平成19年度　九州ルーテル学院大学　一般I期入学試験問題
数学I (平成19年2月3日) 70分

1 次の各問に答えよ.

(1) $(-2x^2)^3 \times \left(\dfrac{1}{3}x\right)^2$ を簡単にせよ.

(2) $x = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ とするとき, x^3+y^3 および x^4+y^4 の値を求めよ.

(3) $y = \sin x$ とする. $30^\circ \leqq x \leqq 135^\circ$ のとき y のとりうる値の範囲を求めよ.

(4) $p > 0$ とする. $x^2-(1+p)x+\dfrac{4}{5}=0$ の1つの解が他の解の5倍であるとき, p の値を求めよ.

(5) 2次不等式 $6x^2+17x+7<0$ および $6x^2+13x<0$ を両方満たす整数解の個数を求めよ.

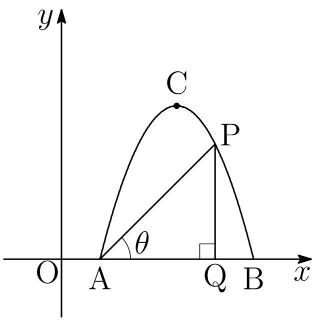
2 2次関数 $f(x) = x^2-2ax-a+1$ について以下の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ の頂点の座標を求めよ.

(2) $f(x) = 0$ が異なる2つの正の実数解を持つとき, a 値の範囲を求めよ.

(3) $f(x) = 0$ が異符号の実数解を持つとき, a の値の範囲を求めよ.

3 2次関数 $f(x) = -x^2+6x-5$ (ただし $f(x) > 0$) を考える. $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点をAおよびBとし, 頂点をCとする. また, $y = f(x)$ 上の点をPとし, Pから x 軸に下ろした垂線の足をQとする.



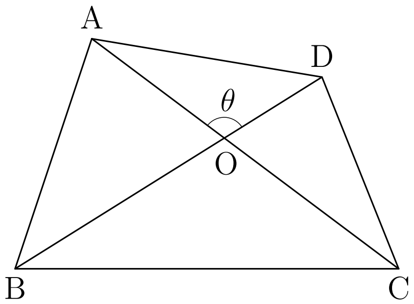
(1) A, BおよびCの座標を求めよ.

(2) Qの座標を $(t,\ 0)$ とする. $t = \dfrac{7}{2}$ のとき $\triangle$APQの面積を求めよ.

(3) $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QA}}$ となるとき, t の値を求めよ.

(4) $\angle\mathrm{PAQ} = \theta$ とする. $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ となるとき, t の値を求めよ.

$\boxed{4}$ 四角形 ABCD の対角線の交点を O とし，対角線のなす角 θ とする．
また，$\overline{\mathrm{AC}} = a$，$\overline{\mathrm{BD}} = b$ とする．



(1) 四角形 ABCD の面積を S とするとき，$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であることを示せ．

(2) $b = 10 - a$ の関係があるとき，S の最大値が $\dfrac{25}{2}$ となることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $(-2x^2)^3 \times \left(\dfrac{1}{3}x\right)^2 = -8x^6 \times \dfrac{1}{9}x^2 = \boldsymbol{-\dfrac{8}{9}x^8}$

(2) $x+y = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$，$xy = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$ より

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (\sqrt{3})^2 - 2\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{2}$

したがって

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)\{(x^2+y^2) - xy\} \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{9}{4}\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{49}{8}} \end{aligned}$$

(3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1}$

(4) 2 つの解を α，5α とおくと，2 次方程式 $x^2-(1+p)x+\dfrac{4}{5}=0$ の左辺は

$$(x-\alpha)(x-5\alpha)=x^2-6\alpha x+5\alpha^2$$

よって，x の係数を比較して

$$-(1+p)=-6\alpha,\ \ \frac{4}{5}=5\alpha^2$$

ゆえに $\begin{cases} p=6\alpha-1 & \cdots ① \\ \alpha^2=\dfrac{4}{25} & \cdots ② \end{cases}$

② から　$\alpha=\pm\dfrac{2}{5}$

これを ① に代入して　$\alpha=\dfrac{2}{5}$ のとき　$p=\dfrac{7}{5}$

$\alpha=-\dfrac{2}{5}$ のとき　$p=-\dfrac{17}{5}$

$p>0$ であるから　$\boldsymbol{p=\dfrac{7}{5}}$

別解 (数学 II)

