平成21年度　九州ルーテル学院大学　一般I期入学試験問題
数学I (平成21年2月7日) 70分

1 次の各問に答えよ．

(1) $x+y=6$，$xy=2$ のとき，x^3+y^3 および x^4+y^4 の値を求めよ．

(2) x^4-3x^2+1 を因数分解せよ．

(3) $\sin 20^\circ = a$ とするとき，$\cos 110^\circ$ および $\cos 160^\circ$ を a で表せ．

(4) $|4x+1| \geqq 5$ を満たす x の範囲を求めよ．

(5) 2次方程式 $x^2-12x+a=0$ の1つの解が他の解の2乗になっているとき，a の値を求めよ．

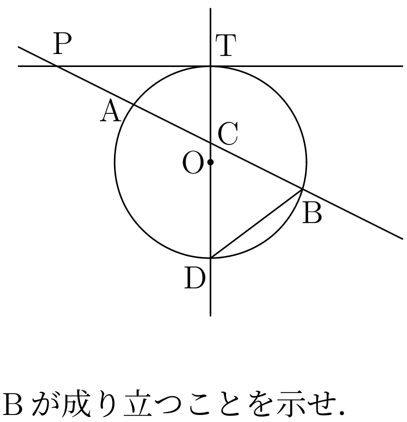
2 2次関数 $y=2x^2-4x+5$ について以下の問いに答えよ．

(1) 頂点の座標を求め，グラフを描け．

(2) この2次関数と同じ頂点を持ち，$(-2,\ 0)$ を通る2次関数の方程式を求めよ．

3 2次方程式 $x^2-(p+1)x+1-p=0$ の2つの解が，共に2よりも小さくなる定数 p の値の範囲を求めよ．

4 以下の図において，半径3の円O上の点Tにおける接線と，円O上の2つの点AおよびBを通る直線が交わる点をPとする．また，点Tおよび円Oの中心を通る直線が線分ABと交わる点をC，円Oと再び交わる点をDとする．



(1) $\mathrm{PT}^2 = \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\mathrm{PB}=8$，$\mathrm{PT}=a$，$\angle\mathrm{PCT}=60^\circ$ のとき，BC と DC を a を用いて表せ．

(3) (2) において，$\triangle\mathrm{PCT}$ と $\triangle\mathrm{BCD}$ の面積が等しくなるとき，a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot 2=32$ より

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$$
$$=6(32-2)=\mathbf{180}$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$$
$$=32^2-2\cdot 2^2=\mathbf{1016}$$

(2) (平方差による因数分解)

$$x^4-3x^2+1=(x^2-1)^2-x^2$$
$$=\{(x^2-1)+x\}\{(x^2-1)-x\}$$
$$=\boldsymbol{(x^2+x-1)(x^2-x-1)}$$

(3) $\sin 20^\circ=a$ より，$\cos 20^\circ=\sqrt{1-\sin^2 20^\circ}=\sqrt{1-a^2}$ であるから

$$\cos 110^\circ=-\cos 70^\circ$$
$$=-\sin 20^\circ=\boldsymbol{-a}$$

$$\cos 160^\circ=-\cos 20^\circ=\boldsymbol{-\sqrt{1-a^2}}$$

(4) $|4x+1|\geqq 5$ より

$$4x+1\leqq -5,\ 5\leqq 4x+1$$

よって　　$\boldsymbol{x\leqq -\frac{3}{2},\ 1\leqq x}$

(5) 2つの解を k，k^2 とおくと，2次方程式 $x^2-12x+a=0$ の左辺は

$$(x-k)(x-k^2)=x^2-(k^2+k)x+k^3$$

よって，x の係数および定数項を比較して

$$-12=-(k^2+k),\ \ a=k^3$$

ゆえに $\begin{cases} k^2+k-12=0 & \cdots ① \\ a=k^3 & \cdots ② \end{cases}$

① を解いて　$k=-4,\ 3$

これを ② に代入して　$\boldsymbol{a=-64,\ 27}$

別解 (数学 II)

2 次方程式 $x^2-12x+a=0$ の 2 つの解を k，$3k^2$ とすると，解と係数の関係により

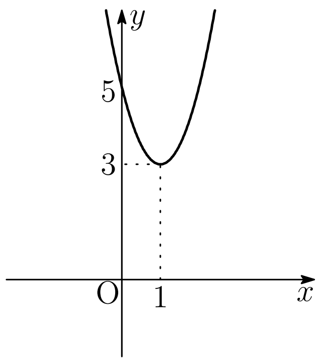
$$k+k^2=12,\ k\cdot k^2=a$$

である．これから ①，② が与えられる．

2 (1)
$$\begin{aligned} y &= 2x^2-4x+5 \\ &= 2(x^2-2x)+5 \\ &= 2\{(x-1)^2-1^2\}+5 \\ &= 2(x-1)^2+3 \end{aligned}$$

