = \frac{a+b}{2}$$

2点 A, M を通る放物線の軸は, A, M の中点を通るから P の x 座標は

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a+b}{2} \right) = \frac{3a+b}{4}$$

であり, P の y 座標は

$$\begin{aligned} y &= 2 \left(\frac{3a+b}{4} - a \right) \left(\frac{3a+b}{4} - b \right) \\ &= 2 \times \frac{b-a}{4} \times \frac{3a-3b}{4} = -\frac{3}{8}(b-a)^2 \end{aligned}$$



P と Q は放物線 C の軸 $x = \frac{a+b}{2}$ に関して対称であり, $PQ = \frac{1}{2} \times AB$ であるから, Q は P を x 軸方向に $\frac{b-a}{2}$ だけ平行移動したものである.

したがって, Q の座標は

$$\left(\frac{3a+b}{4} + \frac{b-a}{2}, -\frac{3}{8}(b-a)^2 \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{a+3b}{4}, -\frac{3}{8}(b-a)^2 \right)$$

$\angle PMQ = 90^\circ$ のとき, A, M の中点を R とするとき, $\triangle RPM$ は直角二等辺三角形であるから $PR = RM$ より

$$\frac{3}{8}(b-a)^2 = \frac{b-a}{4}$$

$b-a \neq 0$ であるから $b-a = \frac{2}{3}$

(答) 八. $\frac{3a+b}{4}$ ヒ. $-\frac{3}{8}(b-a)^2$ フ. $\frac{b-a}{2}$

 へ. $\frac{a+3b}{4}$ ホ. $-\frac{3}{8}(b-a)^2$ マ. $\frac{2}{3}$

[5] $\angle A = \theta$ とする.

$\triangle ABD$ において, 余弦定理を用いると

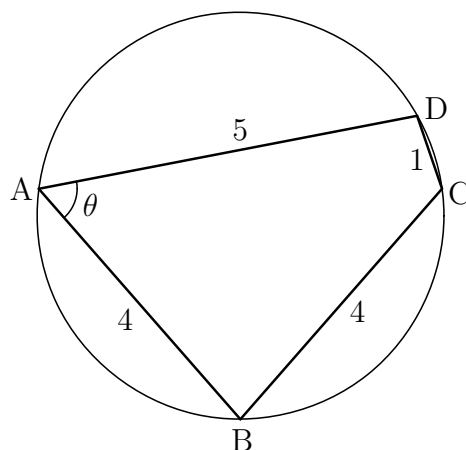
$$\begin{aligned} BD^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \theta \\ &= 41 - 40 \cos \theta \end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle C = 180^\circ - \theta$$

$\triangle BCD$ において, 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 17 - 8(-\cos \theta) \\ &= 17 + 8 \cos \theta \end{aligned}$$



よって $41 - 40 \cos \theta = 17 + 8 \cos \theta$ これを解いて $\cos \theta = \frac{1}{2}$

また $\cos \theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ は $\theta = 60^\circ$

したがって $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

このとき $BD^2 = 21$ となるから $BD = \sqrt{21}$

四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \sin 120^\circ \\ &= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

(答) ミ. 60 ム. 120 ヌ. $\sqrt{21}$ モ. $6\sqrt{3}$

1.10.2 一般試験 90分

数学I・II(90分)

平成18年2月12日

【受験上の注意】

- 1 「解答始め」の合図があるまでは、問題冊子及び答案用紙を開かないこと。
- 2 解答始めの合図があったら、まず問題・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
- 3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
- 4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。
- 5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
- 6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆またはシャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び、眼鏡のみとする。
- 7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。
- 8 携帯電話の電源は切っておくこと。

- [1] (1) 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の2つの解を α, β とし, $\alpha + 1, \beta + 1$ を解とする2次方程式を $x^2 + x - 4 = 0$ とする。このとき $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 円 $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = x + k$ が2点で交わるとき, k の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < k < \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $180^\circ < \theta < 270^\circ$, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ であるとき, $\sin 2\theta = \boxed{\text{オ}}$, $\cos 2\theta = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いると, 2^{20} は $\boxed{\text{キ}}$ 桁, 3^{10} は $\boxed{\text{ク}}$ 桁の数である。
- (5) 曲線 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - a$ と x 軸との交点の数は, $a = 5$ のとき $\boxed{\text{ケ}}$ 個, $a = 8$ のとき $\boxed{\text{コ}}$ 個である。
- [2] (1) 直線 $\ell: y = 2x + 3$ と点 $(1, 5)$ で接する半径 $\sqrt{5}$ の円で, ℓ の下方にある円の中心の座標は $(\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}})$ である。
- (2) x, y が4つの不等式 $x + 2y \leq 3$, $3x + y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ を同時に満たすとき, $2x + 3y$ は $x = \boxed{\text{ス}}$, $y = \boxed{\text{セ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ソ}}$ をとる。
- (3) 不等式 $\log_2(2x + 3) \leq \log_4(-4x - 3)$ を満たす x の範囲は $\boxed{\text{タ}} < x \leq \boxed{\text{チ}}$ である。
- (4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で $2 \sin \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta$ が最大となるのは, $\theta = \boxed{\text{ツ}}^\circ$ のときで, 最大値は $\boxed{\text{テ}}$ である。
- [3] 放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上の点 $P(1, 0)$, $Q(3, -2)$ における C の接線をそれぞれ ℓ, m とする。 ℓ, m の交点の座標が $(2, 1)$ であるとき, $a = \boxed{\text{ト}}$, $b = \boxed{\text{ナ}}$, $c = \boxed{\text{ニ}}$ である。このとき, C と ℓ, m で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。
- [4] 原点 O を通り, x 軸の正方向とのなす角が θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) である直線を ℓ とする。2点 $P(t, 0)$ と $Q(0, 2 - t)$ を結ぶ直線が ℓ と直交するとき, $\tan \theta$ を t の式で表すと, $\tan \theta = \boxed{\text{ネ}}$ である。ただし, $0 < t < 2$ とする。また, このとき線分 PQ と ℓ の交点を R とすると, 線分 QR の長さは t と $\cos \theta$ を用いて $\boxed{\text{ノ}}$ と書ける。線分 PR の長さが線分 QR の長さの3倍であれば, $t = \boxed{\text{ハ}}$ であり, $\theta = \boxed{\text{ヒ}}^\circ$ である。

解答例

[1] (1) 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b$$

2 次方程式 $x^2 + x - 4 = 0$ の解と係数の関係から

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) = -1, \quad (\alpha + 1)(\beta + 1) = -4$$

すなわち $(\alpha + \beta) + 2 = -1, \quad \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = -4$

よって $-a + 2 = -1, \quad b + (-a) + 1 = -4$

これらを解いて $a = 3, b = -2$

(答) ア. 3 イ. -2

(2) $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ と $y = x + k$ から y を消去して整理すると

$$2x^2 + 2(k - 1)x + k^2 - 4 = 0$$

が 2 点で交わるのは、 $D > 0$ のときであるから

$$\{2(k - 1)\}^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 4) > 0$$

$$-4k^2 - 8k + 36 > 0$$

$$k^2 + 2k - 9 < 0$$

したがって $-1 - \sqrt{10} < k < -1 + \sqrt{10}$

(答) ウ. $-1 - \sqrt{10}$ エ. $-1 + \sqrt{10}$

【別解】点 $(1, 0)$ と直線 $x - y + k = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|1 - 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k + 1|}{\sqrt{2}}$$

$d < \sqrt{5}$ より $|k + 1| < \sqrt{10}$

よって $-\sqrt{10} < k + 1 < \sqrt{10}$

したがって $-1 - \sqrt{10} < k < -1 + \sqrt{10}$

$$(3) \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$180^\circ < \theta < 270^\circ$ より $\sin \theta < 0$ であるから

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{したがって } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$$

$$\text{(答) オ. } \frac{24}{25} \quad \text{カ. } \frac{7}{25}$$

$$(4) \quad \log_{10} 2^{20} = 20 \log_{10} 2 = 20 \times 0.3010 = 6.020$$

$6 < \log_{10} 2^{20} < 7$ であるから

$$\log_{10} 10^6 < \log_{10} 2^{20} < \log_{10} 10^7$$

よって $10^6 < 2^{20} < 10^7$

したがって、 2^{20} は7桁の数である。

$$\log_{10} 3^{10} = 10 \log_{10} 3 = 10 \times 0.4771 = 4.771$$

$4 < \log_{10} 3^{10} < 5$ であるから

$$\log_{10} 10^4 < \log_{10} 3^{10} < \log_{10} 10^5$$

よって $10^4 < 3^{10} < 10^5$

したがって、 3^{10} は5桁の数である。

$$\text{(答) キ. 7 \quad ク. 5}$$

(5) 曲線 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - a$ と x 軸との共有点の個数は、方程式

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - a = 0$$

の実数解の個数である。すなわち $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を調べればよい。

関数 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ について

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

x	...	-1	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 7	↘	極小 -20	↗

y の増減表は、右のようになる。

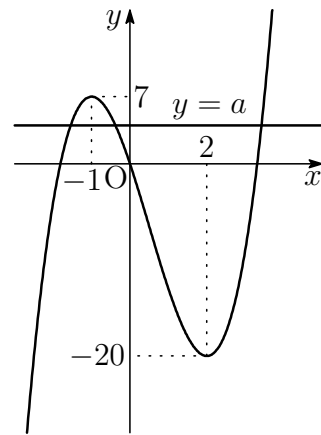
よって、 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ のグラフは、右の図のようになる。

したがって、求める共有点の個数は

$a = 5$ のとき 3 個

$a = 8$ のとき 1 個

(答) ケ. 3 コ. 1



[2] (1) 点 (1, 5) を P とし、円の中心の座標を $C(a, b)$ とすると $b < 5$

直線 l の傾きは 2, 直線 PC の傾きは $\frac{b-5}{a-1}$

$PC \perp l$ であるから

$$2 \cdot \frac{b-5}{a-1} = -1 \quad \text{すなわち} \quad a-1 = -2(b-5) \quad \dots \textcircled{1}$$

$PC = \sqrt{5}$ すなわち $PC^2 = 5$ より

$$(a-1)^2 + (b-5)^2 = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

① を ② に代入して

$$4(b-5)^2 + (b-5)^2 = 5$$

したがって $(b-5)^2 = 1$

$b-5 < 0$ であるから $b-5 = -1$

よって $b = 4$ これを ① に代入して $a = 3$ ゆえに 中心 (3, 4)

(答) サ. 3 シ. 4

(2) 与えられた連立不等式の表す領域を A とする .

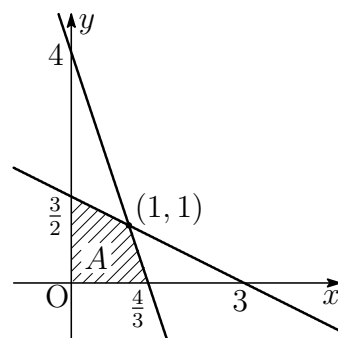
領域 A は 4 点

$$(0, 0), \left(\frac{4}{3}, 0\right), (1, 1), \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

を頂点とする四角形の周および内部である .

$$2x + 3y = k \quad \cdots \textcircled{1}$$

とにおいて, 直線 $\textcircled{1}$ が領域 A の点を通るときの k の値を調べる .



$$(0, 0) \text{ を通るとき } k = 0, \quad \left(\frac{4}{3}, 0\right) \text{ を通るとき } k = \frac{8}{3}$$

$$(1, 1) \text{ を通るとき } k = 5, \quad \left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ を通るとき } k = \frac{9}{2}$$

これ以外で領域 A の点を通るとき $0 < k < 5$

したがって, $2x + 3y$ は

$$x = 1, y = 1 \text{ のとき最大値 } 5 \text{ をとる.}$$

(答) ス. 1 セ. 1 ソ. 5

(3) $\log_2(2x + 3) = \log_4(2x + 3)^2$ より $\log_4(2x + 3)^2 \leq \log_4(-4x - 3)$

したがって

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ (2x + 3)^2 \leq -4x - 3 \end{cases}$$

が求める x の値の範囲である .

$$\text{第1式から } x > -\frac{3}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{第2式から } 4x^2 + 16x + 12 \leq 0$$

$$\text{すなわち } (x + 1)(x + 3) \leq 0$$

$$\text{したがって } -3 \leq x \leq -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

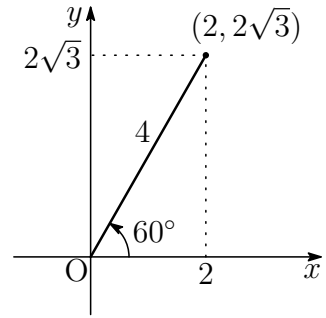
よって, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $-\frac{3}{2} < x \leq -1$

(答) タ. $-\frac{3}{2}$ チ. -1

(4) $2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta = 4\sin(\theta + 60^\circ)$ であるから

$\theta = 30^\circ$ のとき最大値 4 をとる.

(答) ツ. 30 テ. 4



[3] 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は, P(1, 0), Q(3, -2) を通るから

$$0 = a + b + c \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-2 = 9a + 3b + c \quad \dots \textcircled{2}$$

点 (2, 1) を R とすると

直線 PR の傾きは $\frac{1-0}{2-1} = 1$, 直線 RQ の傾きは $\frac{-2-1}{3-2} = -3$

$y = ax^2 + bx + c$ を微分すると $y' = 2ax + b$

直線 PR および直線 RQ の傾きは, P および Q の接線の傾きに等しいから

$$2a + b = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$6a + b = -3 \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④ より $a = -1, b = 3$

これらを ① に代入して $c = -2$

$a = -1, b = 3, c = -2$ は ② を満たす.

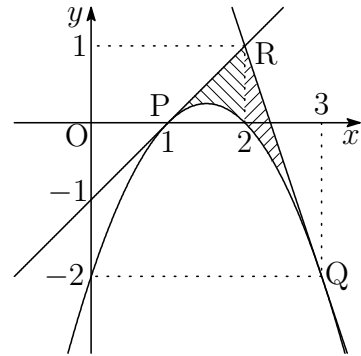
したがって, $a = -1, b = 3, c = -2$

直線 PR の方程式は $y = x - 1$, 直線 RQ の方程式は $y = -3x + 7$ であるから

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(x-1) - (-x^2 + 3x - 2)\} dx + \int_2^3 \{(-3x+7) - (-x^2 + 3x - 2)\} dx \\ &= \int_1^2 (x-1)^2 dx + \int_2^3 (x-3)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_2^3 = \frac{1}{3}(2-1)^3 - 0 + \left\{ 0 - \frac{1}{3}(2-3)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(答) ト. -1 ナ. 3 ニ. -2 ヌ. $\frac{2}{3}$



[4] 直線 PQ の傾きは $\frac{0 - (2 - t)}{t - 0} = \frac{t - 2}{t}$

PQ \perp ℓ であるから

$$\frac{t - 2}{t} \tan \theta = -1$$

すなわち $\tan \theta = \frac{t}{2 - t} \dots \textcircled{1}$

$\angle OQR = \theta$ であるから

$$\begin{aligned} QR &= OQ \cos \theta \\ &= (2 - t) \cos \theta \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

PR = OP sin θ であるから PR = t sin $\theta \dots \textcircled{3}$

線分 PR の長さが線分 QR の長さの 3 倍であれば、 $\frac{PR}{QR} = 3$ となるから

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$$\begin{aligned} \frac{t \sin \theta}{(2 - t) \cos \theta} &= 3 \\ \frac{t}{2 - t} \tan \theta &= 3 \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ より $\tan^2 \theta = 3$

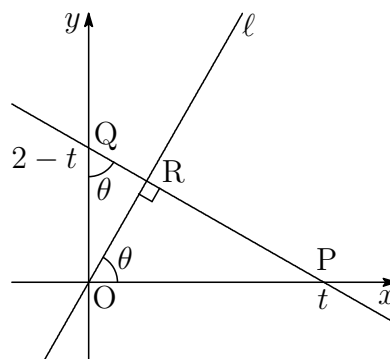
$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\tan \theta > 0$ であるから

$$\tan \theta = \sqrt{3} \quad \text{これを満たす } \theta \text{ は } \theta = 60^\circ$$

このとき、 $\frac{t}{2 - t} = \sqrt{3}$ であるから

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{3}(2 - t) \\ (\sqrt{3} + 1)t &= 2\sqrt{3} \\ t &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

(答) ネ. $\frac{t}{2 - t}$ ノ. $(2 - t) \cos \theta$ ハ. $3 - \sqrt{3}$ ヒ. 60



第 2 章 医療系

平成 18 年度 (2006) に新教育課程での入学試験に移行し、県内の医療系専門学校等の入試科目は数学 I および数学 A の内容が大きく変化したため、平面幾何の出題が見られるなど新たな対応が求められたようである。また、問題および出題形式について、学校ごとに特徴があり、出題の傾向も把握しやすい。

なお、本書に掲載した入学試験問題は、次のサイトからもダウンロード (PDF) することができる¹。

<http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/>

本書に掲載した平成 18 年度 (2006) 入学試験問題は次のとおりである。

本書に掲載した 2006 年度入学試験問題		
学校名	試験科目	試験日
メディカルカレッジ青照館 (推薦)	I・A	10/23, 11/23
メディカルカレッジ青照館 (一般)	I・A	12/23, 2/11, 3/21
熊本リハビリテーション学院 (一般)	I・A	12/17, 2/18
九州中央リハビリテーション学院 (一般)	I	11/9, 1/11
西日本リハビリテーション学院 (一般)	I・A	11/19, 1/28
熊本労災看護専門学校 (一般)	I・A	1/26

¹県内の看護師養成課程 (高看) をもつ専門学校に入学試験問題の送付を依頼したところ、熊本労災看護専門学校以外のすべての学校は、入学試験問題を非公開としているため、入手することができなかった。

2.1 メディカルカレッジ青照館

2.1.1 推薦前期

I. 次の各設問に答えよ。

1) 1~10までの素数の和はいくらか。 **【1】**

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19

2) $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+3}$ を求めよ。 **【2】**

- ① 0 ② -1 ③ 1 ④ 2

3) $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$ を簡単にせよ。 **【3】**

- ① $x-1$ ② $-x+1$ ③ $x+1$ ④ $-x-1$

4) $|x-1| < 2$ を解け。 **【4】**

- ① $-1 < x < 3$ ② $x < -1, 3 < x$
③ $-3 < x < 1$ ④ $x < -3, 1 < x$

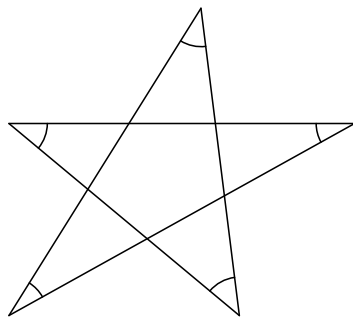
5) $f(x) = 3x^2 - 7x - 6$ のとき, $f(a+1)$ を求めよ。 【5】

