平成20年度　九州ルーテル学院大学　一般I期入学試験問題
数学I (平成20年2月9日) 70分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ.

(1) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy\right)^3 \times \left(-\dfrac{4}{3x}\right)^2$ を簡単にせよ.

(2) $x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ および $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ の値を求めよ.

(3) $\sin 20^\circ = a$ とする. $\cos 20^\circ \cos 160^\circ + \sin 160^\circ \tan 110^\circ \sin 110^\circ$ の値を求めよ.

(4) $f(x)=x^2+(k+1)x+k+1$ とするとき, $f(x)$ が常に正となる k の値の範囲を求めよ.

(5) $|x^2-4x| \geqq x$ を満たす x の範囲を求めよ.

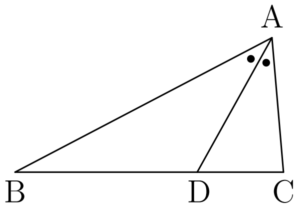
$\boxed{\mathbf{2}}$ 2次関数 $f(x)=3x^2+6x-24$ について以下の問いに答えよ.

(1) 頂点の座標を求めよ.

(2) $y=f(x)$ のグラフを x 軸の正の方向に p だけ平行移動させ原点を通るようにするとき, p の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする. 関数 $f(\theta)=2\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値および最小値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の $\triangle\mathrm{ABC}$ において, $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$ および $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{2}$ とする. また, $\overline{\mathrm{AD}}$ は $\angle\mathrm{BAC}$ の2等分線であり, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}$ の関係がある.



(1) $\overline{\mathrm{BD}}$ の長さを求めよ.

(2) $\cos\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めよ.

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy\right)^3 \times \left(-\dfrac{4}{3x}\right)^2 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x^3y^3 \times \dfrac{16}{9x^2} = \boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}xy^3}$

(2) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = \mathbf{7}$

$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 3^3 - 3{\cdot}3 = \mathbf{18}$

$x^4 + \dfrac{1}{x^4} = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = \mathbf{47}$

(3) $\sin 20^\circ = a$ より，$\cos 20^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 20^\circ} = \sqrt{1 - a^2}$ であるから

$$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ = a$$
$$\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ = -\sqrt{1 - a^2}$$
$$\begin{aligned}\sin 110^\circ &= \sin(180^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ \\ &= \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ = \sqrt{1 - a^2}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos 110^\circ &= \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ \\ &= -\cos(90^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ = -a\end{aligned}$$
$$\tan 110^\circ = \frac{\sin 110^\circ}{\cos 110^\circ} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{-a} = -\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$$

よって　$\cos 20^\circ \cos 160^\circ + \sin 160^\circ \tan 110^\circ \sin 110^\circ$

$$= \sqrt{1 - a^2} \times (-\sqrt{1 - a^2}) + a\left(-\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}\right) \times \sqrt{1 - a^2}$$
$$= -(1 - a^2) - (1 - a^2) = \boldsymbol{-2 + 2a^2}$$

(4) 判別式 D は

$$\begin{aligned}D &= (k + 1)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(k + 1) \\ &= k^2 - 2k - 3 \\ &= (k + 1)(k - 3)\end{aligned}$$

$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$D < 0$ が成り立てばよいので

$(k + 1)(k - 3) < 0$　これを解いて　$\boldsymbol{-1 < k < 3}$

(5) $|x^2-4x| \geqq x$ から

$$x^2-4x \leqq -x \cdots ① \quad \text{または} \quad x \leqq x^2-4x \cdots ②$$

① から　$x^2-3x \leqq 0$
ゆえに　$x(x-3) \leqq 0$
よって　$0 \leqq x \leqq 3$　$\cdots ③$

② から　$x^2-5x \geqq 0$
ゆえに　$x(x-5) \geqq 0$
よって　$x \leqq 0,\ 5 \leqq x$　$\cdots ④$

したがって，求める不等式の解は，③ または ④ であるから

$$\boldsymbol{x \leqq 3,\ 5 \leqq x}$$

2 (1) $f(x)=3x^2+6x-24$

$$\begin{aligned} &=3(x^2+2x)-24 \\ &=3\{(x+1)^2-1^2\}-24 \\ &=3(x+1)^2-27 \end{aligned}$$

したがって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(-1,-27)}$

(2) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $3x^2+6x-24=0$ の解であるから

$x^2+2x-8=0$
ゆえに　$(x+4)(x-2)=0$
よって　$x=-4,\ 2$

したがって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の座標は $(-4,\ 0)$，$(2,\ 0)$ であるから，x 軸の正の方向に 4 だけ平行移動すればよいので，$\boldsymbol{p=4}$

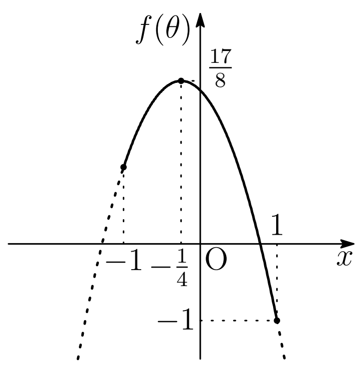
3 $2\sin^2\theta-\cos\theta=2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta$

$$=-2\cos^2\theta-\cos\theta+2$$

$\cos\theta = x$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ であり

$$f(\theta)=-2x^2-x+2$$

すなわち　$f(\theta)=-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$



よって　$x=-\dfrac{1}{4}$ で，**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{17}{8}}$ をとり，$x=1$ で**最小値** $\boldsymbol{-1}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\mathrm{AB} : \mathrm{CA} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$ より　$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 3 : \sqrt{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{BD} &= \frac{3}{3+\sqrt{2}} \times \mathrm{BC} \\ &= \frac{3}{3+\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{18\sqrt{2}-12}{7}}\end{aligned}$$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{BAC} &= \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^2 + 3^2 - (2\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{3}{6\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{4}}$

配点

$\boxed{\mathbf{1}}$ 33 点
(1) 3 点 (2) 3 点 $\times 3 = 9$ 点 (3) 5 点 (4) 8 点 (5) 8 点

$\boxed{\mathbf{2}}$ 18 点
(1) 8 点 (2) 10 点

$\boxed{\mathbf{3}}$ 25 点

$\boxed{\mathbf{4}}$ 24 点
(1) 8 点 (2) 8 点 (3) 8 点