平成20年度　九州ルーテル学院大学　一般II期入学試験問題
数学I (平成20年3月8日) 70分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ.

(1) $A = x^2 + 5x$, $B = -3x^2 + 3x + 8$ のとき，$A - X = B$ を満たす X を求めよ.

(2) $x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ のとき，$x^2 + y^2$, $x^3 - y^3$ の値を求めよ.

(3) $\dfrac{1}{\sin 150^\circ - \cos 30^\circ} + \dfrac{1}{\cos 60^\circ + \sin 120^\circ}$ を簡単にせよ.

(4) 2次方程式 $x^2 - (p+2)x + 27 = 0$ の1つの解が他の解の3倍であるとき，p の値を求めよ.

(5) 連立不等式 $4x^2 - 1 > 0$ および $x^2 + x - 6 < 0$ を満たす整数解の個数を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $ax^2 + bc + c > 0$ を満たす x の範囲が $-\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{3}{4}$ であるとき，a, b および c を最も簡単な整数比で表せ.

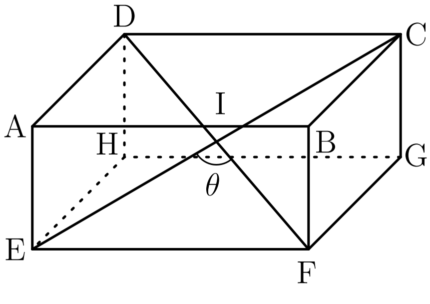
$\boxed{\mathbf{3}}$ 2次関数 $f(x) = x^2 + kx - k + 2$ について以下の問いに答えよ.

(1) $k = 3$ のときの $y = f(x)$ のグラフを描け．グラフには頂点，x 軸との交点および y 軸との交点の座標を明示せよ.

(2) $f(x) = 0$ が重解を持つとき，k の値を求めよ.

(3) $f(x) = 0$ が $x > 1$ の範囲に異なる2つの実数解を持つとき，k の値の範囲を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の直方体ABCD-EFGHにおいて，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{BC}} = 3$ および $\overline{\mathrm{AE}} = 2$ とする．また，対角線CEおよびDFの交点をIとし，両対角線のなす角を θ とする.



(1) DFの長さを求めよ.

(2) $\cos\theta$ の値を求めよ.

(3) $\triangle$EFIの面積を求めよ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $A-X=B$ より，$X=A-B$ であるから

$$X=(x^2+5x)-(-3x^2+3x+8)=\boldsymbol{4x^2+2x-8}$$

(2) $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ より　$x+y=\sqrt{2},\ x-y=1,\ xy=\dfrac{1}{4}$

ゆえに　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{2})^2-2\cdot\dfrac{1}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} x^3-y^3&=(x-y)(x^2+xy+y^2)\\ &=(x-y)\{(x+y)^2-xy\}\\ &=1\left\{(\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}\right\}=\boldsymbol{\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 150^\circ-\cos 30^\circ}+\frac{1}{\cos 60^\circ+\sin 120^\circ}&=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &=\frac{2}{1-\sqrt{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}\\ &=\frac{2(1+\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\\ &=\frac{4}{1-3}=\boldsymbol{-2} \end{aligned}$$

(4) 2つの解を α，3α とおくと，2次方程式 $x^2-(p+2)x+27=0$ の左辺は

$$(x-\alpha)(x-3\alpha)=x^2-4\alpha x+3\alpha^2$$

よって，x の係数および定数項を比較して

$$-(p+2)=-4\alpha,\ 27=3\alpha^2$$

ゆえに　$\begin{cases} p=4\alpha-2 & \cdots ① \\ \alpha^2=9 & \cdots ② \end{cases}$

② から　$\alpha=\pm 3$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{p=10,\ -14}$

別解 (数学 II)

2次方程式 $x^2-(p+2)x+27=0$ の2つの解を α，3α とすると

$$\alpha+3\alpha=p+2,\ \alpha\cdot 3\alpha=27$$

である．これから ①，② が与えられる．

(5) $4x^2-1>0$ から

$$(2x+1)(2x-1)>0 \quad \text{ゆえに} \quad x<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x \quad \cdots ①$$