- ① $3a^2 + a + 10$ ② $3a^2 - a + 10$
 ③ $3a^2 + a - 10$ ④ $3a^2 - a - 10$

6) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のとき, $\sin \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。 【6】

- ① $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \theta = 2\sqrt{2}$ ② $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \theta = -2\sqrt{2}$
 ③ $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \theta = 2\sqrt{2}$ ④ $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \theta = -2\sqrt{2}$

7) 下図の5つの角の和を求めよ。 【7】



- ① 90°
 ② 120°
 ③ 150°
 ④ 180°

II. 放物線 $y = x^2 - x$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に 2 だけ平行移動したときの放物線の方程式を求めよ。 【8】

- ① $y = x^2 + 7x + 14$ ② $y = x^2 + 7x - 14$
③ $y = x^2 - 7x + 14$ ④ $y = x^2 - 7x - 14$

III. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ ($0 \leq x \leq 5$) の最大値 max, 最小値 min を求めよ。 【9】

- ① max 4 ($x = 2$), min -5 ($x = 5$)
② max 5 ($x = 2$), min -4 ($x = 5$)
③ max 5 ($x = 5$), min -4 ($x = 2$)
④ max 4 ($x = 5$), min -5 ($x = 2$)

IV. $x = 3$ は, $x^2 = 3x$ であるための【10】である。

- ① 必要条件 ② 十分条件
③ 必要十分条件 ④ 必要条件でも十分条件でもない

V. 1 から 100 までの整数のうち, 2 または 3 で割り切れる数の個数を求めよ。 【11】

- ① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

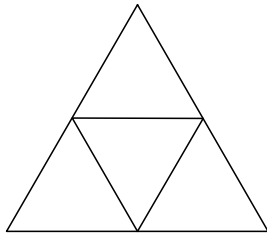
VI. $\triangle ABC$ において, $AB = 20$, $AC = 2$, $S(\text{面積}) = 10$ であるときの $\angle A$ は何度か。 【12】

- ① $\angle A = 30^\circ, 60^\circ$ ② $\angle A = 60^\circ, 120^\circ$
 ③ $\angle A = 60^\circ, 150^\circ$ ④ $\angle A = 30^\circ, 150^\circ$

VII. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ の 6 個の数字から異なる 3 個の数字を並べて 3 桁の整数は何個できるか。 【13】

- ① 80 ② 90 ③ 100 ④ 120 ⑤ 150

VIII. 赤・黄・青・白の 4 色を用いて下図のような 4 つの正三角形を塗り分けたい。4 色のうち任意の 3 色を用いて隣り合う三角形が異なる色に塗り分けられる方法は何通りあるか。ただし回転して並びが同じになれば同一とみなす。 【14】



- ① 12
 ② 24
 ③ 36
 ④ 48

IX. 1 個のサイコロを投げるとき, 出る目の期待値を求めよ。 【15】

- ① 3.2 ② 3.3 ③ 3.4 ④ 3.5 ⑤ 3.6

解答例

I. 1) $2 + 3 + 5 + 7 = 17$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + 3} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} + \frac{3 + \sqrt{7}}{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{3 - 1} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{7 - 5} + \frac{3 - \sqrt{7}}{9 - 7} \\
 &= \frac{(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{7})}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{1 \cdot x}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)x}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x - 1}} = \frac{1(x - 1)}{\left(1 - \frac{x}{x - 1}\right)(x - 1)} \\
 &= \frac{x - 1}{(x - 1) - x} = \frac{x - 1}{-1} = -x + 1
 \end{aligned}$$

4) $|x - 1| < 2$ より $-2 < x - 1 < 2$
 各辺に1を加えて $-1 < x < 3$

5) $f(x) = 3x^2 - 7x - 6$ より

$$\begin{aligned}
 f(a + 1) &= 3(a + 1)^2 - 7(a + 1) - 6 \\
 &= 3(a^2 + 2a + 1) - 7a - 7 - 6 \\
 &= 3a^2 - a - 10
 \end{aligned}$$

6) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より $\sin \theta \geq 0$ であるから 「 \leq, \geq はそれぞれ \leq, \geq と同意」

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

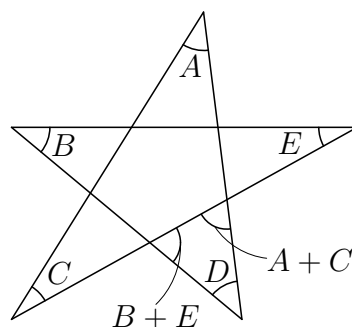
また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) = -2\sqrt{2}$

7) 5つの角を A, B, C, D, E とすると、
右の図から

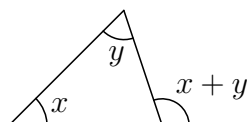
$$(A + C) + (B + E) + D = 180^\circ$$

したがって

$$A + B + C + D + E = 180^\circ$$



外角の性質



II. $f(x) = x^2 - x$ とおく. $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に 3, y 軸方向に 2 だけ平行移動したものは, $y = f(x - 3) + 2$ であるから

$$\begin{aligned} f(x - 3) + 2 &= (x - 3)^2 - (x - 3) + 2 \\ &= x^2 - 7x + 14 \end{aligned}$$

したがって, 求める放物線の方程式は $y = x^2 - 7x + 14$

グラフの平行移動

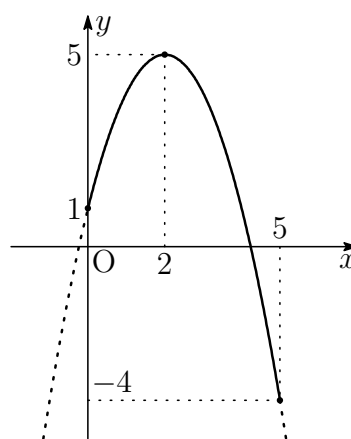
一般に, 関数 $y = f(x)$ のグラフを, x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると, 関数 $y = f(x - p) + q$ のグラフになる.

III. $-x^2 + 4x + 1 = -(x - 2)^2 + 5$ であるから

$$y = -(x - 2)^2 + 5$$

$0 \leq x \leq 5$ でのグラフは, 右の図の実線部分である. よって, y は

$x = 2$ で最大値 5 をとり,
 $x = 5$ で最小値 -4 をとる.



IV. $x = 3$ は, $x^2 = 3x$ であるための 十分条件 である。

- V. 1 から 100 までの整数のうち, 2 の倍数全体の集合を A , 3 の倍数全体の集合を B とすると, 求めるのは $n(A \cup B)$ である.

$$A = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, 2 \cdot 50\}, n(A) = 50$$

$$B = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 33\}, n(B) = 33$$

$$A \cap B = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, 6 \cdot 3, \dots, 6 \cdot 16\}, n(A \cap B) = 16$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 50 + 33 - 16 = \mathbf{67} \end{aligned}$$

- VI. $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A$ より

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2 \sin A \quad \text{すなわち} \quad \sin A = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ であるから } \angle A = 30^\circ, 150^\circ$$

- VII. 百の位は 0 以外の 5 通り, 十の位と一の位は, 百の位の数以外の残りの 5 個から 2 個とって並べる順列 ${}_5P_2$ であるから

$$5 \times {}_5P_2 = 5 \times 5 \cdot 4 = \mathbf{100} \text{ (個)}$$

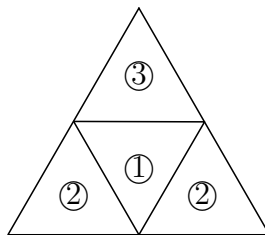
- VIII. 4ヶ所を 3 色で塗り分けるとき, 中央の三角形は他の三角形と異なる色で塗り分け, 残りの 3ヶ所を中央と異なる 2 色で塗り分ければよい.

中央の塗り方は 4 (通り) … ①

残りの 3ヶ所のうち, 同色で 2ヶ所塗る方法は 3 (通り) … ②

最後の 1ヶ所の塗り分け方は 2 (通り) … ③

$$\text{したがって } 4 \times 3 \times 2 = \mathbf{24} \text{ (通り)}$$



IX. どの目が出る確率も

$$\frac{1}{6}$$

である.

よって, 出る目の期待値は

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

目	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
②	③	②	①	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
②	④	③	②	②
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	④	③	②	④

2.1.2 推薦後期

I. 次の各設問に答えよ。

1) 類推して□を埋めよ。 【1】

1, 2, 3, 5, 8, 13, □, 34, 55

- ① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

2) $\frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} + \frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$ を求めよ。 【2】

- ① $-4\sqrt{6}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ -10 ④ 10

3) $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ を簡単にせよ。 【3】

- ① 0 ② 2 ③ $2x$ ④ x ⑤ $\frac{1}{x}$

4) $|x-3| < 5$ を解け。 【4】

- ① $x < -2, 8 < x$ ② $-2 < x < 8$
③ $x < -8, 2 < x$ ④ $-8 < x < 2$

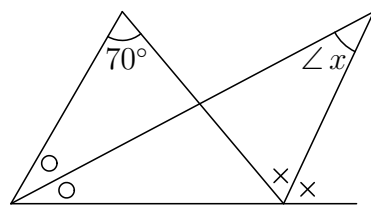
5) $f(x) = 2x^2 - x - 6$ のとき, $f(a - 1)$ を求めよ。 【5】

- ① $2a^2 - 5a - 3$ ② $2a^2 + 5a - 3$
 ③ $2a^2 - 5a + 3$ ④ $2a^2 + 5a + 3$

6) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で $\tan \theta = -\sqrt{2}$ のとき, $\sin \theta, \cos \theta$ の値を求めよ。 【6】

- ① $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$
 ③ $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$

7) 下図においての $\angle x$ の大きさを求めよ。 【7】



- ① 25°
 ② 30°
 ③ 35°
 ④ 40°
 ⑤ 42.5°

II. $y = 3x^2$ のグラフを x 軸方向に a , y 軸方向に b だけ平行移動すると $y = 3x^2 - 12x + 13$ のグラフになる。 【8】

- ① $a = -2, b = -1$ ② $a = 2, b = 1$
③ $a = -2, b = 1$ ④ $a = 2, b = -1$

III. $f(x) = -2x^2 - 4x + 5$ ($-3 < x \leq 0$) の最大値 \max , 最小値 \min を求めよ。 【9】

- ① $\max 7 (x = -1), \min$ なし
② $\max 7 (x = -1), \min -1 (x = -3)$
③ $\max 7 (x = 1), \min 5 (x = 0)$
④ $\max 7 (x = 1), \min$ なし

IV. $\angle A < 90^\circ$ は, $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための 【10】 である。

- ① 十分条件 ② 必要条件
③ 必要十分条件 ④ 必要条件でも十分条件でもない

V. 100 以下の自然数のうち, 4 または 6 で割り切れる数はいくつあるか。 【11】

- ① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

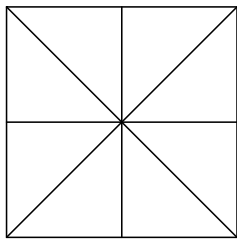
VI. $\triangle ABC$ において、 $\angle B = 45^\circ$ 、 $\angle C = 75^\circ$ 、 $BC = 2\sqrt{6}$ であるとき AC の長さを求めよ。 【12】

- ① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{6}$

VII. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ の 5 個の数字から異なる 3 個の数字を並べて 3 桁の整数は何個できるか。 【13】

- ① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

VIII. 下図のように、4 本の対角線によって 8 等分されている正方形の各部を 8 色で塗り分ける方法は何通りあるか。 【14】



- ① 1440 ② 2520
③ 5040 ④ 20160
⑤ 40320

IX. 3 枚の硬貨を投げるとき、表の出る期待値はいくらか。 【15】

- ① 1.3 枚 ② 1.4 枚 ③ 1.5 枚 ④ 1.6 枚

解答例

I. 1) $1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8, 5 + 8 = 13, 8 + 13 = 21,$
 $13 + 21 = 34, 21 + 34 = 55, \dots$ であるから $\square = 21$

$$\begin{aligned} 2) \frac{3 + \sqrt{6}}{3 - \sqrt{6}} + \frac{3 - \sqrt{6}}{3 + \sqrt{6}} &= \frac{(3 + \sqrt{6})^2 + (3 - \sqrt{6})^2}{(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})} \\ &= \frac{(9 + 6\sqrt{6} + 6) + (9 - 6\sqrt{6} + 6)}{9 - 6} \\ &= \frac{30}{3} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} &= 1 - \frac{1(1-x)}{\left(1 - \frac{1}{1-x}\right)(1-x)} = 1 - \frac{1-x}{(1-x)-1} = 1 - \frac{1-x}{-x} \\ &= 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{x + (1-x)}{x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4) $|x - 3| < 5$ より $-5 < x - 3 < 5$
 各辺に3を加えて $-2 < x < 8$

5) $f(x) = 2x^2 - x - 6$ より
 $f(a-1) = 2(a-1)^2 - (a-1) - 6$
 $= 2(a^2 - 2a + 1) - a + 1 - 6$
 $= 2a^2 - 5a - 3$

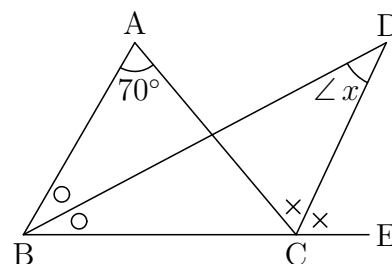
6) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から
 $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + (-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3}$

$\tan \theta < 0$ であるから θ は鈍角で, $\cos \theta < 0$ である.

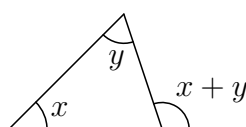
よって $\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

また $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = -\sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

- 7) $\angle ABD = \alpha$, $\angle ACD = \beta$ とすると
 $\angle CDB + \angle DBC = \angle DCE$ であるから
 $\angle x + \alpha = \beta$
 したがって $\angle x = \beta - \alpha \dots \textcircled{1}$
 $\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE$ であるから
 $70^\circ + 2\alpha = 2\beta$
 したがって $\beta - \alpha = 35^\circ \dots \textcircled{2}$
 よって, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から $\angle x = 35^\circ$



外角の性質



II.
$$y = 3x^2 - 12x + 13$$

$$= 3(x^2 - 4x) + 13$$

$$= 3\{(x - 2)^2 - 2^2\} + 13$$

$$= 3(x - 2)^2 + 1$$

したがって, $y = 3x^2$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動すると $y = 3x^2 - 12x + 13$ のグラフになる.

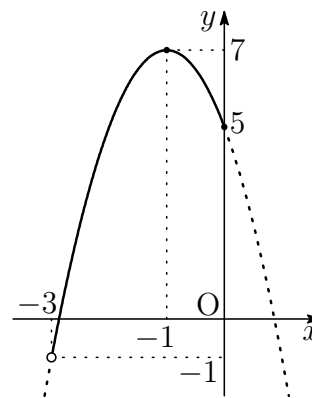
III. $-2x^2 - 4x + 5 = -2(x + 1)^2 + 7$ であるから

$$y = -(x - 2)^2 + 5$$

$0 \leq x \leq 5$ でのグラフは, 右の図の実線部分である. よって, y は

$x = -1$ で最大値 7 をとり,
 最小値はなし.

「 \leq, \geq はそれぞれ \leq, \geq と同意」



IV. $\angle A < 90^\circ$ は, $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための 必要条件 である。

V. 100以下の自然数のうち、4の倍数全体の集合を A 、6の倍数全体の集合を B とすると、求めるのは $n(A \cup B)$ である。

$$A = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots, 4 \cdot 25\}, n(A) = 25$$

$$B = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, 6 \cdot 3, \dots, 6 \cdot 16\}, n(B) = 16$$

$$A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, \dots, 12 \cdot 8\}, n(A \cap B) = 8$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 25 + 16 - 8 = \mathbf{33} \end{aligned}$$

$$\text{VI. } A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

$$\text{正弦定理により } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\text{よって } \frac{2\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{したがって } AC = \frac{2\sqrt{6} \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$$

VII. 百の位は0以外の4通り、十の位と一の位は、百の位の数以外の残りの4個から2個とって並べる順列 ${}_4P_2$ であるから

$$4 \times {}_4P_2 = 4 \times 4 \cdot 3 = \mathbf{48} \text{ (個)}$$

VIII. 8ヶ所を8色で塗り分ける総数は $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{40320}$ (通り)

$$\text{IX. 表が0枚の確率は } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{表が1枚の確率は } {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{3}{8}$$

$$\text{表が2枚の確率は } {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8}$$

$$\text{表が3枚の確率は } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

よって、表の出る枚数を X 枚とすると、右のような表ができる。
したがって、求める期待値は

X	0	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \text{ (枚)}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
③	④	⑤	②	①
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
③	③	②	①	②
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
②	③	④	⑤	③

【3】，【9】は選択肢に該当する答がなかったので，選択肢を編集した．

2.1.3 一般試験 A 日程 60分

I. 次の各設問に答えよ。

1) コンピュータで bit(ビット) とは, 2進法の 1 桁を意味している。8bit は何通りの情報量を表していると考えられるか。 【1】

- ① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

2) $\frac{4a^2 - 1}{a^2 - 1} \div \frac{2a + 1}{a - 1}$ を簡単にせよ。 【2】

- ① $\frac{2a - 1}{a - 1}$ ② $\frac{2a + 1}{a + 1}$ ③ $\frac{2a - 1}{a + 1}$ ④ $\frac{2a + 1}{a - 1}$

3) $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$ を簡単にせよ。 【3】

- ① $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ② $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3} - 2$ ④ $3 - \sqrt{2}$

4) $|5 - x| = 3$ を解け。 【4】

- ① $x = 2$ ② $x = 8$ ③ $x = 2, 8$ ④ $x = -2, -8$

5) $|x - 2| < 1$ の範囲を求めよ。 【5】

- ① $x < 1, 3 < x$ ② $1 < x < 3$ ③ $x < -1, 3 < x$ ④ $-1 < x < 3$

6) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5}$ のとき $\sin \theta \cos \theta$ の値を求めよ。 【6】

- ① $\frac{16}{25}$ ② $-\frac{16}{25}$ ③ $\frac{8}{25}$ ④ $-\frac{8}{25}$

7) 直線 $y = \sqrt{3}x + 2$ と x 軸のなす角は何度か。 【7】

- ① 15° ② 30° ③ 45° ④ 60° ⑤ 75°

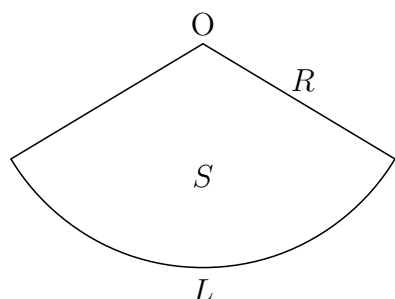
8) $ab > 0$ は $a > 0, b > 0$ であるための【8】である。

