平成 19 年度　九州ルーテル学院大学　一般 II 期入学試験問題
数学 I (平成 19 年 3 月 3 日) 70 分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) $\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{3}x\right)^3$ を簡単にせよ.

(2) $x = \sqrt{5}+\sqrt{2}$, $y = \sqrt{5}-\sqrt{2}$ とするとき, x^2+y^2 および x^3+y^3 の値を求めよ.

(3) $\dfrac{1}{\sin 150^\circ - \cos 120^\circ}$ を簡単にせよ.

(4) $|\,2x-1\,| < x+2$ を解け.

(5) 2 次不等式 $x^2-3x \leqq 0$ および $x^2-5x+4<0$ を両方満たす整数解の個数を求めよ.

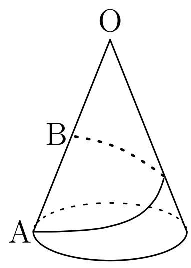
$\boxed{2}$ 2 次関数 $f(x) = x^2+2mx+m+1$ を考える. どのような x に対しても $f(x)>0$ となる m の値の範囲を求めよ.

$\boxed{3}$ $f(\theta) = \sin^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta + 1$ とする.

(1) $\theta = 60^\circ$ のとき $f(\theta)$ の値を求めよ.

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ$ のとき, $f(\theta)$ の最大値・最小値とそのときの θ の値を求めよ.

$\boxed{4}$ 底円の直径が 10, 母線 OA の長さが 30 の直円錐がある. OA の中点を B としたとき, A から出発し円錐を一回りして B に至る最短距離を考える.



(1) 直円錐の展開図を描き, 最短経路を示せ.

(2) 最短経路の長さを求めよ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{3}x\right)^3 = \dfrac{9}{4}x^2 \times \left(-\dfrac{1}{27}x^3\right) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{12}x^5}$

(2) $x + y = (\sqrt{5} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{5}$,

$xy = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 3$

したがって
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 3 = \mathbf{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= (2\sqrt{5})^3 - 3 \times 3 \times 2\sqrt{5} = \boldsymbol{22\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(3) $\dfrac{1}{\sin 150^\circ - \cos 120^\circ} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{1} = \mathbf{1}$

(4) $|\,2x - 1\,| < x + 2$ から $-(x + 2) < 2x - 1 < x + 2$

ゆえに，次の連立不等式を解けばよい．

$$\begin{cases} -(x + 2) < 2x - 1 \\ 2x - 1 < x + 2 \end{cases}$$

第 1 式を解いて　$x > -\dfrac{1}{3}$　$\cdots$①

第 2 式を解いて　$x < 3$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3} < x < 3}$

(5) $x^2 - 3x \leqq 0$ を解いて　$0 \leqq x \leqq 3$　$\cdots$①

$x^2 - 5x + 4 < 0$ を解いて　$1 < x < 4$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$1 < x \leqq 3$

よって，整数解の個数は 2 と 3 の **2 個**

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x)$ の係数について

$$D/4 = m^2 - 1 \cdot (m + 1) = m^2 - m - 1$$

とする．

$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$D < 0$ が成り立てばよい．

ゆえに　$m^2 - m - 1 < 0$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < m < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(60^\circ) = \sin^2 60^\circ + \sqrt{2}\cos 60^\circ + 1$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{2} \times \frac{1}{2} + 1 = \boldsymbol{\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(2) $\sin^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta + 1$

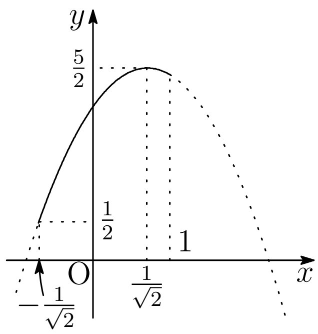
$= (1 - \cos^2\theta) + \sqrt{2}\cos\theta + 1$

$= -\cos^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta + 2$

$\cos\theta = x$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ$ のとき

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$ であり

$$f(\theta) = -x^2 + \sqrt{2}x + 2$$



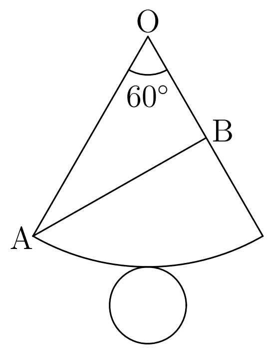
すなわち

$$f(\theta) = -\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

ゆえに　$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ をとり，

$x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 135^\circ}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{2\pi\cdot 5}{2\pi\cdot 30} \times 360^\circ = 60^\circ$ (答は右の図)



(2) $\triangle\mathrm{AOB}$ に余弦定理を適用して

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos 60^\circ$$
$$= 30^2 + 15^2 - 2\cdot 30\cdot 15\cdot\frac{1}{2}$$
$$= 15^2\cdot 3$$

ゆえに　$\mathbf{AB} = \boldsymbol{15\sqrt{3}}$