よって，頂点の座標は

(1，3)



(2) (1) と同じ頂点 (1, 3) をもつ 2 次関数の方程式は $y=a(x-1)^2+3$ とおける．これが点 $(-2,\ 0)$ を通るので

$$0=a(-2-1)^2+3 \quad これを解いて \quad a=-\frac{1}{3}$$

よって，求める 2 次関数の方程式は $\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+3}$

3 2次方程式 $x^2-(p+1)x+1-p$ は，実数解をもつので，$D \geqq 0$ より

$$\{-(p+1)\}^2-4\cdot 1(1-p) \geqq 0$$

整理すると　$p^2+6p-3 \geqq 0$

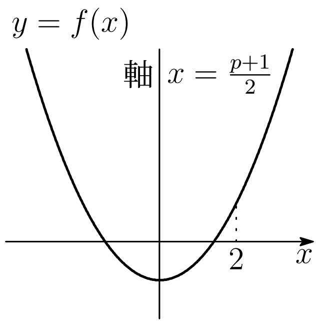
ゆえに　$p \leqq -3-2\sqrt{3},\ -3+2\sqrt{3} \leqq p \quad \cdots ①$

$f(x)=x^2-(p+1)x+1-p$ とおくと，与えられた2次方程式の解は，放物線 $y=f(x)$ の x 軸との共有点の x 座標である．$y=f(x)$ は下に凸の放物線であり，軸の方程式は

$$x=-\frac{-(p+1)}{2\cdot 1}=\frac{p+1}{2}$$

$y=f(x)$ の x 軸との共有点の x 座標は，ともに2より小さいので，軸の位置および $f(2)$ の符号について，次が成り立つ．

$$\frac{p+1}{2}<2,\ f(2)>0$$



第1式から　$p<3 \quad \cdots ②$

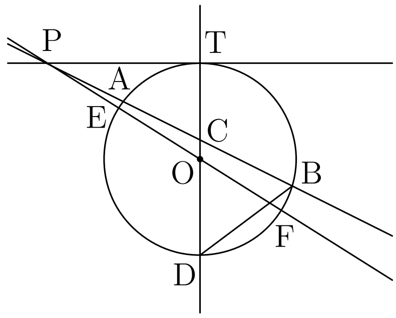
第2式から　$2^2-(p+1)\cdot 2+1-p>0$

ゆえに　$p<1 \quad \cdots ③$

①，②，③ の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{p \leqq -3-2\sqrt{3},\ -3+2\sqrt{3} \leqq p<1}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 直線 PO と円 O の交点を E，F とすると，
方べきの定理により



$$
\begin{aligned}
\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} &= \mathrm{PE}\cdot\mathrm{PF} \\
&= (\mathrm{PO}-\mathrm{EO})(\mathrm{PO}+\mathrm{OF}) \\
&= (\mathrm{PO}-3)(\mathrm{PO}+3) \\
&= \mathrm{PO}^2-9
\end{aligned}
$$

一方，$\triangle\mathrm{POT}$ は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PT}^2 &= \mathrm{PO}^2-\mathrm{TO}^2 \\
&= \mathrm{PO}^2-9
\end{aligned}
$$

よって，上の 2 式より　$\mathrm{PT}^2=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$

(2) $\mathrm{PT}=\mathrm{PC}\sin 60^\circ$ であるから

$$a=\mathrm{PC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{PC}=\frac{2}{\sqrt{3}}a$$

よって　　$\mathrm{BC}=\mathrm{PB}-\mathrm{PC}=\boldsymbol{8-\frac{2}{\sqrt{3}}a}$

また，$\mathrm{PT}=\mathrm{CT}\tan 60^\circ$ であるから

$$a=\mathrm{CT}\times\sqrt{3}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{CT}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

よって　　$\mathrm{DC}=\mathrm{DT}-\mathrm{CT}=\boldsymbol{6-\frac{a}{\sqrt{3}}}$

(3) (2) の結果より

$$\triangle\mathrm{PCT} = \frac{1}{2}\mathrm{PT}\cdot\mathrm{CT} = \frac{1}{2}a \times \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \quad \cdots ①$$

$\angle\mathrm{BCD} = 60^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}\left(8 - \frac{2}{\sqrt{3}}a\right)\left(6 - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 12\sqrt{3} - 5a + \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{PCT} = \triangle\mathrm{BCD}$ であるから，①，② より

$$\frac{a^2}{2\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} - 5a + \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \qquad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \frac{12\sqrt{3}}{5}}$$

配点

$\boxed{\mathbf{1}}$ 25 点　(各 5 点)

$\boxed{\mathbf{2}}$ 25 点　(1) 10 点 (2) 15 点

$\boxed{\mathbf{3}}$ 25 点

$\boxed{\mathbf{4}}$ 25 点　(1) 8 点 (2) 8 点 (3) 9 点