- ① 必要条件 ② 十分条件
③ 必要十分条件 ④ 必要条件でも十分条件でもない

9) $3 \leq a \leq 5, 2 \leq b \leq 3$ のとき $3a - 2b$ の変域はどれか。 【9】

- ① $3 \leq 3a - 2b \leq 9$ ② $3 \leq 3a - 2b \leq 11$
③ $5 \leq 3a - 2b \leq 9$ ④ $5 \leq 3a - 2b \leq 11$
⑤ $3 \leq 3a - 2b \leq 5$

10) 下図の扇形の面積 S はいくらか。 【10】



(半径 $R = 6$, 弧 $L = 12\pi$)

- ① 24π ② 36π ③ 48π
④ 60π ⑤ 72π

II. 次の2次関数について答えよ。

1) $y = x^2 - 2x + a$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最大値が8のとき a の値を求めよ。【11】

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2) x 軸と $(1, 0)$, $(3, 0)$ で交わり, y 軸と $(0, -6)$ で交わる放物線の方程式を求めよ。【12】

- ① $y = -x^2 - 8x - 6$ ② $y = -2x^2 - 8x - 6$
 ③ $y = -2x^2 + 8x - 6$ ④ $y = -x^2 + 8x - 6$

III. $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ のとき, $ab + bc + ca =$ 【13】 である。

- ① 2 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ -1

IV. 2つの解が $3 \pm \sqrt{5}$ のとき, 2次方程式を ① ~ ⑨ から選び完成せよ。

$$x^2 - \boxed{\text{【14】}} x + \boxed{\text{【15】}} = 0$$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5
 ⑥ 6 ⑦ 7 ⑧ 8 ⑨ 9

V. $\triangle ABC$ において, a, b, c を頂点 A, B, C に対応する三角形の3辺とする。

1) $b = 3$, $c = 3\sqrt{3}$, $B = 30^\circ$ のとき, C, a を求めよ。【16】

- ① $C = 60^\circ$ のとき $a = 6$ ② $C = 120^\circ$ のとき $a = 3$
 ③ $\begin{cases} C = 60^\circ \text{ のとき } a = 6 \\ C = 120^\circ \text{ のとき } a = 3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} C = 60^\circ \text{ のとき } a = 3 \\ C = 120^\circ \text{ のとき } a = 6 \end{cases}$

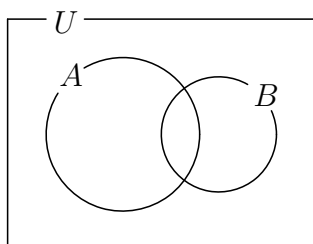
2) $\triangle ABC$ で, $AB = 2\sqrt{2}$, $AC = 6$, $\angle A = 45^\circ$ のとき, BC を求めよ。【17】

- ① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$

3) $\triangle ABC$ において $a = 5$, $b = 3$, $c = 6$ のとき $\triangle ABC$ の面積を求めよ。【18】

- ① $\sqrt{14}$ ② $2\sqrt{14}$ ③ $3\sqrt{14}$ ④ $4\sqrt{14}$

VI. 学生 80 人に調査をしたところ、英語の得意な者 54 人、数学の得意な者 38 人、どちらも得意でない者は 15 人であった。



1) 英語または数学が得意な者は【19】人である。

- ① 64 ② 65 ③ 66 ④ 67 ⑤ 68

2) 英語、数学どちらも得意な者は【20】人である。

- ① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

3) 数学だけ得意な者は【21】人である。

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

4) 英語と数学のどちらか一方のみが得意でない者は【22】人である。

- ① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

VII. A, B, C が、同じ問題を解こうとしている。3 人の問題を解くことのできる確率はそれぞれ、 $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ である。

1) 3 人とも解くことのできる確率を求めよ。 【23】

- ① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$

2) 少なくとも 1 人は解くことのできる確率を求めよ。 【24】

- ① $\frac{11}{15}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{14}{15}$

3) 2 人だけが解くことのできる確率を求めよ。 【25】

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{9}{20}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{11}{20}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

解答例

I. 1) 2個から8個とる重複順列であるから $2^8 = 256$ (通り)

$$2) \frac{4a^2 - 1}{a^2 - 1} \div \frac{2a + 1}{a - 1} = \frac{(2a + 1)(2a - 1)}{(a + 1)(a - 1)} \times \frac{a - 1}{2a + 1} = \frac{2a - 1}{a + 1}$$

$$3) \sqrt{5 - \sqrt{24}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(3 + 2) - 2\sqrt{3 \cdot 2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$4) |5 - x| = 3 \text{ より } 5 - x = \pm 3$$

これを解いて $x = 2, 8$

$$5) |x - 2| < 1 \text{ より } -1 < x - 2 < 1$$

各辺に2を加えて $1 < x < 3$

6) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5}$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\text{よって } 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{25}$$

$$\text{したがって } \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{25}$$

7) 直線と x 軸とのなす角を θ とすると

$$\tan \theta = \sqrt{3} \quad \text{これを解いて } \theta = 60^\circ$$

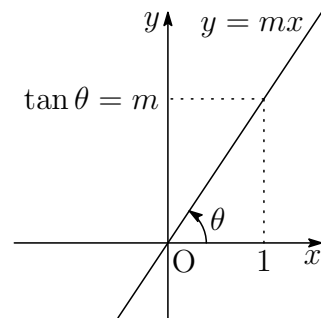
直線の傾き m と x 軸の正の部分となす角 θ

右の図のように, x 軸の正の部分から直線 $y = mx$ まで測った角を θ とすると

$$\tan \theta = \frac{m}{1} = m$$

一般に, 直線 $y = mx + n$ の x 軸の正の部分となす角が θ であるとき

$$m = \tan \theta$$



8) $ab > 0$ は $a > 0, b > 0$ であるための **必要条件** である。

$$9) \quad 3 \leq a \leq 5 \text{ より} \quad 9 \leq 3a \leq 15 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2 \leq b \leq 3 \text{ より} \quad -6 \leq -2b \leq -4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad 9 + (-6) \leq 3a + (-2b) \leq 15 + (-4)$$

$$\text{すなわち} \quad 3 \leq 3a - 2b \leq 11$$

「 \leq, \geq はそれぞれ \leq, \geq と同意」

$$10) \quad S = \frac{1}{2}LR = \frac{1}{2} \times 12\pi \times 6 = 36\pi$$

$$\text{II. 1)} \quad y = x^2 - 2x + a \\ = (x - 1)^2 - 1 + a$$

$y = x^2 - 2x + a$ ($-2 \leq x \leq 2$) は $x = -2$ のとき最大値 8 をとるので

$$8 = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + a \quad \text{すなわち} \quad a = 0$$

2) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする .

グラフが 3 点 $(1, 0), (3, 0), (0, -6)$ を通るから

$$0 = a + b + c \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 = 9a + 3b + c \quad \dots \textcircled{2}$$

$$-6 = c \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して} \quad a + b = 6 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入して} \quad 9a + 3b = 6$$

$$\text{すなわち} \quad 3a + b = 2 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと} \quad a = -2, b = 8$$

$$\text{よって, 求める 2 次関数は} \quad y = -2x^2 + 8x - 6$$

III. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ であるから ,

これに $a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 3$ を代入すると

$$1^2 = 3 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{したがって} \quad ab + bc + ca = -1$$

IV. $(3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6$, $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$ であるから
 $3 + \sqrt{5}$, $3 - \sqrt{5}$ を解とする2次方程式の1つは $x^2 - 6x + 4 = 0$

α, β を解とする2次方程式

2数 α, β を解とする2次方程式の1つは

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

すなわち $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

V. (1) 正弦定理により $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

よって $\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin C}$
 $3 \sin C = 3\sqrt{3} \sin 30^\circ$

したがって $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす C は $C = 60^\circ, 120^\circ$

$C = 60^\circ$ のとき

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

よって $\frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{3}{\sin 30^\circ}$

$$a = \frac{3 \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ}$$

したがって $a = 3 \times 1 \div \frac{1}{2} = 6$

$C = 120^\circ$ のとき

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$$

よって $A = B$ であるから $a = b$ より $a = 3$

(2) BC の長さ a は、余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 6^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= 36 + 8 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから $a = 2\sqrt{5}$

(3) $2s = 5 + 3 + 6 = 14$ とすると $s = 7$

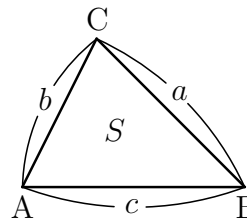
ゆえに、求める面積を S とすると

$$S = \sqrt{7(7-5)(7-3)(7-6)} = \sqrt{7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1} = 2\sqrt{14}$$

ヘロンの公式

$2s = a + b + c$ のとき、面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



VI. 学生全体の集合を U ，英語が得意な人の集合を A ，数学が得意な人の集合を B とする．どちらも得意でない人の集合は $\overline{A \cap B}$ であるから

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ により } n(\overline{A \cap B}) = 15$$

(1) 英語または数学が得意な学生の人数 $n(A \cup B)$ は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n(\overline{A \cap B}) \\ &= 80 - 15 = 65 \text{ (人)} \end{aligned}$$

(2) 英語，数学どちらも得意な学生の人数 $n(A \cap B)$ は

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ により}$$

$$65 = 54 + 38 - n(A \cap B)$$

$$\text{すなわち } n(A \cap B) = 27 \text{ (人)}$$

(3) 数学だけ得意な学生の人数は

$$n(B) - n(A \cap B) = 38 - 27 = 11 \text{ (人)}$$

(4) 英語と数学のどちらか一方のみが得意な学生の人数は

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 65 - 27 = 38 \text{ (人)}$$

VII. (1) 3人とも解く確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$$

(2) 3人とも解けない確率は

$$\left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{15}$$

したがって、少なくとも1人は解くことができる確率は

$$1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

(3) 問題を解く2人が、AとB、AとC、BとCの場合がある。

$$A, B \text{ だけが解く確率は } \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{10}$$

$$A, C \text{ だけが解く確率は } \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{20}$$

$$B, C \text{ だけが解く確率は } \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{9}{20}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
④	③	①	③	②
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
④	④	①	②	②
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	③	⑤	⑥	④
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
③	①	②	②	④
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
③	④	③	④	②

2.1.4 一般試験 B 日程 60 分

I. 次の各設問に答えよ。

1) $a + b + 1 = 0, ab \neq 0$ のとき $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}$ の値を求めよ。 【1】

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2) $\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ を簡単にせよ。 【2】

- ① $\sqrt{10} - \sqrt{6}$ ② $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{10}}{2}$ ④ $\sqrt{6} - \sqrt{10}$

3) $-1 \leq a \leq 2$ のとき $2|a + 1| + |2a - 5|$ を簡単にせよ。 【3】

- ① -3 ② 7 ③ -7 ④ 3

4) $x = \sqrt{3} - 1$ のとき $x^3 + 2x^2 - 2x + 5$ の値を求めよ。 【4】

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5

5) $a > 0, b > 0, c > 0$ のとき $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq$ 【5】

- ① 1 ② $\frac{1}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ 6

6) $90^\circ < \theta < 180^\circ$, $\sin \theta = \frac{1}{3}$ であるとき

$\cos \theta =$ 【6】

- ① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan(\theta - 90^\circ) =$ 【7】

- ① $-2\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

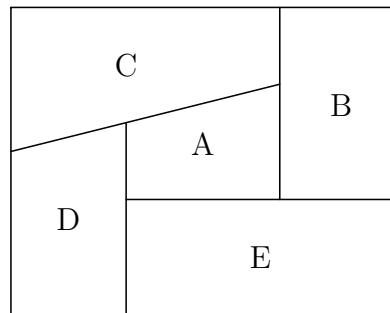
7) 奇数の平方から 1 を引けば 【8】 の倍数である。

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9

8) $x < 3$ は $x^2 - x - 6 < 0$ であるための 【9】。

- ① 十分条件である ② 必要条件である
 ③ 必要十分条件である ④ 必要条件でも十分条件でもない

9) 絵の具を使って, A, B, C, D, E を塗り分けるとき, 全ての色が異なる場合は何通りあるか。 【10】



- ① 12
 ② 24
 ③ 48
 ④ 60
 ⑤ 120

10) $(k+1)x + (k+2)y - 3k - 4 = 0$ がどのような k の値に対しても成り立つときの x, y の値を求めよ。 【11】

- ① $x = 1, y = 2$ ② $x = -2, y = 1$
 ③ $x = 2, y = 1$ ④ $x = 1, y = -2$

II. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $f(\theta) = \sin^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta + 2$ の最大値 (max) を求め, そのときの θ の値も求めよ。 【12】

- ① $\max \frac{4}{15}, \theta = 30^\circ$ ② $\max \frac{15}{4}, \theta = 60^\circ$
 ③ $\max \frac{4}{15}, \theta = 120^\circ$ ④ $\max \frac{15}{4}, \theta = 150^\circ$

III. 2次不等式 $ax^2 + 4x - 4 < 0$ の解が $-2 < x < \frac{2}{3}$ になるように定数 a の値を求めよ。 【13】

- ① $a = 3$ ② $a = -3$ ③ $a = 4$ ④ $a = -4$

IV. 1) 放物線 $y = kx^2 + 9x + k - 4$ と直線 $y = x + 2$ の共有点がないとき, 実数 k の値の範囲を求めよ。 【14】

- ① $-2 < k < 8$ ② $-8 < k < 2$
 ③ $k < -2, 8 < k$ ④ $k < -8, 2 < k$

2) x 軸と $(1, 0), (3, 0)$ で交わり, y 軸と $(0, -6)$ で交わる放物線の方程式を求めよ。 【15】

- ① $y = -2x^2 - 8x - 6$ ② $y = -2x^2 + 8x - 6$
 ③ $y = -2x^2 - 8x + 6$ ④ $y = -2x^2 + 8x + 6$

V. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とし, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 5, 8\}$ とするとき, $\overline{A \cap B} =$ 【16】

- ① $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ ② $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ ③ $\{5\}$
 ④ $\{4, 6\}$ ⑤ $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

VI. $(2a + b)^8$ の展開式における $a^5 b^3$ の項の係数を求めよ。 【17】

- ① 1790 ② 1792 ③ 1794 ④ 1796

VII. $\triangle ABC$ において $a = 7$, $b = 4\sqrt{2}$, $c = 5$ のとき, 次の値を求めよ。

1) $\cos A =$ 【18】

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$

2) $\triangle ABC$ の面積 $S =$ 【19】

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16

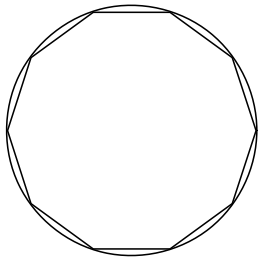
3) $\triangle ABC$ の内接円の半径 $r =$ 【20】

- ① $3 + \sqrt{2}$ ② $3 - \sqrt{2}$ ③ $2 + \sqrt{3}$ ④ $2 - \sqrt{3}$

4) $\triangle ABC$ の外接円の半径 $R =$ 【21】

- ① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $2\sqrt{2}$

VIII. 円周上に 10 点が置かれている正十角形がある。



1) 正 10 角形の対角線は何本引けるか。 【22】

- ① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45

2) 直角三角形は全部で何個できるか。 【23】

- ① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

IX. 3 個のサイコロを同時に投げるとき, 次の確率を求めよ。ただし, 約分しないものとする。

1) 目の和が 7 以下となる確率 【24】

- ① $\frac{32}{216}$ ② $\frac{33}{216}$ ③ $\frac{34}{216}$ ④ $\frac{35}{216}$

2) 少なくとも 1 つのサイコロの目が 1 または 3 である確率 【25】

- ① $\frac{18}{27}$ ② $\frac{19}{27}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{21}{27}$

解答例

I. 1) $b = -a - 1$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} &= \frac{a}{(-a-1)+1} + \frac{-a-1}{a+1} \\ &= \frac{a}{-a} + \frac{-(a+1)}{a+1} = -1 + (-1) = -2\end{aligned}$$

$$2) \sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$$

3) $-1 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{1}$ の各辺に 1 を加えて $0 \leq a+1 \leq 3$

$$a+1 \geq 0 \text{ であるから } |a+1| = a+1$$

$$\textcircled{1} \text{ の各辺に 2 をかけて } -2 \leq 2a \leq 4$$

$$\text{上式の各辺から 5 を引いて } -7 \leq 2a - 5 \leq -1$$

$$2a - 5 \leq 0 \text{ であるから } |2a - 5| = -(2a - 5)$$

$$\text{したがって } 2|a+1| + |2a-5| = 2(a+1) - (2a-5) = 7$$

4) $x = \sqrt{3} - 1$ から $x+1 = \sqrt{3}$

$$\text{両辺を平方して } x^2 + 2x + 1 = 3$$

$$\text{すなわち } x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\begin{aligned}\text{したがって } x^3 + 2x^2 - 2x + 5 &= x(x^2 + 2x - 2) + 5 \\ &= x \times 0 + 5 = 5\end{aligned}$$

$$5) \quad \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$$

$$\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0, \frac{b}{c} > 0, \frac{c}{b} > 0, \frac{c}{a} > 0, \frac{a}{c} > 0 \text{ であるから,}$$

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2, \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = 2, \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2$$

上式において等号が成り立つのは, それぞれ

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}, \frac{b}{c} = \frac{c}{b}, \frac{c}{a} = \frac{a}{c} \quad \text{すなわち } a = b, b = c, c = a$$

のときである. したがって

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2+2+2 = 6$$

が成り立つ. ただし, 等号が成り立つのは, $a = b = c$ のときである.

6) 右の図で、 $\angle AOP = \theta$ とする .

$$\sin \theta = \frac{1}{3} \quad (90^\circ < \theta < 180^\circ)$$

より、半円の半径を $r = 3$ にとると、
 $P(x, y)$ の座標は

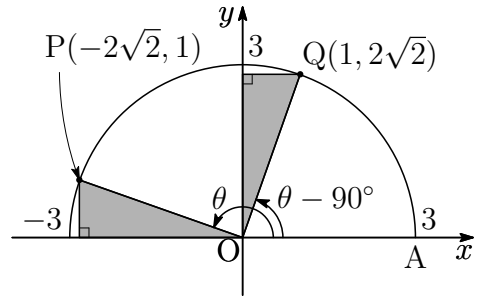
$$x < 0, y = 1, x^2 + y^2 = 3^2$$

これを解いて $x = -2\sqrt{2}$

したがって $P(-2\sqrt{2}, 1)$ よって $\cos \theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\angle AOQ = \theta - 90^\circ$ となる点を Q とすると、 $Q(1, 2\sqrt{2})$

よって $\tan(\theta - 90^\circ) = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$



7) n を整数とすると、 $2n + 1$ は奇数であるから、奇数の平方から 1 を引くと

$$(2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n + 1)$$

$n(n + 1)$ は連続する 2 数の積であるから 2 の倍数である .

