2007年度　九州東海大学　一般入学試験問題

数学 (60分) 平成19年2月3日

I 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 出題科目，ページおよび選択方法は，下表のとおりです。

出題科目	ページ	選択方法
数学I・数学A	1〜2	左の2科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。
数学II・数学B	3〜4	

3. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従ってそれぞれ正しく記入し，マークしなさい。
   - ① **氏　名　欄**　氏名を記入しなさい。
   - ② **受験番号**　受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄にマークしなさい。正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。
   - ③ **解答科目欄**　解答する科目を1つ選び，科目の下の ⬯ にマークしなさい。マークされていない場合，または，複数の科目にマークされている場合は，0点となります。
4. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{1}$，$\boxed{\boxed{2}\ \boxed{3}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字 (1〜0)，符号 (−) が入ります。1，2，3，$\cdots$ の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の1，2，3，$\cdots$ で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 $\boxed{\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}}$ に −12 と答えたいとき

	解答欄										
1	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
2	⊖	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
3	⊖	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪

2. 分数形で解答する場合は，既約分数で答えなさい。符号は分子につけ分母につけてはいけません。

例2 $\dfrac{\boxed{\boxed{4}\ \boxed{5}}}{\boxed{6}}$ に $-\dfrac{3}{5}$ と答えたいときは $\dfrac{-3}{5}$ として

	解答欄										
4	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
5	⊖	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
6	⊖	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪

数学 I・数学 A

I 次の$\boxed{}$の中に最も適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

(1) $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$，$y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ のとき，$x^2 + y^2 = \boxed{1}$，$x^3 - y^3 = \boxed{2}$ である。

$\boxed{1}$の選択肢 ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$\boxed{2}$の選択肢 ① $2\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $7\sqrt{5}$ ④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $9\sqrt{5}$

(2) a を定数とする。x の 2 次不等式 $ax^2 - 4x + a + 3 < 0$ の解がすべての実数となるとき，a の値の範囲は$\boxed{3}$である。

$\boxed{3}$の選択肢 ① $a < -4,\ 1 < a$ ② $-4 < a < 1$ ③ $-4 < a < 0$
④ $a < -4$ ⑤ $a < -1$

(3) $0^\circ \leqq x < 90^\circ$ とする。x が等式 $3\tan x = 2\cos x$ を満たすとき
$\boxed{4}\sin^2 x + \boxed{5}\sin x - 2 = 0$ であるから，$x = \boxed{6}$ である。

$\boxed{4}$の選択肢 ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$\boxed{5}$の選択肢 ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$\boxed{6}$の選択肢 ① 0° ② 30° ③ 45° ④ 60° ⑤ 90°

(4) 6 人を 3 人ずつ 2 組に分ける方法は$\boxed{7}$通りあり，6 人を A，B の 2 組に分ける方法は$\boxed{8}$通りある。ただし，A，B どちらの組にも，少なくとも 1 人は入っているものとする。

$\boxed{7}$の選択肢 ① 10 ② 15 ③ 20 ④ 30 ⑤ 45

$\boxed{8}$の選択肢 ① 31 ② 32 ③ 41 ④ 62 ⑤ 64

II 赤玉 4 個，白玉 3 個，青玉 2 個が入っている袋がある。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) この袋の中から 3 個の玉を同時に取り出すとき，

(ア) 取り出した玉の色が 1 種類になる確率は $\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{\boxed{10}\ \boxed{11}}}$ である。

(イ) 取り出した玉の色が 3 種類になる確率は $\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$ である。

(ウ) 取り出した玉の色が 2 種類になる確率は $\dfrac{\boxed{\boxed{14}\ \boxed{15}}}{\boxed{\boxed{16}\ \boxed{17}}}$ である。

(エ) 取り出される青玉の個数の期待値は $\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ 個である。

(2) この袋から 3 個の玉を同時に取り出し，玉を調べてから元に戻すことを 3 回行うとき，

(ア) 取り出した玉の色について，3 回のうち 2 回が 3 種類，1 回が 1 種類になる確率は $\dfrac{\boxed{20}}{\boxed{\boxed{21}\ \boxed{22}\ \boxed{23}}}$ である。

(イ) 各回で取り出した青玉の個数がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{\boxed{25}\ \boxed{26}}}$ である。

