平成21年度　九州ルーテル学院大学　一般II期入学試験問題
数学I (平成21年3月7日) 70分

1 次の各問に答えよ.

(1) $x+\dfrac{1}{x}=5$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ および $x-\dfrac{1}{x}$ の値を求めよ.

(2) $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\tan\theta=-3$ のとき，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ の値を求めよ.

(3) x^4-9x^2+16 を因数分解せよ.

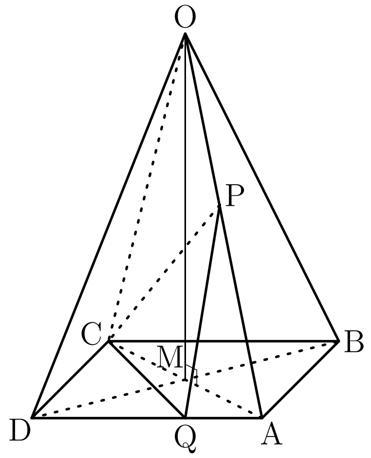
(4) $\dfrac{23}{5+\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a と b の値を求めよ.

(5) 2次方程式 $x^2-px+p+14=0$ の2つの解の比が $2:3$ になっているとき，p の値とそのときの解を求めよ.

2 x 軸と接し，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ および $(2,\ 2)$ を通る2次関数を求め，グラフに図示せよ.

3 2次関数 $f(x)=(x-1)^2+2$ と点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ を考える．点Aを通り，$y=f(x)$ に接する直線の方程式を求めよ (そのような直線は2本ある).

4 以下の図は，1辺の長さが1の正方形ABCDを底辺とする正四角錐であり，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=2$ である.



(1) この四角錐の高さを求めよ.

(2) 点PをOA上に，点QをAD上に，$\mathrm{OP}=2\mathrm{AQ}$ となるようにとる．$\mathrm{AQ}=x$ とした場合，三角錐PAQCの体積を最大にする x とそのときの体積を求めよ.

(3) x が (2) で求めた値のとき，線分PCの長さを求めよ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x+\dfrac{1}{x}=5$ の両辺を平方すると

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5^2$$

ゆえに　$x^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=25$

よって　$\boldsymbol{x^2+\dfrac{1}{x^2}=23}$

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$ であるから，上式より

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=23-2=21$$

したがって　$\boldsymbol{x-\dfrac{1}{x}=\pm\sqrt{21}}$

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+(-3)^2}=\frac{1}{10}$$

$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\cos\theta \leqq 0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{10}}=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-3\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$

(3) (平方差による因数分解)

$$\begin{aligned}x^4-9x^2+16&=(x^2-4)^2-x^2\\&=\{(x^2-4)+x\}\{(x^2-4)-x\}\\&=\boldsymbol{(x^2+x-4)(x^2-x-4)}\end{aligned}$$

(4) $$\frac{23}{5+\sqrt{2}}=\frac{23(5-\sqrt{2})}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})}=5-\sqrt{2}$$

$-2<-\sqrt{2}<-1$ より　$3<5-\sqrt{2}<4$ であるから　$\boldsymbol{a=3}$

$a+b=5-\sqrt{2}$ より　$b=5-\sqrt{2}-a=\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

(5) 2 つの解の比から，2 つの解を $2k$，$3k$ とおくと，

2 次方程式 $x^2-px+p+14=0$ の左辺は

$$(x-2k)(x-3k)=x^2-5kx+6k^2$$

よって，x の係数および定数項を比較して

$$-p=-5k,\ p+14=6k^2$$

ゆえに $$\begin{cases} p=5k & \cdots ① \\ p=6k^2-14 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② から p を消去して整理すると

$$6k^2-5k-14=0$$

ゆえに　$(k-2)(6k+7)=0$

よって　$k=2,\ -\dfrac{7}{6}$

これを ① に代入して

$k=2$ のとき　　$p=10$

$k=-\dfrac{7}{6}$ のとき　$p=-\dfrac{35}{6}$

よって　**$\boldsymbol{p=10}$ のとき　2 解は 4，6**

$\boldsymbol{p=-\dfrac{35}{6}}$ のとき　2 解は $\boldsymbol{-\dfrac{7}{3},-\dfrac{7}{2}}$

別解 (数学 II)

