平成１８年度　九州ルーテル学院大学　一般Ⅰ期入学試験問題
数学Ⅰ (平成 18 年 2 月 4 日) 70 分

1 次の各問に答えよ.

(1) $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)$ を展開せよ.

(2) $x+\dfrac{1}{x}=2$ とするとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$x^3+\dfrac{1}{x^3}$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ である.

(3) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1}{\tan\theta}$ を簡単にせよ.

(4) $x^2-3px+2p+4=0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍であるとき，p の値を求めよ.

(5) $1 \leqq \left|x+\dfrac{1}{2}\right| < 2$ を解け.

2 2 次関数 $f(x)=x^2-2kx+3k^2-k$ を考える.

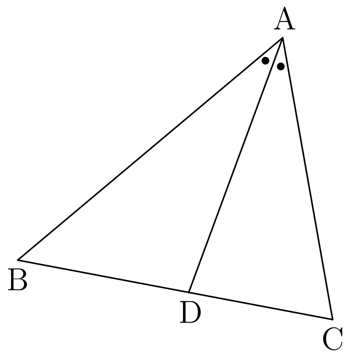
(1) $k=1$ のとき，$y=f(x)$ のグラフを描け.

(2) $f(x)$ の最小値を m とするとき，m を k の式で表せ.

(3) m の最小値とそのときの k の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2 次方程式 $x^2 - 2mx + 2m^2 - 3m - 2 = 0$ は $x < 0$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つ．このとき m の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\triangle$ABC において，AB $= 6$，CA $= 5$，$\angle$A $= 60^\circ$ とする．また，$\angle$A の二等分線と BC との交点を D とする．



(1) BC の長さを求めよ．

(2) $\triangle$ABC の外接円の半径 R を求めよ．

(3) $\triangle$ABC の面積 S を求めよ．

(4) AD の長さを求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\begin{aligned}(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) &= (x+2)(x+8)\times(x+4)(x+6)\\ &= (x^2+10x+16)(x^2+10x+24)\\ &= (x^2+10x)^2+40(x^2+10x)+384\\ &= \boldsymbol{x^4+20x^3+140x^2+400x+384}\end{aligned}$$

(2) $$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=2^2-2=\mathbf{2}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=2^3-3\times2=\mathbf{2}$$

(3) $$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{\sin^2\theta-\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}\\ &= \frac{\sin^2\theta-\cos\theta+\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}\\ &= \frac{1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\sin\theta}}\end{aligned}$$

(4) 2 つの解を α，2α とおくことができる．

解と係数の関係から　$\alpha+2\alpha=3p$，　$\alpha\cdot2\alpha=2p+4$

すなわち　$\alpha=p$，　$\alpha^2=p+2$

上の 2 式から　$p^2=p+2$

これを解いて　$\boldsymbol{p=2,\ -1}$

(5) $\left|x+\frac{1}{2}\right|\geqq 1$ より　$x+\frac{1}{2}\leqq -1$，$1\leqq x+\frac{1}{2}$

すなわち　$x\leqq -\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}\leqq x$　$\cdots$①

$\left|x+\frac{1}{2}\right|<2$ より　$-2<x+\frac{1}{2}<2$

すなわち　$-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$　$\cdots$②

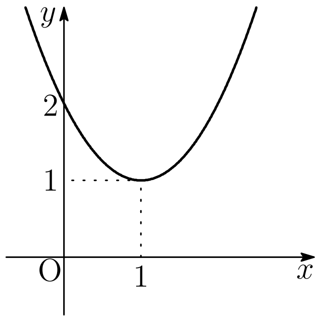
したがって，①，② の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{-\frac{5}{2}<x\leqq-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\leqq x<\frac{3}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

$= (x-1)^2 + 1$

したがって，$y = f(x)$ は頂点が $(1,\ 1)$ で下に凸の放物線である．



(2) $f(x) = x^2 - 2kx + 3k^2 - k$

$= (x^2 - 2kx) + 3k^2 - k$

$= \{(x-k)^2 - k^2\} + 3k^2 - k$

$= (x-k)^2 + 2k^2 - k$

したがって，$\boldsymbol{m = 2k^2 - k}$

(3) $m = 2k^2 - k$

$= 2\left(k^2 - \dfrac{1}{2}k\right)$

$= 2\left\{\left(k - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right\}$

$= 2\left(k - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{8}$

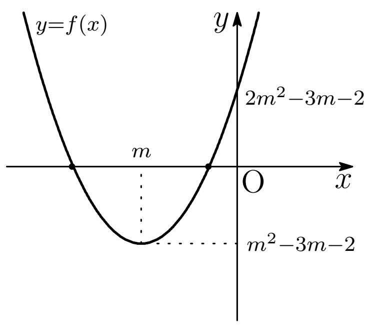
したがって，$\boldsymbol{k = \dfrac{1}{4}}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 - 3m - 2$ とおくと

$f(x) = (x^2 - 2mx) + 2m^2 - 3m - 2$

$= \{(x-m)^2 - m^2\} + 2m^2 - 3m - 2$

$= (x-m)^2 + m^2 - 3m - 2$



$f(x) = 0$ が $x < 0$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は

$$\begin{cases} f(0) = 2m^2 - 3m - 2 > 0 \\ m < 0 \\ m^2 - 3m - 2 < 0 \end{cases}$$

第 1 式から　$m < -\dfrac{1}{2},\ 2 < m$

第 3 式から　$\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} < m < \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

したがって，求める m の値の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} < m < -\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= 5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cos 60^\circ\\ &= 25+36-2\cdot5\cdot6\times\frac{1}{2}\\ &= 31\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ であるから　$\mathbf{BC=\sqrt{31}}$

(2) 正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{31}}{\sin 60^\circ}\\ &= \frac{1}{2}\times\sqrt{31}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{93}}{3}}\end{aligned}$$

(3) $S=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{15\sqrt{3}}{2}}$

(4) $\mathrm{AD}=x$ とすると，$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ABC}$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot6\cdot x\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot5\cdot x\sin 30^\circ &= \frac{15\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}x+\frac{5}{4}x &= \frac{15\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

これを解いて　$x=\boldsymbol{\dfrac{30\sqrt{3}}{11}}$