平成１８年度　九州ルーテル学院大学　一般II期入学試験問題
数学I (平成18年3月4日) 70分

1 次の各問に答えよ.

(1) $x^8 - 256$ を因数分解せよ.

(2) $x = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ とするとき, x^2+y^2 および x^3+y^3 の値を求めよ.

(3) $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} = \dfrac{3}{2}$ であるとき, $\tan\theta$ の値を求めよ.

(4) x および y が $x+y=2$ を満たすとき, x^2+y^2 の最小値を求めよ.

(5) 不等式 $x^2-2(m+1)x+m+3>0$ が常に成り立つような m の値の範囲を求めよ.

2 以下の空欄に入る値を求めよ.

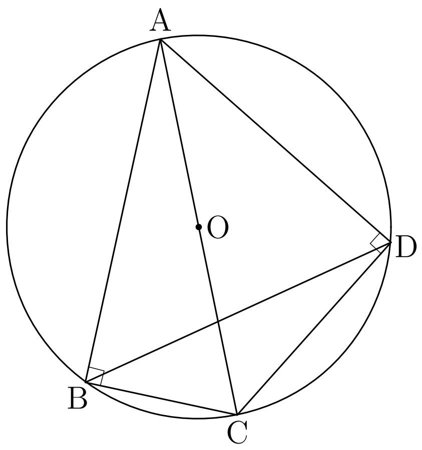
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき, 関数 $f(\theta) = 2\cos\theta - 2\sin^2\theta + 6$ は, $\theta = \boxed{\text{ア}}^\circ$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり, $\theta = \boxed{\text{ウ}}^\circ$ のとき最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2次方程式 $x^2 - 2ax + (a-1)^2 = 0$ について以下の問いに答えよ.

(1) 異なる2つの実数解を持つとき，定数 a の値の範囲を求めよ.

(2) 2つの解を α，β としたとき，$0 < \alpha < 1 < \beta < 2$ となるような定数 a の値の範囲を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 四角形ABCDにおいて，$\mathrm{BC} = 2$，$\mathrm{CD} = 3$，$\angle\mathrm{DAB} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{CDA} = 90^\circ$ とする．また四角形ABCDは点Oを中心とする円に内接している.



(1) 対角線BDの長さを求めよ.

(2) 対角線ACの長さを求めよ.

(3) 辺ABの長さを求めよ.

(4) 辺DAの長さを求めよ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x^8-256=(x^4+16)(x^4-16)$

$$\begin{aligned}&=(x^4+16)(x^2+4)(x^2-4)\\&=\boldsymbol{(x^4+16)(x^2+4)(x+2)(x-2)}\end{aligned}$$

(2) $x+y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{5}$

$xy=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2\times 2}=\dfrac{5-2}{4}=\dfrac{3}{4}$

したがって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$$=(\sqrt{5})^2-2\times\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=(\sqrt{5})^3-3\times\frac{3}{4}\times\sqrt{5}=\boldsymbol{\frac{11\sqrt{5}}{4}}\end{aligned}$$

(3)
$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}$$

であるから

$\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\dfrac{3}{2}$　　これを解いて　$\boldsymbol{\tan\theta=5}$

(4) $y=2-x$ であるから

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+(2-x)^2\\&=2x^2-4x+4\\&=2(x-1)^2+2\end{aligned}$$

したがって，**最小値は 2**

(5) 与えられた 2 次不等式の係数について

$$D=\{-2(m+1)\}^2-4\cdot 1(m+3)=4(m^2+m-2)$$

とする．

2 次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D<0$ が成り立てばよい．

$m^2+m-2<0$ から　　$(m+2)(m-1)<0$

これを解いて　　$\boldsymbol{-2<m<1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

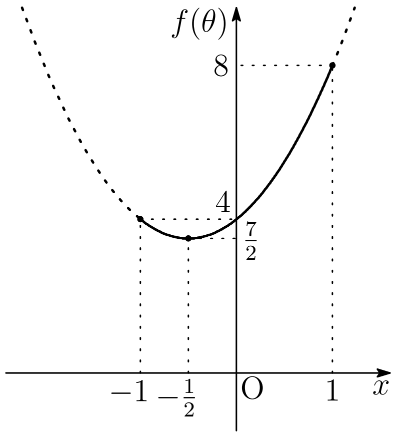
$$\begin{aligned}&2\cos\theta - 2\sin^2\theta + 6\\ =&2\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)+6\\ =&2\cos^2\theta + 2\cos\theta + 4\end{aligned}$$

$\cos\theta = x$ とおくと，

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき $-1 \leqq x \leqq 1$ であり

$$f(\theta) = 2x^2 + 2x + 4$$

よって　$f(\theta) = 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{2}$



したがって　$x = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　**$\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$**

$x = 1$　すなわち　**$\boldsymbol{\theta = 0^\circ}$ のとき　最大値 $\mathbf{8}$**

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 与えられた 2 次方程式の係数について

$$D = (-2a)^2 - 4\cdot1\cdot(a-1)^2 = 4(2a-1)$$

とする．異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$D > 0$ が成り立つことであるから　$2a - 1 > 0$

これを解いて　$\boldsymbol{a > \dfrac{1}{2}}$

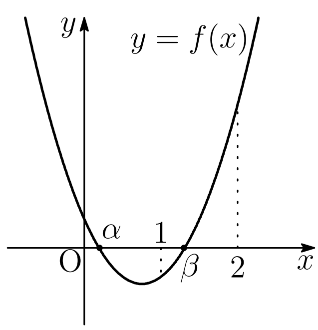
(2) $f(x) = x^2 - 2ax + (a-1)^2$ とする．x^2 の係数が正であるから，$f(x) = 0$ の 2 つの解 α，β が $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$ を満たすためには

$f(0) = (a-1)^2 > 0$　すなわち　$a \neq 1$　$\cdots$①

$f(1) = a^2 - 4a + 2 < 0$　すなわち　$2-\sqrt{2} < a < 2+\sqrt{2}$　$\cdots$②

$f(2) = a^2 - 6a + 5 > 0$　すなわち　$a < 1$，$5 < a$　$\cdots$③

したがって，①，②，③ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{2-\sqrt{2} < a < 1}$



$\boxed{4}$ (1) $\angle\mathrm{BCD} = 180^\circ - \angle\mathrm{DAB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

△BCD に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 2^2 + 3^2 - 2{\cdot}2{\cdot}3\cos 120^\circ \\ &= 4 + 9 - 2{\cdot}2{\cdot}3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 19\end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　$\mathbf{BD = \sqrt{19}}$

(2) 点 O を中心とする円は △BCD の外接円であり，AC はその直径であるから，外接円の半径を R とすると

$$\mathrm{AC} = 2R$$

また，正弦定理により

$$2R = \frac{\mathrm{BD}}{\sin 120^\circ} = \sqrt{19} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{57}}{3}$$

したがって　$\mathbf{AC = \dfrac{2\sqrt{57}}{3}}$

(3) $\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2 = \left(\frac{2\sqrt{57}}{3}\right)^2 - 2^2 = \frac{192}{9}$$

$\mathrm{AB} > 0$ であるから　$\mathbf{AB = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}}$

(4) $\angle\mathrm{CDA} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{DA}^2 = \mathrm{AC}^2 - \mathrm{CD}^2 = \left(\frac{2\sqrt{57}}{3}\right)^2 - 3^2 = \frac{147}{9}$$

$\mathrm{DA} > 0$ であるから　$\mathbf{DA = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$