2 次方程式 $x^2-px+p+14=0$ の 2 つの解を $2k$，$3k$ とすると，解と係数の関係により

$$2k+3k=p,\ 2k\cdot 3k=p+14$$

である．これから ①，② が与えられる．

$\boxed{2}$ 求める2次関数はx軸に接するので，$y=a(x-p)^2$ $(a \neq 0)$ とおける．

これが2点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$(2,\ 2)$ を通るので

$$\frac{1}{2}=a\left(\frac{1}{2}-p\right)^2,\ \ 2=a(2-p)^2$$

上の2式から　$4a\left(\frac{1}{2}-p\right)^2=a(2-p)^2$

$a \neq 0$ より　$4\left(\frac{1}{2}-p\right)^2=(2-p)^2$

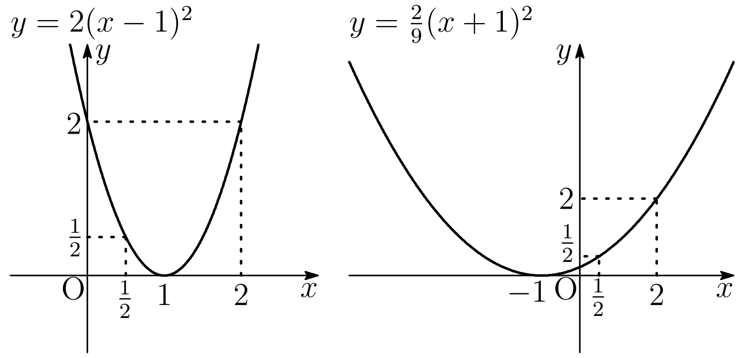
整理すると　$p^2-1=0$

ゆえに　$p=\pm 1$

したがって　$p=1$ のとき　$a=2$

$p=-1$ のとき　$a=\frac{2}{9}$

よって　$\boldsymbol{y=2(x-1)^2,\ y=\frac{2}{9}(x+1)^2}$



$\boxed{3}$ 求める直線は，y軸に平行ではなので，$y=a(x-2)+1$ とおける．

これと $y=(x-1)^2+2$ から y を消去すると

$$(x-1)^2+2=a(x-2)+1$$

整理すると　$x^2-(a+2)x+2a+2=0$

この2次方程式は，重解をもつので，$D=0$ より

$$\{-(a+2)\}^2-4\cdot 1(2a+2)=0$$

整理すると　$a^2-4a-4=0$

これを解いて　$a=2\pm 2\sqrt{2}$

ゆえに　$y=(2\pm 2\sqrt{2})(x-2)+1$

よって　$\boldsymbol{y=(2\pm 2\sqrt{2})x-3\mp 4\sqrt{2}}$ **(複号同順)**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 底面の正方形の対角線の長さは $\sqrt{2}$

△OMA は直角三角形で，$\mathrm{AM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，四角錐の高さ OM は

$$\mathrm{OM} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

(2) $$\triangle\mathrm{AQC} = \frac{1}{2}x\cdot 1 = \frac{x}{2}$$

$\mathrm{OP} = 2\mathrm{AQ} = 2x$ より　$\mathrm{PA} = \mathrm{OA} - \mathrm{OP} = 2 - 2x$

三角錐 PAQC の高さを h とすると

$$h : \mathrm{OM} = \mathrm{PA} : \mathrm{OA} = (2 - 2x) : 2$$

ゆえに　$h = (1 - x)\mathrm{OM} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}(1 - x)$

三角錐 PAQC の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{AQC}\cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{x}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{2}(1 - x) = \frac{\sqrt{14}}{12}x(1 - x) \\ &= -\frac{\sqrt{14}}{12}(x^2 - x) \\ &= -\frac{\sqrt{14}}{12}\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{14}}{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{14}}{48} \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ のとき**最大値** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{48}}$ をとる.

(3) (2) のとき，P は OA の中点であるから，△OCA に中線定理を適用して

$$\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CO}^2 = 2(\mathrm{OP}^2 + \mathrm{PC}^2)$$

ゆえに　$(\sqrt{2})^2 + 2^2 = 2(1^2 + \mathrm{PC}^2)$

$\mathrm{PC} > 0$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{PC} = \sqrt{2}}$

配点

$\boxed{\mathbf{1}}$ 25 点　(各 5 点)

$\boxed{\mathbf{2}}$ 25 点

$\boxed{\mathbf{3}}$ 25 点

$\boxed{\mathbf{4}}$ 25 点　(1) 8 点 (2) 8 点 (3) 9 点