したがって、 $4n(n + 1)$ は $4 \times 2 = 8$ の倍数である .

8) $x < 3$ は $x^2 - x - 6 < 0$ であるための 必要条件である .

9) A, B, C, D, E を異なる 5 色で塗り分ける方法の総数は

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \quad (\text{通り})$$

10) 与えられた等式は k についての恒等式であり、これを k について整理すると

$$(x + y - 3)k + (x + 2y - 4) = 0$$

よって $x + y - 3 = 0, x + 2y - 4 = 0$ これを解いて $x = 2, y = 1$

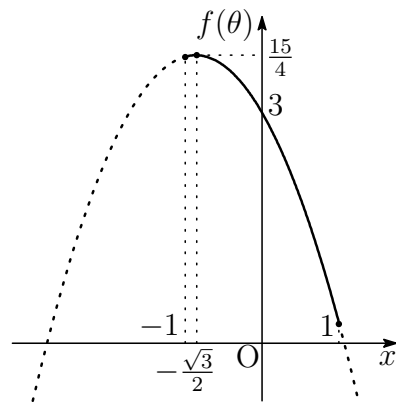
II.
$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta + 2 \\ &= (1 - \cos^2 \theta) - \sqrt{3} \cos \theta + 2 \\ &= -\cos^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta + 3 \end{aligned}$$

$\cos \theta = x$ とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$f(\theta) = -x^2 - \sqrt{3}x + 3$$

よって
$$f(\theta) = -\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$$



したがって $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta = 150^\circ$ のとき最大値 $\frac{15}{4}$ をとる .

III. $-2 < x < \frac{2}{3}$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$$(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right) < 0$$

両辺に 3 をかけて $(x+2)(3x-2) < 0$

すなわち $3x^2 + 4x - 4 < 0$

したがって, 求める a の値は $a = 3$

IV. 1) $y = kx^2 + 9x + k - 4$ と $y = x + 2$ から y を消去して整理すると

$$kx^2 + 8x + k - 6 = 0$$

放物線と直線が共有点をもたないとき, 係数について

$$8^2 - 4k(k-6) < 0$$

整理して $-4k^2 + 24k + 64 < 0$

両辺を -4 で割って $k^2 - 6k - 16 > 0$

左辺を因数分解して $(k+2)(k-8) > 0$

$k \neq 0$ に注意して $k < -2, 8 < k$

2) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする.

グラフが 3 点 $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -6)$ を通るから

$$0 = a + b + c \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 = 9a + 3b + c \quad \dots \textcircled{2}$$

$$-6 = c \quad \dots \textcircled{3}$$

③ を ① に代入して $a + b = 6 \quad \dots \textcircled{4}$

③ を ② に代入して $9a + 3b = 6$

すなわち $3a + b = 2 \quad \dots \textcircled{5}$

④, ⑤ を解くと $a = -2, b = 8$

よって, 求める 2 次関数は $y = -2x^2 + 8x - 6$

V. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 5, 8\}$ であるから

$$\bar{A} = \{2, 4, 6, 8\}, \bar{B} = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$$

したがって $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

VI. 一般項 ${}_8C_r(2a)^{8-r}b^r$ において, $r = 3$ であるから

$$\text{求める係数は } {}_8C_3 \times 2^5 = 56 \times 32 = 1792$$

VII. (1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(4\sqrt{2})^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5} = \frac{8}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$(2) \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\text{したがって } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14$$

$$(3) 2s = 7 + 4\sqrt{2} + 5 \text{ とすると } s = 6 + 2\sqrt{2}$$

$$S = rs \text{ により } 14 = r(6 + 2\sqrt{2})$$

$$\text{これを解いて } r = \frac{14}{6 + 2\sqrt{2}} = \frac{7}{3 + \sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$$

$$(4) \text{正弦定理により } \frac{7}{\sin A} = 2R$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } R &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{\sin A} \\ &= \frac{1}{2} \times 7 \div \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

VIII. (1) 10個の頂点から2個を選び, その2点を結んで得られる線分の本数は

$${}_{10}C_2 = 45 \text{ (本)}$$

このうち, 10本が辺であるから, 求める対角線の本数は

$$45 - 10 = 35 \text{ (本)}$$

(2) 直角三角形は, 直径を斜辺とする三角形であるから, 1つの直径に対する頂点の選び方は8通りある. 直径の選び方は5通りあるから, 積の法則により

$$8 \times 5 = 40 \text{ (個)}$$

- IX. (1) 目の和が3になるのは $\{1, 1, 1\}$ の1通り
 目の和が4になるのは $\{2, 1, 1\}$ の3通り
 目の和が5になるのは $\{3, 1, 1\}$ の3通り, $\{2, 2, 1\}$ の3通り
 目の和が6になるのは $\{4, 1, 1\}$ の3通り, $\{3, 2, 1\}$ の6通り,
 $\{2, 2, 2\}$ の1通り
 目の和が7になるのは $\{5, 1, 1\}$ の3通り, $\{4, 2, 1\}$ の6通り,
 $\{3, 3, 1\}$ の3通り, $\{3, 2, 2\}$ の3通り

したがって, 目の和が7以下であるのは

$$1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 6 + 1 + 3 + 6 + 3 + 3 = 35 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は $\frac{35}{6^3} = \frac{35}{216}$

(2) 1, 3の目が出ない確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$

少なくとも一つのサイコロが, 1または3の目である確率は

$$1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
①	②	②	⑥	⑤
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
①	⑤	③	②	⑤
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	④	①	③	②
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
②	②	④	③	②
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
①	②	③	④	②

2.1.5 一般試験 C 日程 60分

I. 次の各設問に答えよ。

1) $a + b + c = 0$ のとき $a^2 - b^2 + ac - bc$ の値を求めよ。 【1】

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$ を簡単にせよ。 【2】

- ①
- $\sqrt{10} - \sqrt{2}$
- ②
- $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$
- ③
- $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}$
- ④
- $\sqrt{2} - \sqrt{10}$

3) $0 < x < 1$ のとき $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ を簡単にせよ。 【3】

- ① 1 ② -3 ③ 3 ④ -1 ⑤
- $2x + 1$

4) $x = 1 + \sqrt{3}$ のとき $x^3 - 2x^2 - x + 2$ の値を求めよ。 【4】

- ①
- $\sqrt{3} - 3$
- ②
- $\sqrt{3} + 3$
- ③
- $\sqrt{3} - 2$
- ④
- $\sqrt{3} + 2$

5) $a > 0, b > 0$ のとき $(a + b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq$ 【5】

- ①
- $\frac{1}{2}$
- ② 1 ③ 2 ④ 4

6) $\sin \theta = \frac{2}{3}$ で $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき $\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} =$ 【6】

- ① $9 + 4\sqrt{5}$ ② $9 - 4\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5} - 9$ ④ $-4\sqrt{5} - 9$

$\sin \theta = \frac{2}{3}$ で $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき $\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} =$ 【7】

- ① $9 + 4\sqrt{5}$ ② $9 - 4\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5} - 9$ ④ $-4\sqrt{5} - 9$

7) n が自然数のとき, $n^3 + 5n$ は 【8】 の倍数である。

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

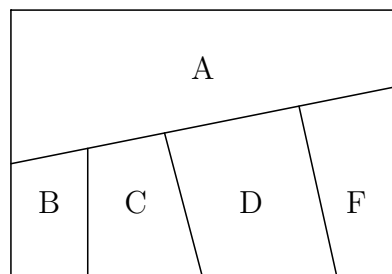
8) $x = y$ は $(x - y)^2 = 0$ であるための 【9】。

- ① 十分条件である ② 必要条件である
③ 必要十分条件である ④ 必要条件でも十分条件でもない

9) どのような a に対しても $(1 + 2a)x + (2 - a)y - 5 = 0$ が成り立つときの x, y を求めよ。 【10】

- ① $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

10) 下図の A, B, C, D, E の5つの部分に, 赤・青・黄・茶・緑のうち何色かを用いて色分けしたい。隣り合う部分には異なる色を用いるとすれば, 色分けの仕方は何通りあると考えられるか。 【11】



- ① 180
② 240
③ 360
④ 480
⑤ 540

II. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $f(\theta) = \cos^2 \theta - 4 \sin \theta + 7$ の最大値 (max), 最小値 (min) を求めよ。 【12】

① $\begin{cases} \max & 12 \\ \min & 3 \end{cases}$ ② $\begin{cases} \max & 12 \\ \min & -3 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} \max & 8 \\ \min & -3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} \max & 8 \\ \min & 3 \end{cases}$

III. 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ の解が $-2 < x < 1$ となるとき, 定数 a, b, c を最も簡単な整数で表せ。 【13】

① $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$

IV. 1) 放物線 $y = x^2 + (a+1)x + 2$ と直線 $y = 2x + 1$ が共有点をもたないための定数 a の範囲を求めよ。 【14】

① $a < -1, 3 < a$ ② $-1 < a < 3$
 ③ $-3 < a < 1$ ④ $a < -3, 1 < a$

2) x 軸と $(1, 0), (3, 0)$ で交わり, y 切片が -3 である放物線の方程式を求めよ。 【15】

① $y = -x^2 + 4x - 3$ ② $y = -x^2 + 4x + 3$
 ③ $y = -x^2 - 4x + 3$ ④ $y = -x^2 - 4x - 3$

V. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の部分集合 $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 8\}$, $A \cap B = \{3\}$, $\overline{A} \cap B = \{1, 2, 5\}$ のとき, $A \cup B =$ 【16】

① $\{4, 8\}$ ② $\{1, 2, 5, 6, 7, 9\}$
 ③ $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ ④ $\{3\}$ ⑤ $\{1, 2, 5\}$

VI. $(3x^2 - 2)^7$ の展開式における x^2 の係数を求めよ。 【17】

① 1340 ② 1342 ③ 1344 ④ 1346

VII. 3辺の長さが、 $AB = 6$ 、 $BC = 4$ 、 $CA = 5$ である $\triangle ABC$ について各設問に答えよ。

1) $\cos A =$ 【18】

- ① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{8}$

2) $\triangle ABC$ の面積 $S =$ 【19】

- ① $\frac{5\sqrt{7}}{2}$ ② $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ ③ $\frac{15\sqrt{7}}{2}$ ④ $\frac{15\sqrt{7}}{4}$

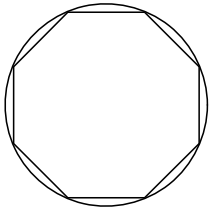
3) $\triangle ABC$ の内接円の半径 $r =$ 【20】

- ① $\sqrt{7}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

4) $\triangle ABC$ の外接円の半径 $R =$ 【21】

- ① $\sqrt{7}$ ② $\frac{8\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{7}}{7}$ ④ $\frac{10\sqrt{7}}{7}$

VIII. 1つの円周上に8個の点がある。



1) 8個の点を頂点とする八角形の対角線はいくつあるか。 【22】

- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

2) これらの点を頂点とする三角形は何個できるか。 【23】

- ① 28 ② 36 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

IX. 白球2個、赤球3個、青球5個が入っている袋がある。

この袋の中から同時に4個の球を取り出すとき、次の確率を求めよ。

1) 白球1個、赤球1個、青球2個である確率 【24】

- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$

2) 白球、赤球、青球がそれぞれ少なくとも1個含まれる確率 【25】

- ① $\frac{101}{210}$ ② $\frac{102}{210}$ ③ $\frac{103}{210}$ ④ $\frac{104}{210}$ ⑤ $\frac{105}{210}$

解答例

I. 1) $c = -(a + b)$ であるから

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + ac - bc &= a^2 - b^2 + c(a - b) \\ &= a^2 - b^2 - (a + b)(a - b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$2) \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} 3) \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} &= \sqrt{(x + 2)^2} - \sqrt{(x - 1)^2} \\ &= |x + 2| - |x - 1| \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ の各辺に 2 を加えて $2 < x + 2 < 3$

$x + 2 > 0$ であるから $|x + 2| = x + 2$

$0 < x < 1$ の各辺から 1 を引いて $-1 < x - 1 < 0$

$x - 1 < 0$ であるから $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$

したがって $|x + 2| - |x - 1| = (x + 2) - (-x + 1) = 2x + 1$

よって $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$

4) $x = 1 + \sqrt{3}$ から $x - 1 = \sqrt{3}$

両辺を平方して $x^2 - 2x + 1 = 3$

すなわち $x^2 = 2x + 2$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x \cdot x^2 - 2x^2 - x + 2 \\ &= x(2x + 2) - 2(2x + 2) - x + 2 \\ &= 2x^2 - 3x - 2 \\ &= 2(2x + 2) - 3x - 2 = x + 2 \\ &= (1 + \sqrt{3}) + 2 = 3 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$5) \quad (a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)$$

$a > 0, \frac{1}{a} > 0, b > 0, \frac{1}{b} > 0$ であるから,

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2, \quad b + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}} = 2,$$

上式において等号が成り立つのは, それぞれ

$$a = \frac{1}{a}, \quad 1 = \frac{1}{b} \quad \text{すなわち} \quad a = 1, \quad b = 1$$

のときである. したがって

$$(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) \geq 2 + 2 = 4$$

が成り立つ. ただし, 等号が成り立つのは, $a = b = 1$ のときである.

$$6) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{から} \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき $\cos \theta > 0$ であるから $\cos \theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{ゆえに} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{(\sqrt{5} - 2)^2}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = 9 - 4\sqrt{5}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき $\cos \theta < 0$ であるから $\cos \theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{ゆえに} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{1 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} = \frac{(\sqrt{5} + 2)^2}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$7) \quad n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$$

$(n - 1)n(n + 1)$ は連続する 3 数の積であるから $2 \times 3 = 6$ の倍数である.

したがって, $n^3 + 5n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$ は 6 の倍数である.

$$8) \quad x = y \text{ は } (x - y)^2 = 0 \text{ であるための } \boxed{\text{必要十分条件である}}.$$

9) 与えられた等式は a についての恒等式であり、これを a について整理すると

$$(2x - y)a + (x + 2y - 5) = 0$$

よって $2x - y = 0, x + 2y - 5 = 0$ これを解いて $x = 1, y = 2$

10) A, B, C, D, E を塗り分けるとき、3色以上用いなければならない。
異なる5色で塗り分けるとき

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \quad (\text{通り})$$

異なる4色で塗り分けるとき、BとDを同色、BとEを同色、CとEを同色塗り分ける場合であり、ともに ${}_5P_4 = 120$ 通りであるから

$$120 \times 3 = 360 \quad (\text{通り})$$

異なる3色で塗り分けるとき、BとDを同色かつCとEを同色に塗り分ける場合であるから

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \quad (\text{通り})$$

したがって、求める塗り分け方の総数は $120 + 360 + 60 = 540$ (通り)

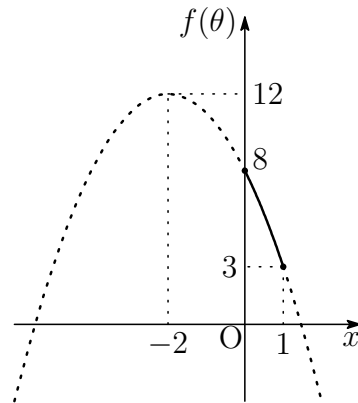
$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & \cos^2 \theta - 4 \sin \theta + 7 \\ &= (1 - \sin^2 \theta) - 4 \sin \theta + 7 \\ &= -\sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 8 \end{aligned}$$

$\sin \theta = x$ とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より

$$0 \leq x \leq 1$$

$$f(\theta) = -x^2 - 4x + 8$$

$$\text{よって } f(\theta) = -(x+2)^2 + 12$$



したがって $x = 0$ すなわち $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ のとき最大値8をとり、
 $x = 1$ すなわち $\theta = 90^\circ$ のとき最小値3をとる。

III. $-2 < x < 1$ を解とする2次不等式の1つは

$$(x+2)(x-1) < 0$$

$$\text{すなわち } x^2 + x - 2 < 0$$

$$\text{両辺に } -1 \text{ をかけて } -x^2 - x + 2 > 0$$

$$\text{したがって } a = -1, b = -1, c = 2$$

IV. 1) $y = x^2 + (a + 1)x + 2$ と $y = 2x + 1$ から y を消去して整理すると

$$x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$$

放物線と直線が共有点をもたないとき，係数について

$$(a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$$

整理して $a^2 - 2a - 3 < 0$

左辺を因数分解して $(a + 1)(a - 3) < 0$

したがって $-1 < a < 3$

2) 求める2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする．

グラフが3点 $(1, 0)$ ， $(3, 0)$ ， $(0, -3)$ を通るから

$$0 = a + b + c \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 = 9a + 3b + c \quad \dots \textcircled{2}$$

$$-3 = c \quad \dots \textcircled{3}$$

③を①に代入して $a + b = 3 \quad \dots \textcircled{4}$

③を②に代入して $9a + 3b = 3$

すなわち $3a + b = 1 \quad \dots \textcircled{5}$

④，⑤を解くと $a = -1, b = 4$

よって，求める2次関数は $y = -x^2 + 4x - 3$

V. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 8\}$ であるから， $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ より

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

VI. 一般項 ${}^7C_r (3x^2)^{7-r} (-2)^r$ において， $2(7-r) = 2$ より $r = 6$ であるから

求める係数は ${}^7C_6 \times 3 \times (-2)^6 = 7 \times 3 \times 64 = 1344$

VII. (1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

$$(2) \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{したがって } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$(3) 2s = 4 + 5 + 6 \text{ とすると } s = \frac{15}{2}$$

$$S = rs \text{ により } \frac{15\sqrt{7}}{4} = r \times \frac{15}{2}$$

$$\text{これを解いて } r = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$(4) \text{正弦定理により } \frac{4}{\sin A} = 2R$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } R &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sin A} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \div \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

VIII. (1) 8個の頂点から2個を選び、その2点を結んで得られる線分の本数は

$${}_8C_2 = 28 \text{ (本)}$$

このうち、8本が辺であるから、求める対角線の本数は

$$28 - 8 = 20 \text{ (本)}$$

(2) 8個の頂点から3個を選び、その3点を結んで得られるから

$${}_8C_3 = 56 \text{ (本)}$$

IX. (1) 白球 1 個, 赤球 1 個, 青球 2 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{2}{7}$$

(2) 白球 2 個, 赤球 1 個, 青球 1 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1 \times {}_5C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{14}$$

白球 1 個, 赤球 2 個, 青球 1 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_2 \times {}_5C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{7}$$

したがって, 求める確率は, (1) および上の結果から

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
③	②	⑤	②	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
②	①	③	③	②
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
⑤	④	④	②	①
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
③	③	②	④	②
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
②	①	⑤	②	⑤

【3】は選択肢に該当する答がなかったので, 選択肢を編集した.