$x^2+x-6<0$ から

$$(x+3)(x-2)<0 \quad \text{ゆえに} \quad -3<x<2 \quad \cdots ②$$

① および ② を満たす範囲は　$-3<x<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<x<2$

よって，これを満たす整数解は　$-2,\ -1,\ 1$ の **3 個**

2 $-\dfrac{2}{5}<x<\dfrac{4}{5}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは　$\left(x+\dfrac{2}{5}\right)\left(x-\dfrac{3}{4}\right)<0$

ゆえに　　$(5x+2)(4x-3)<0$

よって　　$20x^2-7x-6<0$

不等号の向きに注意して　$-20x^2+7x+6>0$

したがって　　$\boldsymbol{a=-20,\ b=7,\ c=6}$

3 (1) $k=3$ のとき　$y=x^2+3x-1$

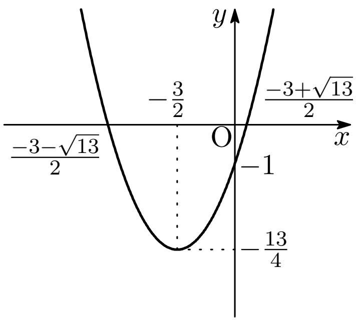
ゆえに　$y=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$

よって，頂点の座標は $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{13}{4}\right)$

x 軸との共有点の x 座標は，

2 次方程式 $x^2+3x-1=0$ の解

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$



であるから，その座標は　$\left(\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2},\ 0\right),\ \left(\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2},\ 0\right)$

y 軸との交点は，$x=0$ を代入して $y=-1$　よって　$(0,-1)$

(2) $x^2+kx-k+2=0$ が重解を持つとき，$D=0$ であるから

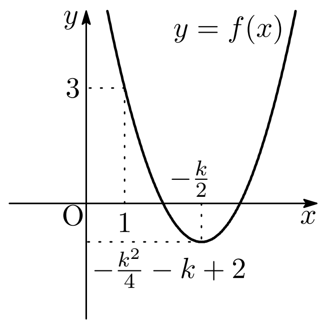
$$k^2-4\cdot1\cdot(-k+2)=0$$

ゆえに　$k^2+4k-8=0$

よって　$\boldsymbol{k=-2\pm2\sqrt{3}}$

(3) $f(x)=x^2+kx-k+2=\left(x+\dfrac{k}{2}\right)^2-\dfrac{k^2}{4}-k+2$ であるから

$f(x)=0$ が $x>1$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つための条件は



$$\begin{cases} f(1)=3>0 \\ -\dfrac{k}{2}>1 \\ -\dfrac{k^2}{4}-k+2<0 \end{cases}$$

第 2 式から　$k<-2$

第 3 式から　$k<-2-2\sqrt{3},\ -2+2\sqrt{3}<k$

したがって，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{k<-2-2\sqrt{3}}$

4 (1) 直角三角形 $\triangle$DEF により　$\mathrm{DF}^2=\mathrm{DE}^2+\mathrm{EF}^2$　$\cdots$①

直角三角形 $\triangle$DAE により　$\mathrm{DE}^2=\mathrm{DA}^2+\mathrm{AE}^2$　$\cdots$②

② を ① に代入して

$$\mathrm{DF}^2=(\mathrm{DA}^2+\mathrm{AE}^2)+\mathrm{EF}^2=3^2+2^2+4^2=29$$

$\mathrm{DF}>0$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{DF}=\sqrt{29}}$

(2) $\triangle$EFI に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{IE}^2+\mathrm{IF}^2-\mathrm{EF}^2}{2\mathrm{IE}\cdot\mathrm{IF}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2-4^2}{2\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{29}}$$

(3) $\triangle$EFI は長方形 DEFC の $\dfrac{1}{4}$ であるから，② より

$$\mathrm{DE}^2=3^2+2^2=13\quad ゆえに\quad \mathrm{DE}=\sqrt{13}$$

よって　$\triangle\mathrm{EFI}=\dfrac{1}{4}\times\mathrm{EF}\cdot\mathrm{DE}=\dfrac{1}{4}\times4\sqrt{13}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

配点

$\boxed{\mathbf{1}}$ 34 点
(1) 3 点 (2) 5 点 $\times 2 = 10$ 点 (3) 5 点 (4) 8 点 (5) 8 点

$\boxed{\mathbf{2}}$ 18 点

$\boxed{\mathbf{3}}$ 24 点
(1) 8 点 (2) 8 点 (3) 8 点

$\boxed{\mathbf{4}}$ 24 点
(1) 8 点 (2) 8 点 (3) 8 点