III a を実数の定数とする。2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + a + 3$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 放物線 $y = f(x)$ の軸が直線 $x = 2$ のとき，$a = \boxed{\boxed{27}\ \boxed{28}}$ であり，頂点の y 座標は $\boxed{\boxed{29}\ \boxed{30}}$ である。

(2) $f(x) < 0$ を満たす x が存在するとき，
a の値の範囲は $a < -\boxed{31}$，$\boxed{32} < a$ である。

(3) $f(x) < 0$ を満たす整数 x が 1，2 だけのとき，
a の値の範囲は $\boxed{\boxed{33}\ \boxed{34}} \leqq a < \dfrac{\boxed{\boxed{35}\ \boxed{36}}}{\boxed{37}}$ である。

(4) $4 < a < 10$ とする。このとき，放物線 $y = f(x)$ の頂点の x 座標 p のとりうる値の範囲は，$\boxed{\boxed{38}\ \boxed{39}} < p < \boxed{\boxed{40}\ \boxed{41}}$ である。したがって，$f(x)$ の $-2 \leqq x \leqq 2$ における最大値が 22 のとき，$a = \boxed{42}$ であり，最小値は $\boxed{43}$ である。

数学II・数学B

I 次の$\boxed{}$の中に最も適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

(1) 2次方程式$2x^2+x+3=0$の2つの解をα，βとすると，$2\alpha-1$，$2\beta-1$を解とする2次方程式のうち，x^2の係数が1であるものは$x^2+\boxed{\ 1\ }x+\boxed{\ 2\ }=0$である。

$\boxed{\ 1\ }$の選択肢　① -4　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

$\boxed{\ 2\ }$の選択肢　① -6　② -4　③ 6　④ 8　⑤ 11

(2) 等差数列の第6項が-14，初項から第10項までの和が-150であるとき，第$\boxed{\ 3\ }$項は0であり，第11項から第20項までの和は$\boxed{\ 4\ }$である。

$\boxed{\ 3\ }$の選択肢　① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

$\boxed{\ 4\ }$の選択肢　① 10　② 30　③ 50　④ 70　⑤ 90

(3) aを定数とする。関数$f(x)=x^3-3x+a$の$0 \leqq x \leqq 2$における最小値が3であるとき，$a=\boxed{\ 5\ }$であり，最大値は$\boxed{\ 6\ }$である。

$\boxed{\ 5\ }$の選択肢　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\boxed{\ 6\ }$の選択肢　① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

(4) $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=4$，$\mathrm{AB}=\sqrt{33}$である$\triangle\mathrm{OAB}$について，辺ABを$1:2$に内分する点をCとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\ 7\ }$であり，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\boxed{\ 8\ }$である。

$\boxed{\ 7\ }$の選択肢　① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

$\boxed{\ 8\ }$の選択肢　① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $2\sqrt{3}$　⑤ 4

II $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $f(x) = 5\cos^2 x + 6\sin x\cos x - 3\sin^2 x$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ を $\sin 2x$，$\cos 2x$ で表すと，

$$f(x) = \boxed{9}\sin 2x + \boxed{10}\cos 2x + \boxed{11}$$

である。

(2) (1) より，$f(x)$ は，

$$f(x) = \boxed{12}\sin(2x+\alpha) + \boxed{13}$$

と表すことができる。ただし，α は，

$$\sin\alpha = \frac{\boxed{14}}{\boxed{15}},\ \cos\alpha = \frac{\boxed{16}}{\boxed{17}},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たす。

(3) $f(x)$ は，

$$x = \frac{\pi}{\boxed{18}} - \frac{\alpha}{\boxed{19}}$$ のとき，最大値 $\boxed{20}$，

$$x = \frac{\pi}{\boxed{21}}$$ のとき，最小値 $-\boxed{22}$

をとる。

(4) $f(x)$ が最大になるとき，$\sin 2x = \dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}}$，$\cos 2x = \dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}}$ である。

III k を定数とする。円 $C : x^2 + y^2 - 4 + 2k(x - 3y + 2) = 0$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 円 C が原点を通るとき，円 C の中心は $\left(\boxed{\boxed{27}\ \boxed{28}},\ \boxed{29}\right)$，半径は $\sqrt{\boxed{\boxed{30}\ \boxed{31}}}$ である。