2.2 熊本リハビリテーション学院

2.2.1 一般前期

[1] 2次関数 $y = x^2 + kx - 2k$ のグラフについて、次の〔問1〕～〔問4〕に適するものを〔1〕～〔0〕から選べ。

- (1) このグラフが $x = 0$ で x 軸に接するとき、 k の値は〔問1〕である。
- (2) このグラフが $x = 0$ と異なる点で x 軸に接するとき、 k の値は〔問2〕である。
- (3) このグラフが $x = 1$ と $x = \alpha$ の異なる2点で x 軸と交わるとき、 k の値は〔問3〕であり、 α の値は〔問4〕である。

- | | | | | |
|--------------------|-------------------|----------|----------|-------------------|
| 〔1〕 -1 | 〔2〕 0 | 〔3〕 1 | 〔4〕 -2 | 〔5〕 2 |
| 〔6〕 $-\frac{1}{3}$ | 〔7〕 $\frac{2}{3}$ | 〔8〕 -8 | 〔9〕 8 | 〔0〕 $\frac{1}{3}$ |

[2] 円Oの周上に2点A, Bがあり, ABは直径CDと点Pで交わっている。

PC = 5PD, PA = 5, PB = 2であるとき、次の〔問5〕～〔問8〕に適するものを〔1〕～〔0〕から選べ。

〔問5〕 PC・PDの値を求めよ。

〔問6〕 POの大きさを求めよ。

〔問7〕 PDの大きさを求めよ。

〔問8〕 円Oの半径の大きさを求めよ。

- | | | | | |
|--------------------------|-------------------|--------------------------|-----------------|----------------|
| 〔1〕 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | 〔2〕 $\frac{5}{2}$ | 〔3〕 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 〔4〕 $\sqrt{2}$ | 〔5〕 $\sqrt{5}$ |
| 〔6〕 $2\sqrt{2}$ | 〔7〕 $3\sqrt{2}$ | 〔8〕 $4\sqrt{2}$ | 〔9〕 $5\sqrt{2}$ | 〔0〕 10 |

[3] 1個のサイコロを5回投げるとき、次の〔問9〕～〔問11〕に適するものを

〔1〕～〔0〕から選べ。

- (1) 偶数の目がちょうど2回出る確率は〔問9〕である。
- (2) 5回とも偶数の目が出る確率は〔問10〕である。
- (3) 少なくとも1回5の目が出る確率は〔問11〕である。

〔1〕 $\frac{1}{32}$	〔2〕 $\frac{3}{8}$	〔3〕 $\frac{5}{16}$	〔4〕 $\frac{5}{8}$	〔5〕 $\frac{3}{4}$
〔6〕 $\frac{11}{30}$	〔7〕 $\frac{3125}{7776}$	〔8〕 $\frac{625}{1296}$	〔9〕 $\frac{671}{1296}$	〔0〕 $\frac{4651}{7776}$

[4] 次の〔問12〕～〔問15〕に適するものを〔1〕～〔0〕から選べ。

- (1) 実数 a, b に関する命題「積 $ab \neq 10 \implies a \neq 2$ または $b \neq$ 〔問12〕」は真である。
- (2) 自然数 m, n に関する命題「積 mn は偶数 \implies 和 $m+n$ は偶数」は〔問13〕である。
- (3) 自然数 m, n に関する命題「積 mn は奇数 \implies 和 $m+n$ は奇数」は〔問14〕である。
- (4) 実数 p, q に関する命題「積 pq と和 $p+q$ がともに有理数 $\implies p$ も q もともに有理数」は〔問15〕である。

〔1〕 真	〔2〕 偽	〔3〕 必要条件	〔4〕 十分条件	〔5〕 対偶
〔6〕 1	〔7〕 3	〔8〕 4	〔9〕 5	〔0〕 10

解答例

[1] (1) (2) グラフが x 軸と接するための条件は、係数について

$$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2k) = 0 \quad \text{すなわち} \quad k(k+8) = 0$$

ゆえに、 k の値は $k = 0, -8$

$$\text{接点の } x \text{ 座標は} \quad x = -\frac{k}{2 \cdot 1} = -\frac{k}{2}$$

よって、接点の座標は $k = 0$ のとき $(0, 0)$ 、 $k = -8$ のとき $(4, 0)$

(3) 2次関数 $y = x^2 + kx - 2k$ のグラフが点 $(1, 0)$ を通るから

$$0 = 1^2 + k \cdot 1 - 2k \quad \text{これを解いて} \quad k = 1$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad y &= x^2 + x - 2 \\ &= (x-1)(x+2) \end{aligned}$$

このグラフは、 x 軸と2点 $(1, 0)$ 、 $(-2, 0)$ で交わる。

	問1	問2	問3	問4
正解	2	8	3	4
配点	6点	7点	7点	7点

2次方程式の係数と実数の解

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数の解は、 $b^2 - 4ac$ の符号によって次のように分類される。 $b^2 - 4ac = 0$ のときは、2つの解が重なったものと考えて、この解を重解という。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数の解と $b^2 - 4ac$ の符号			
$b^2 - 4ac$ の符号	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
実数の解	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (異なる2つの解)	$-\frac{b}{2a}$ (重解)	ない

[注意] 上の $b^2 - 4ac$ を D で表すことがある。

[2] 方べきの定理により $PC \cdot PD = PA \cdot PB$

したがって $PC \cdot PD = 5 \times 2 = 10 \dots \textcircled{1}$

$PD = x$ とおくと, $PC = 5PD$ より $PC = 5x$

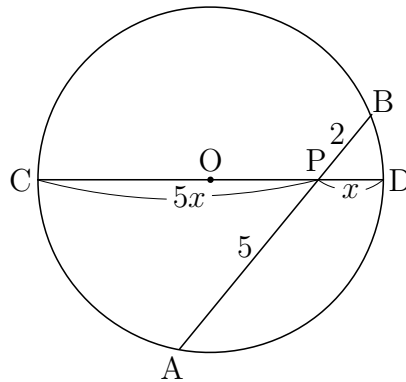
これらを $\textcircled{1}$ に代入して

$$x \times 5x = 10 \quad \text{すなわち} \quad x^2 = 2$$

$x > 0$ であるから $x = \sqrt{2}$ ゆえに $PD = \sqrt{2}$

CD は円の直径であるから, 円の半径は $3x = 3\sqrt{2}$

$PO = PC - OC = 5x - 3x = 2x$ であるから $PO = 2x = 2\sqrt{2}$



	問5	問6	問7	問8
正解	0	6	4	7
配点	6点	7点	7点	7点

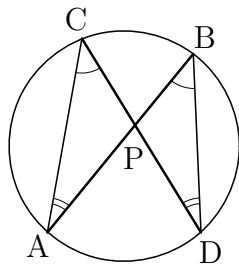
方べきの定理

円の2つの弦 AB, CD の交点, またはそれらの延長の交点を P とすると,

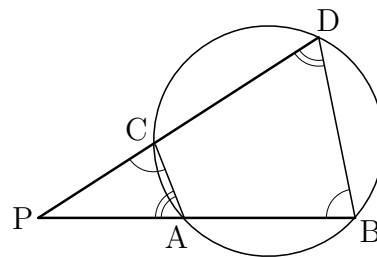
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

が成り立つ.

[1]



[2]



- [3] (1) サイコロを1回投げるとき、偶数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$
 よって、5回投げて偶数の目がちょうど2回出る確率は

$${}^5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-2} = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ = \frac{5}{16}$$

- (2) 5回とも偶数の目が出る確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

- (3) 5回投げて5以外の目が出る確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$$

したがって、少なくとも1回5の目が出る確率は

$$1 - \frac{3125}{7776} = \frac{4651}{7776}$$

	問9	問10	問11
正解	$\widehat{3}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$
配点	6点	7点	7点

反復試行の確率

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とする．この試行を n 回行う反復試行で、 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}^nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

[4] (1) 「積 $ab \neq 10 \implies a \neq 2$ または $b \neq 5$ 」の対偶は

「 $a = 2$ かつ $b = 5 \implies ab = 10$ 」

対偶が真であるからもとの命題も真である .

- (2) 偽 (反例 : $m = 1, n = 2$)
- (3) 偽 (反例 : $m = 1, n = 1$)
- (4) 偽 (反例 : $p = \sqrt{2}, q = -\sqrt{2}$)

	問 12	問 13	問 14	問 15
正解	9	2	2	2
配点	6点	7点	7点	6点

命題とその対偶の真偽

命題 $p \implies q$ とその対偶 $\bar{q} \implies \bar{p}$ の真偽は一致する .

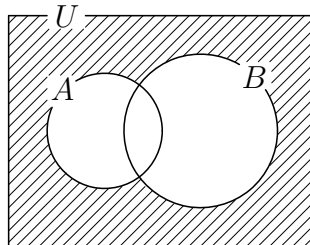
条件「かつ」、「または」の否定

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \bar{p} \text{ または } \bar{q}$$

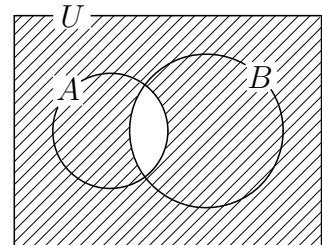
$$\overline{p \text{ または } q} \iff \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}$$

ド・モルガンの法則

- 1 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- 2 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$



$\overline{A \cup B}$ と $\bar{A} \cap \bar{B}$



$\overline{A \cap B}$ と $\bar{A} \cup \bar{B}$

2.2.2 一般後期

[1] (1) 次の〔問1〕～〔問3〕に適するものを①～⑩から選べ。

$$A = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}, B = \frac{1}{3 - \sqrt{3}} \text{ のとき, } A + B = \text{〔問1〕}, A \times B = \text{〔問2〕},$$

$$A^3 + B^3 = \text{〔問3〕} \text{ である。}$$

① $\frac{1}{6}$	② $\frac{2}{9}$	③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$	④ $\frac{1}{3}$	⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{2 + 2\sqrt{3}}{9}$	⑧ $\frac{2}{3}$	⑨ $\frac{5}{6}$	⑩ 1

(2) 次の〔問4〕～〔問6〕に適するものを①～⑩から選べ。

自然数 n, r に対して, ${}_nC_r$ および ${}_nP_r$ は異なる n 個のものから異なる r 個のものを取り出す順列の総数および組合せの総数を表すとする。

$${}_nC_2 = 15 \text{ のとき } n = \text{〔問4〕}, {}_7C_r = {}_7C_{r-1} \text{ のとき } n = \text{〔問5〕},$$

$${}_nP_3 = 3 \times {}nP_2 \text{ のとき } n = \text{〔問6〕} \text{ である。}$$

① 2	② 3	③ 4	④ 5	⑤ 6
⑥ 8	⑦ 9	⑧ 10	⑨ 11	⑩ 12

[2] 1000 より大きくて 2000 以下の整数を 1 つ選ぶとき, 次の〔問7〕～〔問10〕に適するものを①～⑩から選べ。

〔問7〕 4 の倍数を選ぶ確率を求めよ。

〔問8〕 6 の倍数を選ぶ確率を求めよ。

〔問9〕 4 の倍数かつ 6 の倍数であるものを選ぶ確率を求めよ。。

〔問10〕 4 の倍数または 6 の倍数を選ぶ確率を求めよ。

① $\frac{167}{1000}$	② $\frac{417}{1000}$	③ $\frac{1}{2}$	④ $\frac{333}{2000}$	⑤ $\frac{83}{1000}$
⑥ $\frac{167}{500}$	⑦ $\frac{9}{125}$	⑧ $\frac{83}{2000}$	⑨ $\frac{1}{4}$	⑩ $\frac{167}{200}$

[3] 次の〔問 11〕,〔問 12〕に適するものを〔1〕～〔0〕から選べ。

方程式 $x^2 - 5 = x + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ の解を α, β ($\alpha > \beta$) とすると,

$\alpha =$ 〔問 11〕, $\beta =$ 〔問 12〕である。

- | | | | | |
|--------|--------------------------------------|--------|--------------------|-------------------|
| 〔1〕 -3 | 〔2〕 $\frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ | 〔3〕 -1 | 〔4〕 $-\frac{1}{2}$ | 〔5〕 $\frac{1}{2}$ |
| 〔6〕 1 | 〔7〕 $\frac{1 + \sqrt{21}}{\sqrt{2}}$ | 〔8〕 2 | 〔9〕 3 | 〔0〕 4 |

[4] k を正の定数とし, $\triangle ABC$ の辺 AB, AC の長さを x, y とする。

次の〔問 13〕～〔問 15〕に適するものを〔1〕～〔0〕から選べ。

- (1) $x + y = k$ のとき, $\triangle ABC$ の面積の最大値が $\frac{\sqrt{3}k^2}{16}$ となるような $\angle A$ の値を求めると $\angle A =$ 〔問 13〕 $^\circ$ である。ただし, $0^\circ < \angle A \leq 90^\circ$ とする。
- (2) $\angle A$ が(1)で求めた値のとき, $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とし, 線分 AD の長さを k で表すと $AD =$ 〔問 14〕 k である。
- (3) $\triangle ABC$ に外接する円の半径 R を k で表すと, $R =$ 〔問 15〕 k である。

- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------|
| 〔1〕 30 | 〔2〕 45 | 〔3〕 60 | 〔4〕 75 | 〔5〕 90 |
| 〔6〕 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | 〔7〕 $\frac{\sqrt{3}}{8}$ | 〔8〕 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | 〔9〕 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 〔0〕 $\sqrt{3}$ |

解答例

$$[1] (1) A + B = \frac{1}{3 + \sqrt{3}} + \frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{6}{9 - 3} = 1$$

$$A \times B = \frac{1}{3 + \sqrt{3}} \times \frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{1 \times 1}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{1}{9 - 3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{上の2式から } A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$$

$$= 1^3 - 3 \times \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad {}_n C_2 = 15$$

$$\text{左辺を変形して} \quad \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = 15$$

$$\text{整理して} \quad n^2 - n - 30 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad (n+5)(n-6) = 0$$

$$n \geq 2 \text{ であるから} \quad n = 6$$

${}_7 C_r = {}_7 C_{r-1}$ を満たすとき

$$r = r - 1 \quad \text{または} \quad r + (r - 1) = 7$$

$r \neq r - 1$ であるから $r + (r - 1) = 7$ を解いて $r = 4$

$${}_n P_3 = 3 \times {}_n P_2$$

$$n(n-1)(n-2) = 3 \times n(n-1)$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n = 3n^2 - 3n$$

$$\text{整理して} \quad n^3 - 6n^2 + 5n = 0$$

$$\text{したがって} \quad n(n-1)(n-5) = 0$$

$$n \geq 3 \text{ であるから} \quad n = 5$$

	問1	問2	問3	問4	問5	問6
正解	0	1	6	5	3	4
配点	6点	7点	7点	7点	6点	7点

[2] 4の倍数は

$$4 \cdot 251, 4 \cdot 252, 4 \cdot 253, \dots, 4 \cdot 500$$

の 250 個であるから $(500 - 251 + 1 = 250)$, 4 の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{250}{1000} = \frac{1}{4} \quad \dots \quad \boxed{\text{問 7}}$$

6 の倍数は

$$6 \cdot 167, 6 \cdot 168, 6 \cdot 169, \dots, 6 \cdot 333$$

の 167 個であるから $(333 - 167 + 1 = 167)$, 6 の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{167}{1000} \quad \dots \quad \boxed{\text{問 8}}$$

4 の倍数かつ 6 の倍数は

$$12 \cdot 84, 12 \cdot 85, 12 \cdot 86, \dots, 12 \cdot 166$$

の 83 個であるから $(166 - 84 + 1 = 83)$, 4 の倍数かつ 6 の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{83}{1000} \quad \dots \quad \boxed{\text{問 9}}$$

したがって, 4 の倍数または 6 の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{250}{1000} + \frac{167}{1000} - \frac{83}{1000} = \frac{334}{1000} = \frac{167}{500} \quad \dots \quad \boxed{\text{問 10}}$$

	問 7	問 8	問 9	問 10
正解	$\widehat{9}$	$\widehat{1}$	$\widehat{5}$	$\widehat{6}$
配点	6 点	7 点	6 点	7 点

和事象の確率

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

[3] $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|$ であるから, 方程式

$$x^2 - 5 = x + |2x - 1|$$

を解けばよい.

$$\underline{x \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}} \quad |2x - 1| = 2x - 1 \text{ であるから}$$

$$x^2 - 5 = x + (2x - 1)$$

整理して

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

ゆえに

$$(x + 1)(x - 4) = 0$$

$$\underline{x \geq \frac{1}{2} \text{ に注意して}} \quad x = 4$$

$$\underline{x < \frac{1}{2} \text{ のとき}} \quad |2x - 1| = -(2x - 1) = -2x + 1 \text{ であるから}$$

$$x^2 - 5 = x + (-2x + 1)$$

整理して

$$x^2 + x - 6 = 0$$

ゆえに

$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\underline{x < \frac{1}{2} \text{ に注意して}} \quad x = -3$$

したがって, 求める解 α, β は ($\alpha > \beta$),

$$\alpha = 4, \beta = -3$$

	問 11	問 12
正解	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
配点	6 点	7 点

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

[4] (1) $\triangle ABC$ の面積を S とすると $S = \frac{1}{2}xy \sin A \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned}
 y = k - x \text{ であるから } \quad xy &= x(k - x) \\
 &= -(x^2 - kx) \\
 &= -\left\{ \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \right\} \\
 &= -\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4} \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より S は $x = y = \frac{k}{2}$ のとき最大値 $\frac{k^2}{8} \sin A$ をとる.

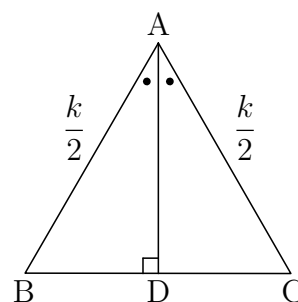
したがって, $\frac{k^2}{8} \sin A = \frac{\sqrt{3}k^2}{16}$ より $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ < \angle A \leq 90^\circ$ であるから $\angle A = 60^\circ$

(2) (1) の結果から, $AB = AC$, $\angle BAC = 60^\circ$ であるから, $\triangle ABC$ は正三角形である.