2 次方程式 $x^2-(1+p)x+\dfrac{4}{5}$ の 2 つの解を α，5α とすると

$$\alpha+5\alpha=1+p,\ \ \alpha\cdot 5\alpha=\frac{4}{5}$$

である．これから ①，② が与えられる．

(5) $6x^2+17x+7<0$

左辺を因数分解して　$(2x+1)(3x+7)<0$

ゆえに　$-\dfrac{7}{3}<x<-\dfrac{1}{2}$　$\cdots ①$

$6x^2+13x<0$

左辺を因数分解して　$x(6x+13)<0$

ゆえに　$-\dfrac{13}{6}<x<0$　$\cdots ②$

①，② の共通範囲を求めて　$-\dfrac{13}{6}<x<-\dfrac{1}{2}$

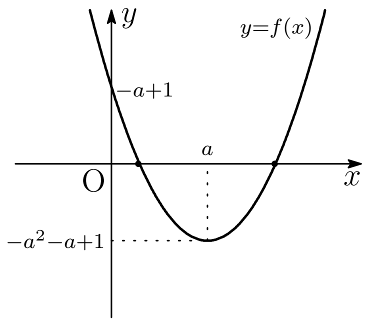
よって，整数解の個数は -2 と -1 の **2 個**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = x^2 - 2ax - a + 1$

$\quad = (x-a)^2 - a^2 - a + 1$

したがって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(a, -a^2 - a + 1)}$

(2) $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の実数解を持つための条件は



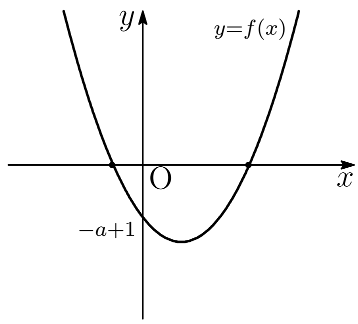
$$\begin{cases} f(0) = -a + 1 > 0 \\ a > 0 \\ -a^2 - a + 1 < 0 \end{cases}$$

第 1 式から　$a < 1$

第 3 式から　$a < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < a$

したがって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < a < 1}$

(3) $f(x) = 0$ が異符号の実数解をもつための条件は



$$f(0) = -a + 1 < 0$$

すなわち　$\boldsymbol{a > 1}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A，B の x 座標は $y = 0$ となる x の値であるから

$$-x^2 + 6x - 5 = 0 \qquad これを解いて \qquad x = 1,\ 5$$

グラフから　**A(1，0)，B(5，0)**

頂点 C の座標は

$$y = -x^2 + 6x - 5$$
$$= -(x-3)^2 + 4$$

であるから　**C(3，4)**

(2) P の x 座標は $\dfrac{7}{2}$ であるから，y 座標は

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6\cdot\frac{7}{2} - 5 = \frac{15}{4}$$

また，$\mathrm{AQ} = \dfrac{7}{2} - 1 = \dfrac{5}{2}$ であるから

$$\triangle\mathrm{APQ} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AQ} \times f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{15}{4} = \boldsymbol{\frac{75}{16}}$$

(3) $\overline{\mathrm{PQ}}=-t^2+6t-5$，$\overline{\mathrm{QA}}=t-1$ であるから，これらを $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QA}}$ に代入して

$$-t^2+6t-5=t-1$$

整理して　$t^2-5t+4=0$

ゆえに　$(t-1)(t-4)=0$

$1<t<5$ であるから　$\boldsymbol{t=4}$

(4) $\tan\theta=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{-t^2+6t-5}{t-1}=\dfrac{-(t-1)(t-5)}{t-1}=5-t$　$\cdots$①

$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ を $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1+\tan^2\theta=1\div\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

すなわち　$\tan^2\theta=\dfrac{16}{9}$

図から θ は鋭角であるから　$\tan\theta>0$

ゆえに　$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$　$\cdots$②

①，② より　$5-t=\dfrac{4}{3}$　これを解いて　$\boldsymbol{t=\dfrac{11}{3}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) A から BD に下ろした垂線の長さを h_1 とすると　$h_1 = \mathrm{OA}\sin\theta$

C から BD に下ろした垂線の長さを h_2 とすると　$h_2 = \mathrm{OC}\sin\theta$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot h_1 + \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot h_2 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{OA}\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{OC}\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{BD}(\mathrm{OA}+\mathrm{OC})\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta = \frac{1}{2}ab\sin\theta \end{aligned}$$

(2) $b = 10 - a$ より　$a > 0$ かつ $b > 0$ より　$0 < a < 10$

(1) の結果に $b = 10 - a$ を代入して

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(10-a)\sin\theta \\ &= -\frac{1}{2}(a^2 - 10a)\sin\theta \\ &= -\frac{1}{2}\{(a-5)^2 - 5^2\}\sin\theta \\ &= -\frac{\sin\theta}{2}(a-5)^2 + \frac{25}{2}\sin\theta \end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから　$0 < \sin\theta \leqq 1$

ゆえに　$a = 5$，$\sin\theta = 1$ のとき，S は最大となる．

よって　$a = 5$，$b = 5$，$\theta = 90^\circ$ のとき，S は最大値 $\dfrac{25}{2}$ をとる．