$\angle A$ の 2 等分線 AD は, 辺 BC に下ろした垂線である. 右の図から

$$AD = AB \cos 30^\circ = \frac{k}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}k$$



(3) 正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{2} \times \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{k}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{k}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{k}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}k
 \end{aligned}$$

	問 13	問 14	問 15
正解	3	6	8
配点	7点	7点	7点

2.3 九州中央リハビリテーション学院

2.3.1 一般試験 A

[1] 有理数 $\frac{13}{101}$ を小数で表すと $\boxed{1}$ 桁の循環小数になり、循環小数 $0.4\bar{5}$ を有理数で表すと $\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}\boxed{4}}$ となる。

[2] $f(x) = |2|x - 3| - 7|$ とすると、方程式 $f(x) = 5$ の解のうち最大のものは $x = \boxed{5}$ であり、関数 $y = f(x)$ は $x = -\frac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$, $\frac{\boxed{8}\boxed{9}}{\boxed{10}}$ で最小値をとる。

[3] $f(x) = x^3 - (2a - 1)x^2 - 2(a - 1)x + 2$ を 1 次式と 2 次式の積で表すと $f(x) = (x + \boxed{11})(x^2 - \boxed{12}ax + \boxed{13})$ となり、方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつ条件は $a^2 > \boxed{14}$ かつ $a \neq -\frac{\boxed{15}}{\boxed{16}}$ である。

[4] 連立不等式 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, $x^2 - ax + a - 7 \geq 0$ を考える。 $a = 4$ のとき、この連立不等式をみたす x の値の範囲は $-\boxed{17} \leq x \leq \boxed{18} - \sqrt{\boxed{19}}$ であり、また、この連立不等式が解をもたないような実数 a の値の範囲は $\boxed{20} < a < \boxed{21}$ である。

[5] 放物線 $y = -2x^2 + 17x - 32$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に $\boxed{22}$ だけ平行移動すれば、放物線 $y = -2x^2 + \boxed{23}x + 3$ になる。これを、さらに x 軸方向正の向きに $\frac{\boxed{24}}{\boxed{25}}$ だけ平行移動すれば原点を通る。

[6] 三角形 ABC は $AB = 5\sqrt{3}$, $BC = 5$, $\angle ABC = 30^\circ$ をみたく、このとき $\angle CAB = \boxed{26}\boxed{27}^\circ$ であり、三角形 ABC の面積は $\frac{\boxed{28}\boxed{29}\sqrt{\boxed{30}}}{\boxed{31}}$ である。

[7] 円に内接する四角形 ABCD は $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 1$, $\cos B = \frac{2}{3}$ をみたく、このとき $AC = \sqrt{\boxed{32}\boxed{33}}$, $AD = \boxed{34}$, 円の半径は $\frac{\boxed{35}\sqrt{\boxed{36}\boxed{37}}}{\boxed{38}\boxed{39}}$, 四角形 ABCD の面積は $\boxed{40}\sqrt{\boxed{41}}$ である。

解答例

[1] $\frac{13}{101} = 0.128712871287\cdots$ であるから, 4桁の循環小数である.

$x = 0.4\dot{5}$ とおくと, $x = 0.454545\cdots$, $100x = 45.454545\cdots$ であるから

$$100x - x = 45$$

すなわち $99x = 45$

よって $x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

(答) 4 5 1 1

[2] $f(x) = 5$ の解は, $2|x - 3| - 7 = 5$ または $2|x - 3| - 7 = -5$

$2|x - 3| - 7 = 5$ のとき $|x - 3| = 6$
 $x - 3 = \pm 6$

したがって $x = 9, -3$

$2|x - 3| - 7 = -5$ のとき $|x - 3| = 1$
 $x - 3 = \pm 1$

したがって $x = 4, 2$

$f(x) = 5$ の解は $x = 9, -3, 4, 2$ であり, この解のうち最大のものは $x = 9$

$f(x)$ が最小となるのは $2|x - 3| - 7 = 0$ のときであり

$$|x - 3| = \frac{7}{2}$$

$$x - 3 = \pm \frac{7}{2}$$

したがって $x = \frac{13}{2}, -\frac{1}{2}$

(答) 9 1 2 1 3 2

$$\begin{aligned}
 [3] \quad & x^3 - (2a-1)x^2 - 2(a-1)x + 2 \\
 & = x^3 + x^2 + 2x + 2 - 2ax^2 - 2ax && \leftarrow a \text{ について整理する} \\
 & = x^2(x+1) + 2(x+1) - 2ax(x+1) \\
 & = (x+1)(x^2 + 2 - 2ax) \\
 & = (x+1)(x^2 - 2ax + 2)
 \end{aligned}$$

$f(x) = 0$ が異なる3つの実数解をもつためには、方程式 $x^2 - 2ax + 2 = 0$ が異なる2つの実数解をもち、その解が $x \neq -1$ であればよい。

$$\begin{aligned}
 D > 0 \text{ から } & (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 > 0 \\
 & 4a^2 - 8 > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -1 \text{ は解ではないから } & (-1)^2 - 2a \cdot (-1) + 2 \neq 0 \\
 & 2a + 3 \neq 0
 \end{aligned}$$

したがって、求める条件は $a^2 > 2$ かつ $a \neq -\frac{3}{2}$

(答) 11 1 12 2 13 2 14 2 15 3 16 2

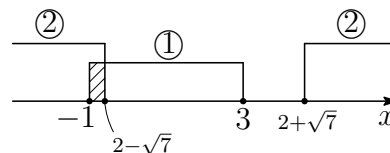
[4] $a = 4$ のとき、連立不等式 $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ x^2 - 4x - 3 \geq 0 \end{cases}$ を解けばよい。

第1式を解いて $-1 \leq x \leq 3$ …①

第2式を解いて $x \leq 2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7} \leq x$ …②

①, ②の共通範囲を求めて

$$-1 \leq x \leq 2 - \sqrt{7}$$



$f(x) = x^2 - ax + a - 7$ とおくと、
連立不等式が解をもたないためには

$$f(-1) < 0 \text{ かつ } f(3) < 0$$

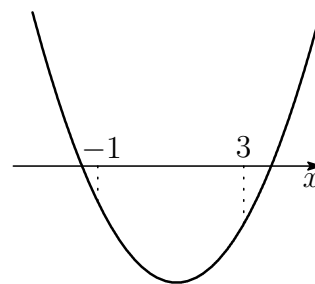
$$\begin{aligned}
 f(-1) < 0 \text{ から } & (-1)^2 - a \cdot (-1) + a - 7 < 0 \\
 & 2a - 6 < 0
 \end{aligned}$$

したがって $a < 3$ …③

$$\begin{aligned}
 f(3) < 0 \text{ から } & 3^2 - a \cdot 3 + a - 7 < 0 \\
 & -2a + 2 < 0
 \end{aligned}$$

したがって $a > 1$ …④

③, ④から、求める実数 a の値の範囲は $1 < a < 3$



(答) 17 1 18 2 19 7 20 1 21 3

[5] $f(x) = -2x^2 + 17x - 32$ とおく．放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に q だけ平行移動したものは , $y = f(x+3) + q$ である .

$$\begin{aligned} f(x+3) + q &= -2(x+3)^2 + 17(x+3) - 32 + q \\ &= -2x^2 + 5x + q + 1 \end{aligned}$$

係数を比較して $q+1=3$ これを解いて $q=2$

$-2x^2 + 5x + 3 = -(x-3)(2x+1)$ であるから , 放物線 $y = -2x^2 + 5x + 3$ は x 軸と $x=3, -\frac{1}{2}$ で交わる . したがって , x 軸方向正の向きに $\frac{1}{2}$ だけ平行移動すると原点をを通る .

(答) 22 2 23 5 24 1 25 2

グラフの平行移動

一般に , 関数 $y = f(x)$ のグラフを , x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると , 次の関数のグラフになる .

$$y = f(x-p) + q$$

たとえば , $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $p=1$, $q=3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x-1) + 3 &= 2(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 + 3 \\ &= 2x^2 - x + 3 \end{aligned}$$

となるから , 移動後の放物線は , 次の 2 次関数のグラフになる .

$$y = 2x^2 - x + 3$$

[6] 余弦定理により

$$\begin{aligned}
 b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\
 &= (5\sqrt{3})^2 + 5^2 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5 \cos 60^\circ \\
 &= 75 + 25 - 50\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25
 \end{aligned}$$

 $b > 0$ であるから $b = 5$ $a = b$ となり $A = B$ したがって $\angle CAB = 30^\circ$ 三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5 \sin 30^\circ \\
 &= \frac{25\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

(答) 26 3 27 0 28 2 29 5 30 3 31 4[7] $\triangle ABC$ を余弦定理に適用すると

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B \\
 &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} = 14
 \end{aligned}$$

 $AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{14}$ $D = 180^\circ - B$ であるから

$$\begin{aligned}
 \cos D &= \cos(180^\circ - B) \\
 &= -\cos B = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

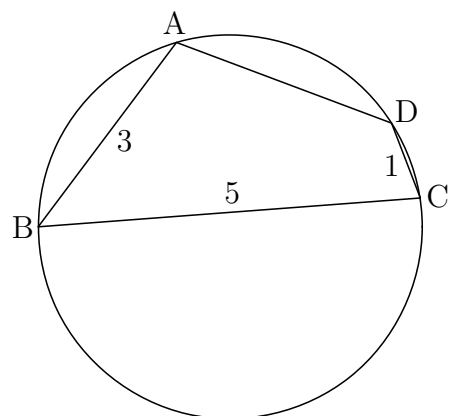
 $DA = x$ において, $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= CD^2 + DA^2 - 2CD \cdot DA \cos D \\
 (\sqrt{14})^2 &= 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)
 \end{aligned}$$

$$14 = 1 + x^2 + \frac{4}{3}x$$

$$3x^2 + 4x - 39 = 0$$

$$(x-3)(3x+13) = 0$$

 $x > 0$ であるから $x = 3$ すなわち $AD = 3$ 

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

円の半径を R とすると $2R = \frac{AC}{\sin B}$ より

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \times \frac{AC}{\sin B} = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \div \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{14}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{70}}{10} \end{aligned}$$

$$\sin D = \sin(180^\circ - B) = \sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

したがって、四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B + \frac{1}{2} CD \cdot DA \sin D \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{5}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2} \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

(答) 1 4 3 3 7 0 1 0 3
 5

2.3.2 一般試験 B

[1] 5^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を 7 で割った余りを $n = 1$ より順に書くと

$5, 4, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \dots$ となり, 以降これを繰り返すので, 5^{2006} を 7 で割った余りは $\boxed{5}$ である.

[2] $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ のとき, $x = \boxed{6} - \boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}$ であり, これは x の 2 次方程式

$x^2 - \boxed{9}\boxed{10}x + \boxed{11} = 0$ をみたく.

このとき, $3x^2 - 36x + 33 = 3(x^2 - \boxed{9}\boxed{10}x + \boxed{11}) - \boxed{12}x + \boxed{13}\boxed{14}$ であるので, この式の値は $\boxed{15}\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}$ である.

[3] $xyz \neq 0$, $\frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = k$ とするとき, k の値は $\boxed{18}$ または $-\boxed{19}$ であり, このとき, $\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right)$ の値は $\boxed{20}$ または $-\boxed{21}$ である.

[4] 放物線 $y = x^2 + ax + a - 2$ (a は定数) の頂点の y 座標は $-\frac{1}{\boxed{22}}a^2 + a - \boxed{23}$ であり, これは $-\boxed{24}$ 以下の値をとる. この放物線と x 軸との交点を P, Q とおくと, 線分 PQ の長さは $\sqrt{a^2 - \boxed{25}a + \boxed{26}}$ だから, これが最短となるのは $a = \boxed{27}$ のときで, そのときの長さは $\boxed{28}$ である.

[5] 関数 $f(x) = |x^2 - 8x + 12| + 2x - 6$ ($0 \leq x \leq 6$) は,

$$0 \leq x \leq \boxed{29} \quad \text{のとき} \quad f(x) = x^2 - \boxed{30}x + \boxed{31}$$

$$\boxed{29} \leq x \leq 6 \quad \text{のとき} \quad f(x) = -x^2 + \boxed{32}\boxed{33}x - \boxed{34}\boxed{35}$$

この $0 \leq x \leq t$ ($0 \leq t \leq 6$) における最大値は,

$$0 \leq t \leq \boxed{36} \quad \text{のとき} \quad \boxed{37}$$

$$\boxed{36} \leq t \leq \boxed{38} \quad \text{のとき} \quad -t^2 + \boxed{39}\boxed{40}t - \boxed{41}\boxed{42}$$

$$\boxed{38} \leq t \leq 6 \quad \text{のとき} \quad \boxed{43}$$

[6] $0^\circ < x < 90^\circ$, $0^\circ < y < 90^\circ$ である x, y が $\sin x = \cos y \cdots \textcircled{1}$

をみたすとき, $x + y = \boxed{44}\boxed{45}^\circ$ であり, さらに $\textcircled{1}$ が $\sin(y - x)$ に等しいとき, $x = \boxed{46}\boxed{47}^\circ$, $y = \boxed{48}\boxed{49}^\circ$ である.

[7] 四角形 ABCD が円に内接し, $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 2$, $DA = 5$ である.

このとき $\angle A + \angle C = \boxed{50}\boxed{51}\boxed{52}^\circ$ であり, BD^2 を考えることにより

$$\cos A = \frac{\boxed{53}}{\boxed{54}\boxed{55}} \text{ とわかる.}$$

また, この四角形の面積は $\boxed{56}\sqrt{\boxed{57}\boxed{58}}$ である.

解答例

[1] A を 7 で割ったときの商が a , 余りが 5 のとき, $A = 7a + 5$ であるから

$$5A = 5 \cdot 7a + 25 = 7(5a + 3) + 4 \quad \text{すなわち} \quad 5A \text{ を } 7 \text{ で割った余りは } 4$$

B を 7 で割ったときの商が b , 余りが 4 のとき, $B = 7b + 4$ であるから

$$5B = 5 \cdot 7b + 20 = 7(5b + 2) + 6 \quad \text{すなわち} \quad 5B \text{ を } 7 \text{ で割った余りは } 6$$

C を 7 で割ったときの商が c , 余りが 6 のとき, $C = 7c + 6$ であるから

$$5C = 5 \cdot 7c + 30 = 7(5c + 4) + 2 \quad \text{すなわち} \quad 5C \text{ を } 7 \text{ で割った余りは } 2$$

D を 7 で割ったときの商が d , 余りが 2 のとき, $D = 7d + 2$ であるから

$$5D = 5 \cdot 7d + 10 = 7(5d + 1) + 3 \quad \text{すなわち} \quad 5D \text{ を } 7 \text{ で割った余りは } 3$$

E を 7 で割ったときの商が e , 余りが 3 のとき, $E = 7e + 3$ であるから

$$5E = 5 \cdot 7e + 15 = 7(5e + 2) + 1 \quad \text{すなわち} \quad 5E \text{ を } 7 \text{ で割った余りは } 1$$

F を 7 で割ったときの商が f , 余りが 1 のとき, $F = 7f + 1$ であるから

$$5F = 5 \cdot 7f + 5 = 7 \cdot 5f + 5 \quad \text{すなわち} \quad 5F \text{ を } 7 \text{ で割った余りは } 5$$

したがって, 5^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を 7 で割った余りを $n = 1$ より順に書くと

$5, 4, 6, 2, 3, 1, \dots$ となり, 以降これを繰り返す.

$2006 = 6 \times 334 + 2$ であるから 5^{2006} を 7 で割った余りは 4

(答) $\boxed{1} 6 \quad \boxed{2} 2 \quad \boxed{3} 3 \quad \boxed{4} 1 \quad \boxed{5} 4$

$$[2] x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2}{3 - 2} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$x - 5 = -2\sqrt{6}$ であるから、両辺を2乗して整理すると

$$\begin{aligned}(x - 5)^2 &= (-2\sqrt{6})^2 \\ x^2 - 10x + 25 &= 24 \\ x^2 - 10x + 1 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{このとき } 3x^2 - 36x + 33 &= 3x^2 - 30x + 3 - 6x + 30 \\ &= 3(x^2 - 10x + 1) - 6x + 30\end{aligned}$$

$$\text{したがって, } 3x^2 - 36x + 33 = 3 \times 0 - 6(5 - 2\sqrt{6}) + 30 = 12\sqrt{6}$$

(答) 5 2 6 1 0 1 6 3 0
 1 2 6

$$[3] \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = k \text{ より } y+z = kx, z+x = ky, x+y = kz$$

これらの辺々を加えて整理すると

$$\begin{aligned}2(x+y+z) &= k(x+y+z) \\ (2-k)(x+y+z) &= 0\end{aligned}$$

i) $x+y+z \neq 0$ のとき $k = 2$

ii) $x+y+z = 0$ のとき

$$\frac{y+z}{x} = \frac{-x}{x} = -1, \frac{z+x}{y} = \frac{-y}{y} = -1, \frac{x+y}{z} = \frac{-z}{z} = -1$$

であるから $k = -1$

このとき

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right) &= \frac{x+y}{x} \times \frac{y+z}{y} \times \frac{z+x}{z} \\ &= \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \\ &= \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} \\ &= k \times k \times k \\ &= k^3\end{aligned}$$

であるから この値は $2^3 = 8$ または $(-1)^3 = -1$

(答) 2 1 8 1

$$\begin{aligned}
 [4] \quad y &= x^2 + ax + a - 2 \\
 &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a - 2 \\
 &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + a - 2
 \end{aligned}$$

したがって、頂点の y 座標は $-\frac{1}{4}a^2 + a - 2$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4}a^2 + a - 2 &= -\frac{1}{4}(a^2 - 4a) - 2 \\
 &= -\frac{1}{4}\{(a-2)^2 - 2^2\} - 2 \\
 &= -\frac{1}{4}(a-2)^2 - 1
 \end{aligned}$$

よって、頂点の y 座標は -1 以下の値をとる。

放物線と x 軸との交点の x 座標は、2 次方程式 $x^2 + ax + a - 2 = 0$ であるから

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 8}}{2}$$

これから放物線と x 軸との交点 P, Q を結ぶ線分 PQ の長さは

$$PQ = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a + 8}}{2} - \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4a + 8}}{2} = \sqrt{a^2 - 4a + 8}$$

$\sqrt{a^2 - 4a + 8} = \sqrt{(a-2)^2 + 4}$ であるから、 PQ が最短となるのは

$$a = 2 \text{ のとき } PQ = \sqrt{4} = 2$$

(答) 22 4 23 2 24 1 25 4 26 8 27 2 28 2

[5] $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$ であるから

$0 \leq x \leq 2$ のとき $x^2 - 8x + 12 \geq 0$ より

$$|x^2 - 8x + 12| = x^2 - 8x + 12$$

$2 \leq x \leq 6$ のとき $x^2 - 8x + 12 \leq 0$ より

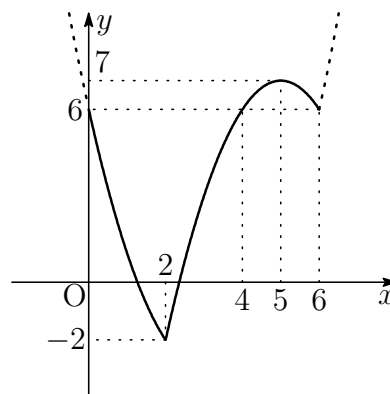
$$|x^2 - 8x + 12| = -(x^2 - 8x + 12)$$

$0 \leq x \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 8x + 12) + 2x - 6 \\ &= x^2 - 6x + 6 \end{aligned}$$

$2 \leq x \leq 6$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 8x + 12) + 2x - 6 \\ &= -x^2 + 10x - 18 \end{aligned}$$



したがって, $0 \leq x \leq t$ ($0 \leq t \leq 6$) における最大値は,

$0 \leq t \leq 4$ のとき 6

$4 \leq t \leq 5$ のとき $-t^2 + 10t - 18$

$5 \leq t \leq 6$ のとき 7

(答) 29 2 30 6 31 6 32 1 33 0 34 1 35 8 36 4 37 6
38 5 39 1 40 0 41 1 42 8 43 7

[6] $0^\circ < x < 90^\circ$, $0^\circ < y < 90^\circ$ である x, y が $\sin x = \cos y \cdots \textcircled{1}$ をみたすとき,

$\cos y = \sin(90^\circ - y)$ であるから

$$x = 90^\circ - y \quad \text{すなわち} \quad x + y = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{2}$$

さらに $\textcircled{1}$ が $\sin(y - x)$ に等しいとき, $\sin x = \sin(y - x)$ より

$$x = y - x \quad \text{すなわち} \quad y = 2x \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ を解いて $x = 30^\circ$, $y = 60^\circ$

(答) 44 9 45 0 46 3 47 0 48 6 49 0

[7] $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos A \\ &= 34 - 30 \cos A \end{aligned}$$

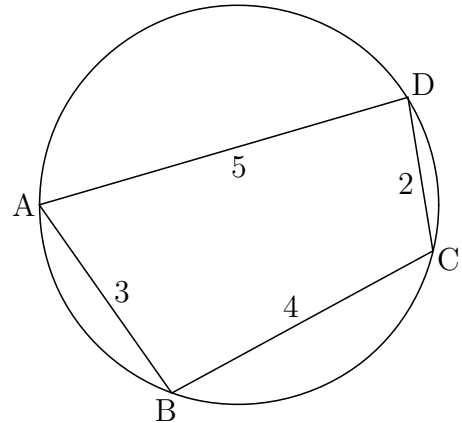
四角形 ABCD は円に内接するので

$$A + C = 180^\circ$$

すなわち $C = 180^\circ - A$

$\triangle BCD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cos C \\ &= 20 - 16 \cos(180^\circ - A) \\ &= 20 + 16 \cos A \end{aligned}$$



よって $34 - 30 \cos A = 20 + 16 \cos A$

これを解いて $\cos A = \frac{7}{23}$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{23}\right)^2} = \frac{4\sqrt{30}}{23}$$

よって、求める四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \sin A + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \sin(180^\circ - A) \\ &= \frac{15}{2} \sin A + 4 \sin A \\ &= \frac{23}{2} \sin A = \frac{23}{2} \times \frac{4\sqrt{30}}{23} = 2\sqrt{30} \end{aligned}$$

(答) 50 1 51 8 52 0 53 7 54 2 55 3 56 2 57 3 58 0

2.4 西日本リハビリテーション学院

2.4.1 一般試験(昼間部)

[A] $\frac{1}{7}$ を小数に直すと [問1] 桁の部分が循環する。また, 循環小数 $0.\dot{2}7$ を分数に直すと [問2] になる。

問1	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	4	5	6	7	8

問2	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{16}$

[B] x が実数全体を動くとき, $t = x^2 + 3x$ のとりうる値の範囲は $t \geq$ [問3] であり, $y = (x-1)(x-3)(x+4)(x+6)$ を t で表すと $y = (t - \text{[問4]})(t - \text{[問5]})$ となるので, y の最小値は [問6] となる。

問3	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-9	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	9

問4	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	4	5	6	7	8	9

問5	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	14	15	16	17	18	19

問6	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-36	-49	-64	-81	-100	-121

[C] $y = -\frac{1}{2}(x-p)^2 + 3$ のグラフが点 $(-2, -5)$ を通るとき, p の値は または である。 $p =$ のとき, $0 \leq x \leq 5$ の範囲において y は $x =$ で最小, $x =$ で最大となる。

問7	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-2	-4	-6	-8	-10	-12

問8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	2	4	6	8	10	12

問9	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問10	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

[D] $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$ をみたす自然数の組 (a, b, c) を考える。ただし, $a \geq b \geq c$ とする。 c のとりうる値の最小値は , 最大値は であり, $c = 6$ のとき (a, b) の組は全部で 組ある。

問11	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	4	5	6	7	8

問12	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	9	10	11	12	13	14

問13	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	4	5	6	7	8

[E] $0^\circ < A < 90^\circ$ で, $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき, $\sin A =$ 問14, $\tan A =$ 問15,

したがって $A + B = 90^\circ$ のとき, $\sin B + \cos B + \tan B =$ 問16 である。

問14	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

問15	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$

問16	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{2 + \sqrt{5}}{6}$	$\frac{2 + 5\sqrt{5}}{6}$	$\frac{4 + 5\sqrt{5}}{6}$	$\frac{2 + \sqrt{5}}{3}$	$\frac{2 + 5\sqrt{5}}{3}$	$\frac{4 + 5\sqrt{5}}{3}$

[F] a を実数とする。三角形 ABC において $BC = a^2 + a + 1$, $CA = a^2 - 1$, $AB = 2a + 1$ であるとき, a の範囲は $a >$ 問17 であり, 最も長い辺は 問18, 3つの内角のうち最大角の大きさは 問19° である。

問17	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3

問18	[1]	[2]	[3]
	BC	CA	AB

問19	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	75	90	105	120	135	150

[G] 三角形 ABC において, $\tan A = \frac{4}{3}$, $BC = 6$ である。このとき, $\sin A =$,
 外接円の半径は であり, $\triangle ABC$ の面積の最大値は , そのとき
 の辺 AB の長さは である。

問 20	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

問 21	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{15}{4}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{15}{2}$	$5\sqrt{3}$	$\frac{15}{\sqrt{2}}$	15

問 22	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	9	12	15	18	21	24

問 23	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$5\sqrt{5}$	$6\sqrt{5}$

解答例

[A] $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots$ であるから, 6桁の循環小数である.

$x = 0.\dot{2}7$ とおくと, $x = 0.272727\cdots$, $100x = 27.272727\cdots$ であるから

$$100x - x = 27$$

すなわち $99x = 27$

よって $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

(答) 問1 [4] 問2 [3]

$$\begin{aligned} \text{[B]} \quad x^2 + 3x &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

したがって $t \geq -\frac{9}{4}$

$y = (x-1)(x-3)(x+4)(x+6)$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} (x-1)(x-3)(x+4)(x+6) &= (x-1)(x+4) \times (x-3)(x+6) \\ &= (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x - 18) \\ &= (t-4)(t-18) \\ &= t^2 - 22t + 72 \\ &= (t-11)^2 - 11^2 + 72 \\ &= (t-11)^2 - 49 \end{aligned}$$

よって, $y = (t-4)(t-18)$ $\left(t \geq -\frac{9}{4}\right)$ の最小値は

$t = 11$ で最小値 -49 をとる

(答) 問3 [3] 問4 [1] 問5 [5] 問6 [2]

[C] $y = -\frac{1}{2}(x-p)^2 + 3$ のグラフが点 $(-2, -5)$ を通るから

$$-5 = -\frac{1}{2}(-2-p)^2 + 3$$

$$\frac{1}{2}(-2-p)^2 = 8$$

$$(2+p)^2 = 16$$

$$2+p = \pm\sqrt{16}$$

$$p = -2 \pm 4$$

$$p = 2, -6$$

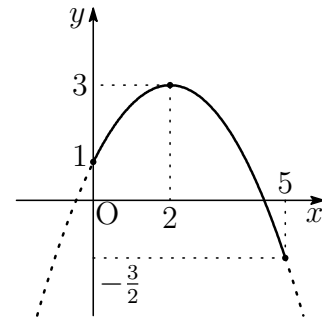
$p = 2$ のとき, y は

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$$

となり, $0 \leq x \leq 5$ の範囲において

$x = 5$ で最小値 $-\frac{3}{2}$ をとり,

$x = 2$ で最大値 3 をとる.



(答) 問7 [3] 問8 [1] 問9 [6] 問10 [3]

[D] $a \geq b \geq c > 0$ より $0 < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$ であるから

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{3}{c}$$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$ より $\frac{1}{c} < \frac{1}{3} \leq \frac{3}{c}$ これを解いて $3 < c \leq 9$

c は自然数であるから, c の最小値は 4, 最大値は 9 である.

$$c = 6 \text{ のとき} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$$

$$\text{両辺に } 6ab \text{ をかけて} \quad 6b + 6a = ab$$

$$ab - 6a - 6b + 36 = 36$$

$$\text{整理して} \quad (a - 6)(b - 6) = 36$$

このとき, $a \geq b \geq 6$ より $a - 6 \geq b - 6 \geq 0$ であるから

$a - 6$	36	18	12	9	6
$b - 6$	1	2	3	4	6

したがって, 求める (a, b) の組は

$$(a, b) = (42, 7), (24, 8), (18, 9), (15, 10), (12, 12)$$

の 5 組である.

(答) 問 11 [2] 問 12 [1] 問 13 [3]

[E] $\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

このとき $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$B = 90^\circ - A$ であるから

$$\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos B = \cos(90^\circ - A) = \sin A = \frac{2}{3}$$

$$\tan B = \tan(90^\circ - A) = \frac{1}{\tan A} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

このとき $\sin B + \cos B + \tan B = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{4 + 5\sqrt{5}}{6}$

(答) 問 14 [6] 問 15 [3] 問 16 [3]

$$[F] \quad BC = a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$$CA = a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$$

$$AB = 2a + 1$$

辺の長さは正であるから

$$(a + 1)(a - 1) > 0 \quad \text{を解いて} \quad a < -1, 1 < a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2a + 1 > 0 \quad \text{を解いて} \quad a > -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②の共通範囲を求めて $a > 1 \quad \cdots \textcircled{3}$

$$BC - CA = (a^2 + a + 1) - (a^2 - 1) = a + 2$$

$$BC - AB = (a^2 + a + 1) - (2a + 1) = a^2 - a = a(a - 1)$$

$a > 1$ のとき, $a + 2 > 0$, $a(a - 1) > 0$ となるから

$$BC - CA > 0, BC - AB > 0$$

したがって BC が最大辺である

このとき, $\triangle ABC$ が存在するためには $CA + AB > BC$

$$(a^2 - 1) + (2a + 1) > a^2 + a + 1$$

$$a > 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

③, ④から, 求める a の値の範囲は $a > 1$

最大角は A であるから

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot CA \cdot AB} \\ &= \frac{(a^2 - 1)^2 + (2a + 1)^2 - (a^2 + a + 1)^2}{2(a^2 - 1)(2a + 1)} \\ &= \frac{(a^4 - 2a^2 + 1) + (4a^2 + 4a + 1) - (a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1)}{2(a^2 - 1)(2a + 1)} \\ &= \frac{-2a^3 - a^2 + 2a + 1}{2(a^2 - 1)(2a + 1)} \\ &= \frac{-(a^2 - 1)(2a + 1)}{2(a^2 - 1)(2a + 1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって, 最大角 A の大きさは 120°

(答) 問17 [2] 問18 [1] 問19 [4]

[G] $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = 1 \div \left\{ 1 + \left(\frac{4}{3} \right)^2 \right\} = \frac{9}{25}$$

$\tan A > 0$ であるから A は鋭角で, $\cos A > 0$ である.

よって $\cos A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

また $\sin A = \tan A \times \cos A = \frac{4}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

外接円の半径 R は, 正弦定理により $\frac{6}{\sin A} = 2R$

よって $R = \frac{1}{2} \times \frac{6}{\sin A} = \frac{1}{2} \times 6 \div \frac{4}{5} = \frac{15}{4}$

$CA = b$, $AB = c$, $\triangle ABC$ の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} bc \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5} bc \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで, 余弦定理により

$$6^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$36 = b^2 + c^2 - \frac{6}{5} bc$$

$$36 = (b - c)^2 + \frac{4}{5} bc$$

$$bc = 45 - \frac{5}{4}(b - c)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より $b = c$ のとき, S は最大となる.

すなわち, $b = c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ のとき, S は最大値 18 をとる.

(答) 問 20 [6] 問 21 [1] 問 22 [4] 問 23 [3]

2.4.2 一般試験(夜間部)

[A] n を自然数とする。 $n^3 - n$ は $(n - \text{問1})n(n + \text{問2})$ と変形できるので、これを6で割った余りは n によらず 問3 である。また、 $n^3 + 2n + 1$ を6で割った余りは 問4 または 問5 (ただし、 $\text{問4} < \text{問5}$) である。

問1	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問2	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問3	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問4	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問5	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

[B] 2つの整式 $A = x^4 - 14x^3 + ax^2 - 249x + 325$, $B = x^2 - bx + 18$ を考える。 B^2 の x^2 の係数は $b^2 + \text{問6}$ であり、 $C = A - B^2$ とおくと、 C が x の1次式となるのは $a = \text{問7}$, $b = \text{問8}$ のときで、 $C = \text{問9}x + 1$ となる。

問6	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	9	18	27	36	54	72

問7	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	35	45	55	65	75	85

問8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	5	7	9	11	13

問9	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	2	3	4	5	6	7

[C] x についての2次方程式 $x^2 - 2(k-3)x - 2k + 8 = 0$ が整数の解をもつような整数 k の個数を調べたい。この方程式の解は $x = k - 3 \pm \sqrt{(k - \text{問10})^2 - \text{問11}}$ であるが、これが整数のとき $(k - \text{問10})^2 - \text{問11} = m^2$ (m は0以上の整数) とおけ、 $(k - \text{問10})^2 - m^2$ を因数分解するなどして整数の組 (k, m) を求めると、これらは全部で 問12 組できる。

問10	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6
問11	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6
問12	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	2	4	6	8	10	12

[D] 2次関数 $y = ax^2 + bx - a^2 + 12a + 12$ は $x = 4$ で最大値をとるものとし、そのグラフを C とする。このとき $b = \text{問13} \times a$ であり、この2次関数の最大値が7となるとき $a = \text{問14}$ である。さらにこのときグラフ C が x 軸と交わる2点と、 C の頂点を結んで得られる三角形の面積は 問15 となる。

問13	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-8	-4	-2	2	4	8
問14	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-7	-5	-3	3	5	7
問15	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{6\sqrt{35}}{5}$	$\frac{7\sqrt{35}}{5}$	$\frac{8\sqrt{35}}{5}$	$\frac{12\sqrt{35}}{5}$	$\frac{14\sqrt{35}}{5}$	$\frac{16\sqrt{35}}{5}$

[E] x の2次不等式 $x^2 - 2x - 15 < 0 \cdots \textcircled{1}$, $x^2 + (1-a)x - a > 0 \cdots \textcircled{2}$ について,
 $a = -4$ のとき, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ をともに満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{問16}} < x < \boxed{\text{問17}}$
 であり, $a > -1$ のとき, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ をともに満たす整数 x がちょうど3個となる
 ような定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{問18}} \leq a < \boxed{\text{問19}}$ である。

問16	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-6	-5	-4	-3	-2	-1

問17	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問18	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-3	-2	-1	1	2	3

問19	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

[F] $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta = \boxed{\text{問20}}$, $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \boxed{\text{問21}}$,
 $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = \boxed{\text{問22}}$ である。

問20	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$

問21	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	2	$\frac{8}{3}$	4	8

問22	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{11}{16}$	$-\frac{13}{16}$

[G] $\triangle ABC$ において, $\angle A = 120^\circ$, $AC = b$, $AB = c$, $BC = \sqrt{7}$ とするとき,
 $b^2 + c^2 + bc =$ 問 23 の関係がある。さらに $\triangle ABC$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき,
 $bc =$ 問 24, $b + c =$ 問 25 となり, このうち $b > c$ なるものを求めると
 $b =$ 問 26, $c =$ 問 27 である。

問 23	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	6	7	9	12	14

問 24	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 25	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 26	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3

問 27	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$

解答例

$$\begin{aligned}
 \text{[A]} \quad n^3 - n &= n(n^2 - 1) \\
 &= n(n+1)(n-1) \\
 &= (n-1)n(n+1)
 \end{aligned}$$

連続する3つの整数の中には、3の倍数と2の倍数が必ず含まれる。

したがって、連続する3つの整数の積は 3×2 で割り切れる。

よって、 $n^3 - n$ を6で割った余りは n によらず0である。

$n^3 + 2n + 1 = (n^3 - n) + (3n + 1)$ から、 $n^3 + 2n + 1$ を6で割った余りは、 $3n + 1$ を6で割った余りに等しい。

$n = 2k - 1$ (k は自然数) のとき

$$\begin{aligned}
 3n + 1 &= 3(2k - 1) + 1 \\
 &= 6(k - 1) + 4
 \end{aligned}$$

$n = 2k$ (k は自然数) のとき

$$\begin{aligned}
 3n + 1 &= 3 \cdot 2k + 1 \\
 &= 6k + 1
 \end{aligned}$$

したがって、 $n^3 + 2n + 1$ を6で割った余りは、1または4である。

(答) 問1 [1] 問2 [1] 問3 [1] 問4 [2] 問5 [5]

$$\begin{aligned}
 \text{[B]} \quad B^2 &= (x^2 - bx + 18)^2 \\
 &= x^4 - 2bx^3 + (b^2 + 36)x^2 - 36bx + 324
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{したがって } C &= A - B^2 \\
 &= (x^4 - 14x^3 + ax^2 - 249x + 325) \\
 &\quad - \{x^4 - 2bx^3 + (b^2 + 36)x^2 - 36bx + 324\} \\
 &= (2b - 14)x^3 + (a - b^2 - 36)x^2 + (36b - 249)x + 1
 \end{aligned}$$

C が x の1次式となるとき $2b - 14 = 0$, $a - b^2 - 36 = 0$

これを解いて $a = 85$, $b = 7$

このとき $36b - 249 = 36 \times 7 - 249 = 3$

したがって $C = 3x + 1$

(答) 問6 [4] 問7 [6] 問8 [3] 問9 [2]

[C] 与えられた2次方程式を変形すると

$$\begin{aligned}x^2 - 2(k-3)x &= 2k - 8 \\x^2 - 2(k-3)x + (k-3)^2 &= 2k - 8 + (k-3)^2 \\ \{x - (k-3)\}^2 &= k^2 - 4k + 1 \\ x - (k-3) &= \pm\sqrt{k^2 - 4k + 1} \\ x &= k - 3 \pm \sqrt{(k-2)^2 - 3}\end{aligned}$$

k は整数であるから、整数を解にもつとき

$$k^2 - 4k + 1 = (k-2)^2 - 3 = m^2 \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおける。これから

$$\begin{aligned}(k-2)^2 - m^2 &= 3 \\ \{(k-2) + m\}\{(k-2) - m\} &= 3 \\ (k-2+m)(k-2-m) &= 3\end{aligned}$$

上式を満たす k, m は、 $k-2+m > k-2-m$ に注意して

$$\begin{cases} k-2+m=3 \\ k-2-m=1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} k-2+m=-1 \\ k-2-m=-3 \end{cases}$$

これを解いて、 $(k, m) = (4, 1), (0, 1)$ の2組

(答) 問10 [2] 問11 [3] 問12 [1]

2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解

2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は、解の公式により

$$\begin{aligned}x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}\end{aligned}$$

2次方程式 $x^2 - 2(k-3)x - 2k + 8 = 0$ について、 $a = 1, b' = -(k-3), c = -2k + 8$ を上の公式に代入すると

$$\begin{aligned}x &= \frac{-\{-(k-3)\} \pm \sqrt{\{-(k-3)\}^2 - 1 \cdot (-2k+8)}}{1} \\ &= k - 3 \pm \sqrt{k^2 - 4k + 1}\end{aligned}$$

[D] 頂点で最大となるので

$$-\frac{b}{2a} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad b = -8a$$

このとき, $y = ax^2 - 8ax - a^2 + 12a + 12$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} ax^2 - 8ax - a^2 + 12a + 12 &= a(x^2 - 8x) - a^2 + 12a + 12 \\ &= a\{(x-4)^2 - 4^2\} - a^2 + 12a + 12 \\ &= a(x-4)^2 - a^2 - 4a + 12 \end{aligned}$$

最大値が7であるから

$$a < 0, \quad -a^2 - 4a + 12 = 7 \quad \text{これを解いて} \quad a = -5$$

2次関数 $y = -5(x-4)^2 + 7$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標は,

2次方程式 $-5(x-4)^2 + 7 = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &= \frac{7}{5} \\ x-4 &= \pm\sqrt{\frac{7}{5}} \\ x &= 4 \pm \frac{\sqrt{35}}{5} \end{aligned}$$

この2つの共有点を結ぶ線分の長さは

$$\left(4 + \frac{\sqrt{35}}{5}\right) - \left(4 - \frac{\sqrt{35}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{35}}{5}$$

x 軸との2つの共有点と頂点を結んでできる三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{35}}{5} \times 7 = \frac{7\sqrt{35}}{5}$$

(答) 問13 [1] 問14 [2] 問15 [2]

[E] ① から $(x + 3)(x - 5) < 0$

これを解くと $-3 < x < 5 \dots \textcircled{3}$

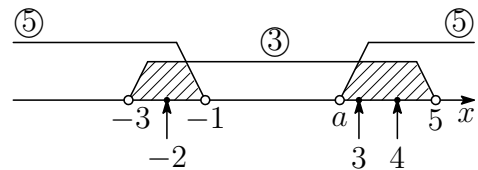
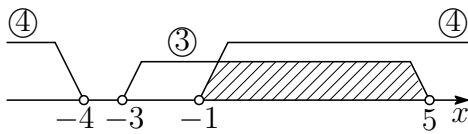
② から $(x + 1)(x - a) > 0$

$a = -4$ のとき $x < -4, -1 < x \dots \textcircled{4}$

$a > -1$ のとき $x < -1, a < x \dots \textcircled{5}$

③ と ④ の共通範囲を求めて $-1 < x < 5$

③ と ⑤ をともに満たす整数 x がちょうど 3 個であるとき, その整数は $-2, 3, 4$ である. したがって, 求める a の値の範囲は $2 \leq a < 3$



(答) 問 16 [6] 問 17 [5] 問 18 [5] 問 19 [3]

[F] $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

よって $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$

したがって $\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$

このとき $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 1 \div \frac{3}{8} = \frac{8}{3}$

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cos \theta) \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8} \right) = -\frac{11}{16} \end{aligned}$$

(答) 問 20 [3] 問 21 [4] 問 22 [5]

[G] $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2 \cdot CA \cdot AB \cos 120^\circ$$

$$(\sqrt{7})^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

よって $b^2 + c^2 + bc = 7$

$\triangle ABC$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}bc \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2}bc \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$bc = 2$$

このとき $(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$
 $= (b^2 + c^2 + bc) + bc$
 $= 7 + 2 = 9$

$b+c > 0$ であるから $b+c = 3$

b, c を解とする x の2次方程式は $x^2 - (b+c)x + bc = 0$ であるから

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1, 2$$

$b > c$ であるから $b = 2, c = 1$

(答) 問23 [3] 問24 [2] 問25 [3] 問26 [4] 問27 [4]

α, β を解とする2次方程式

α, β を解とする x の2次方程式は $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ であるから

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

2.5 熊本労災看護専門学校

2.5.1 一般試験 60分

〔問1〕2次方程式 $x^2 + 2kx + 2k - 1 = 0$ が重解をもつように定数 k の値と重解を求めよ.

- (1) $k = 1, x = -1$
- (2) $k = 1, x = 1$
- (3) $k = -1, x = -1$
- (4) $k = -1, x = 1$
- (5) $k = \pm 1, x = -1$

〔問2〕軸が $x = 3$ で、2点 $(0, 13)$, $(5, 8)$ を通る放物線の方程式を求めよ.

- (1) $y = x^2 + 6x + 13$
- (2) $y = x^2 - 6x + 13$
- (3) $y = x^2 - 6x - 13$
- (4) $y = 2x^2 + 6x + 13$
- (5) $y = 2x^2 - 6x + 13$

〔問3〕連立不等式 $\begin{cases} 6x - 5 \leq 4x + 9 \\ x + 9 \leq 4x + 3 \end{cases}$ を解け.

- (1) $x \geq 7, x \leq 2$
- (2) $x \geq 7, x \leq -2$
- (3) $x \leq -7, x \geq 2$
- (4) $-2 \leq x \leq 7$
- (5) $2 \leq x \leq 7$

〔問4〕2次不等式 $-3x^2 + ax + b > 0$ の x の範囲が $1 < x < 3$ であるとき、定数 a , b を求めよ.

- (1) $a = 12, b = -9$
- (2) $a = 12, b = 9$
- (3) $a = -12, b = -9$
- (4) $a = -12, b = 9$
- (5) $a = -4, b = 3$

〔問5〕2次関数 $y = 2x^2 + ax + 5$ の最小値が3のとき、定数 a の値をすべて求めよ。

- (1) $a = \pm 4$
- (2) $a = 4$
- (3) $a = -4$
- (4) $a = \pm 2$
- (5) $a = \pm 3$

〔問6〕 $x + y = 3$ 、 $xy = 1$ のとき、 $x^5 + y^5$ の値を求めよ。

- (1) 168
- (2) 123
- (3) 165
- (4) 158
- (5) 162

〔問7〕 $(3x - 2y)^5$ の展開式において、 x^3y^2 の項の係数を求めよ。

- (1) 108
- (2) 216
- (3) 540
- (4) 1080
- (5) 2160

〔問8〕 $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$ のとき、 $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ の値を求めよ。

- (1) $2\sqrt{2}$
- (2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- (3) $\sqrt{2}$
- (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (5) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

〔問9〕 θ が鋭角で $\cos \theta = \frac{12}{13}$ のとき, $\sin(180^\circ - \theta)$ の値を求めよ.

- (1) $-\frac{5}{12}$
- (2) $-\frac{5}{13}$
- (3) $-\frac{12}{13}$
- (4) $\frac{5}{12}$
- (5) $\frac{5}{13}$

〔問10〕 $\triangle ABC$ において, $AB = 8$, $AC = 5$, $\angle A = 60^\circ$ のとき, $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ.

- (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (2) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$
- (3) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$
- (4) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
- (5) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

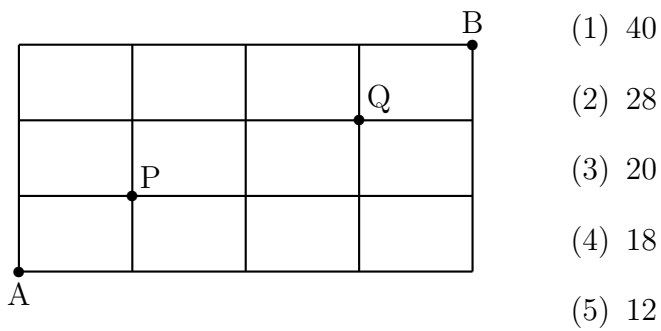
〔問11〕1から100までの整数で約数が3個のものをすべて合計したものをものを求めよ.

- (1) 87
- (2) 88
- (3) 184
- (4) 385
- (5) 770

〔問12〕 a, b, c, d の4個のお菓子すべてを A, B, C の3人の子供に分けるとき、お菓子をもらわない子供がいないように分ける場合の分け方は何通りあるか求めよ。

- (1) 81
- (2) 42
- (3) 36
- (4) 18
- (5) 16

〔問13〕 A から B への最短経路の中で、 P または Q を通るのは、何通りか求めよ。



〔問14〕 事象 A, B に対して、 $P(A) = \frac{1}{6}$ 、 $P(B) = \frac{1}{3}$ 、 $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$ のとき、 A と B がともに起こる確率を求めよ。

- (1) $\frac{1}{2}$
- (2) $\frac{1}{5}$
- (3) $\frac{2}{5}$
- (4) $\frac{1}{10}$
- (5) $\frac{9}{10}$

〔問 15〕 100 円硬貨を 5 回投げるとき，少なくとも 2 回表が出る確率を求めよ．

(1) $\frac{13}{16}$

(2) $\frac{31}{32}$

(3) $\frac{27}{32}$

(4) $\frac{1}{2}$

(5) $\frac{25}{32}$

解答例

〔問1〕重解をもつための条件は、係数について

$$(2k)^2 - 4 \cdot 1(2k - 1) = 0$$

$$4k^2 - 8k + 4 = 0$$

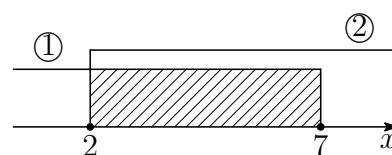
$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

これを解いて $k = 1$ 重解は $x = -\frac{2k}{2 \cdot 1} = -k$ したがって $x = -1$ 〔問2〕直線 $x = 3$ を軸とするから、求める放物線の方程式は

$$y = a(x - 3)^2 + q$$

とおける。この放物線が2点 $(0, 13)$, $(5, 8)$ を通るから

$$9a + q = 13, 4a + q = 8 \quad \text{これを解くと } a = 1, q = 4$$

よって $y = (x - 3)^2 + 4$ すなわち $y = x^2 - 6x + 13$ 〔問3〕 $6x - 5 \leq 4x + 9$ から $x \leq 7$ …① $x + 9 \leq 4x + 3$ から $x \geq 2$ …②①と②の共通部分を求めて $2 \leq x \leq 7$ 〔問4〕 $1 < x < 3$ …① を解とする2次不等式の1つは

$$(x - 1)(x - 3) < 0 \quad \text{すなわち } x^2 - 4x + 3 < 0$$

① を解とする2次不等式で、 x^2 の係数が -3 であるものは

$$-3x^2 + 12x - 9 > 0$$

したがって、 $a = 12$, $b = -9$ 〔問5〕2次関数 $y = 2x^2 + ax + 5$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} 2x^2 + ax + 5 &= 2 \left(x^2 + \frac{a}{2}x \right) + 5 \\ &= 2 \left\{ \left(x + \frac{a}{4} \right)^2 - \left(\frac{a}{4} \right)^2 \right\} + 5 \\ &= 2 \left(x + \frac{a}{4} \right)^2 - \frac{a^2}{8} + 5 \end{aligned}$$

この関数の最小値が3であるから

$$-\frac{a^2}{8} + 5 = 3 \quad \text{これを解いて } a = \pm 4$$

$$\begin{aligned} \text{〔問6〕} \quad x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7 \\ x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 18 \end{aligned}$$

上の2式から

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) &= 7 \times 18 \\ x^5 + y^5 + (xy)^2(x + y) &= 126 \\ x^5 + y^5 + 1^2 \times 3 &= 126 \\ \mathbf{x^5 + y^5 = 123} \end{aligned}$$

〔問7〕 $(3x - 2y)^5$ の展開式の一般項

$${}_5C_r(3x)^{5-r}(-2y)^r = {}_5C_r 3^{5-r}(-2)^r x^{5-r} y^r$$

において $r = 2$ として ${}_5C_2 3^3 (-2)^2 = 1080$

〔問8〕 $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2$$

よって $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 2$

ゆえに $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cos \theta) \\ &= \sqrt{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

〔問9〕 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

$\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13} \right)^2} = \frac{5}{13}$$

したがって $\sin(180^\circ - \theta) = \frac{5}{13}$

〔問10〕余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ \\ &= 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから $a = 7$

正弦定理により $2R = \frac{a}{\sin A}$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad R &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{\sin A} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \times 7 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

〔問11〕約数の個数が3個である数は合成数(素数でない数)であり、3個以上の素数の積は約数の個数が3個を超える。したがって、約数の個数が3個である数は2個の素数の積であることが必要条件である。

a, b を素数とすると、合成数 ab の約数の個数は次のとおりである。

[1] $a \neq b$ のとき

ab は $1, a, b, ab$ の4個の約数をもつ。

[2] $a = b$ のとき

すなわち、 a^2 は $1, a, a^2$ の3個の約数をもつ。

1から100までの整数で約数が3個ある合成数は $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ であり、これらの和は $2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 87$

〔問12〕1人だけ2個もらい、他の2人は1個ずつもらう場合である。

Aが2個もらう場合は ${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 12$ (通り)

B, Cがそれぞれ2個もらう場合も同様であるから

$$12 \times 3 = 36 \text{ (通り)}$$

〔問13〕Pを通る行き方は $\frac{2!}{1!1!} \times \frac{5!}{3!2!} = 20$ (通り)

Qを通る行き方は $\frac{5!}{3!2!} \times \frac{2!}{1!1!} = 20$ (通り)

P, Qをともに通る行き方は $\frac{2!}{1!1!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{2!}{1!1!} = 12$ (通り)

よって, PまたはQを通る行き方は $20 + 20 - 12 = 28$ (通り)

〔問14〕AとBがともに起こる確率は $P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ であるから

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$$

したがって $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

〔問15〕5回とも裏が出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

1回だけ表が出る確率は ${}^5C_1 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$

したがって, 少なくとも2回表が出る確率は

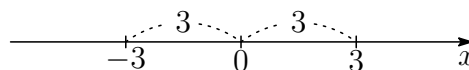
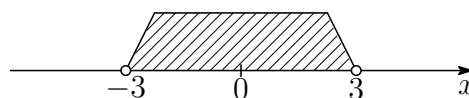
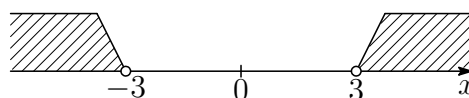
$$1 - \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{32}\right) = \frac{13}{16}$$

(答)

〔問1〕	〔問2〕	〔問3〕	〔問4〕	〔問5〕
(1)	(2)	(5)	(1)	(1)
〔問6〕	〔問7〕	〔問8〕	〔問9〕	〔問10〕
(2)	(4)	(4)	(5)	(2)
〔問11〕	〔問12〕	〔問13〕	〔問14〕	〔問15〕
(1)	(3)	(2)	(4)	(1)

付録

絶対値を含む方程式，不等式

 $|a|$ は数直線上で，実数 a に対応する点と原点との距離である．1 方程式 $|x| = 3$ の解3 と -3 で $x = \pm 3$ 2 不等式 $|x| < 3$ の解右の図より $-3 < x < 3$ 3 不等式 $|x| > 3$ の解右の図より $x < -3$ と $x > 3$ これを， $x < -3$, $3 < x$ と書く． $c > 0$ のとき，一般に次のことがいえる．方程式 $|x| = c$ の解は $x = \pm c$ 不等式 $|x| < c$ の解は $-c < x < c$ 不等式 $|x| > c$ の解は $x < -c, c < x$ 4 方程式 $|x - 2| = 3$ の解← $|X| = 3$ の形 $x - 2 = 3$ と $x - 2 = -3$ から $x = 5$ と $x = -1$ これを， $x = 5, -1$ と書く．5 不等式 $|x - 2| < 3$ の解← $|X| < 3$ の形 $-3 < x - 2 < 3$ の各辺に 2 をたして $-1 < x < 5$ 6 不等式 $|x - 2| > 3$ の解← $|X| > 3$ の形 $x - 2 < -3$ と $3 < x - 2$ から $x < -1, 5 < x$

2重根号

根号を2重なるに含む式について考えてみよう.

たとえば, $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 0$, $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$ であるから

$$\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

である. ここで

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2 = (3 + 2) + 2\sqrt{3 \cdot 2}$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2 = (3 + 2) - 2\sqrt{3 \cdot 2}$$

であるから, 次のことが成り立つ.

$$\sqrt{(3 + 2) + 2\sqrt{3 \cdot 2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{(3 + 2) - 2\sqrt{3 \cdot 2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

一般に, 次のことが成り立つ. ただし, $a > 0$, $b > 0$ とする.

2重根号

$$\sqrt{(a + b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a > b \text{ のとき } \sqrt{(a + b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

例 (1) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{(5 + 3) + 2\sqrt{5 \cdot 3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \sqrt{(4 + 3) - 2\sqrt{4 \cdot 3}}$
 $= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

(3) $\sqrt{4 + \sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$

練習 次の2重根号をはずせ.

(1) $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ (2) $\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ (3) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

[解] (1) $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{(5 + 2) + 2\sqrt{5 \cdot 2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$

(2) $\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = \sqrt{12 - 2\sqrt{3^2 \cdot 3}} = \sqrt{12 - 2\sqrt{27}} = \sqrt{9} - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$

(3) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

相加平均と相乗平均

2数 a, b に対して, $\frac{a+b}{2}$ を a と b の相加平均という.

また, $a > 0, b > 0$ のとき, \sqrt{ab} を a と b の相乗平均という.

$a > 0, b > 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

であるから $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは, $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ すなわち $a=b$ のときである.

したがって, 次のことがいえる.

相加平均と相乗平均の大小関係

$a > 0, b > 0$ のとき $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは, $a=b$ のときである.

← この不等式は

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

の形で使うことが多い.

相加平均と相乗平均の大小関係を不等式の証明に利用してみよう.

例題 $a > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

[証明] $a > 0, \frac{1}{a} > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$$

よって $a + \frac{1}{a} \geq 2$

[証終]

[注意] $a > 0$ かつ $a = \frac{1}{a}$, すなわち $a = 1$ のときに等号が成り立つ.