(2) 円 C は k の値に関係なく定点 $\mathrm{A}\left(\boxed{\boxed{32}\ \boxed{33}},\ \boxed{34}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\boxed{35}}{\boxed{36}},\ \dfrac{\boxed{37}}{\boxed{38}}\right)$ を通る。

(3) 円 C の中心 P の座標は $(\boxed{39}k,\ \boxed{40}k)$ と表せるから，P は直線 $y = \boxed{\boxed{41}\ \boxed{42}}\,x$ 上にある。また，円 C の半径は，

$$k = \frac{\boxed{43}}{\boxed{44}}$$ のとき最小値 $$\frac{\boxed{45}\sqrt{\boxed{\boxed{46}\ \boxed{47}}}}{\boxed{48}}$$ をとる。

(4) 円 C と x 軸が接するとき，$k = \boxed{49}$ である。

解答例

数学 I・数学 A

I (1)

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\frac{(5+2\sqrt{5}+1)+(5-2\sqrt{5}+1)}{5-1}=3$$

$$x-y=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2-(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\frac{(5+2\sqrt{5}+1)-(5-2\sqrt{5}+1)}{5-1}=\sqrt{5}$$

$$xy=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=1$$

したがって

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot 1=\mathbf{7}$$

さらに，上式から

$$x^3-y^3=(x-y)\{(x^2+y^2)+xy\}=\sqrt{5}(7+1)=\boldsymbol{8\sqrt{5}}$$

(2) 2 次不等式の判別式を D とすると

$$D/4=(-2)^2-a(a+3)=-(a+4)(a-1)$$

x^2 の係数および D の符号について，$a<0$ かつ $D<0$ であるから

$$-(a+4)(a-1)<0$$
$$(a+4)(a-1)>0$$

ゆえに　$a<-4,\ 1<a$

これと $a<0$ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{a<-4}$

(3) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ であるから，与えられた等式は

よって　$3\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=2\cos x$

$$3\sin x=2\cos^2 x$$
$$3\sin x=2(1-\sin^2 x)$$

ゆえに　$\boldsymbol{2\sin^2 x+3\sin x-2=0}$

$$(\sin x+2)(2\sin x-1)=0$$

$0^\circ \leqq x<90^\circ$ より $0\leqq \sin x<1$ であるから

$$\sin x=\frac{1}{2}\quad よって\quad \boldsymbol{x=30^\circ}$$

(4) 6 人を 3 人ずつ 2 組に分ける方法は，X に 3 人，Y に 3 人の 2 つの組に分けることを考え，X，Y の区別をなくすことで求めることができる。

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{1}{2} = \mathbf{10}$$

6 人を A，B の 2 組に分ける方法は　$2^6 = 64$ (通り)

これから A だけに入る場合と B だけに入る場合を除いて

$$64 - 2 = \mathbf{62} \text{ (通り)}$$

II (1)(ア) 取り出した玉の色が 1 種類であるのは，3 個とも赤玉または 3 個とも白玉のときであり，これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \mathbf{\frac{5}{84}}$$

(イ) 取り出した玉の色が 3 種類であるのは，赤玉，白玉，青玉がそれぞれ 1 個のときであるから，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{24}{84} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

(ウ) (ア) と (イ) の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{5}{84} + \frac{24}{84}\right) = \mathbf{\frac{55}{84}}$$

(エ) 袋の中から個の玉を取り出すとき

青玉 0 個の確率は　$\dfrac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{35}{84} = \dfrac{5}{12}$

青玉 1 個の確率は　$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{42}{84} = \dfrac{1}{2}$

青玉 2 個の確率は　$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{7}{84} = \dfrac{1}{12}$

したがって，青玉の個数の期待値は

$$0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2)(ア) ${}_3\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 \times \dfrac{5}{84} = \mathbf{\dfrac{5}{343}}$

(イ) $3! \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{12} = \mathbf{\dfrac{5}{48}}$

III (1) $y=x^2+ax+a+3$ の軸の方程式は $x=-\dfrac{a}{2\cdot 1}=-\dfrac{a}{2}$ であるから

$$-\frac{a}{2}=2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a=-4}$$

このとき　$y=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$

したがって，**頂点の $\boldsymbol{y}$ 座標は**　　$\boldsymbol{-5}$

(2) x^2 の係数は正であるから，$f(x)<0$ を満たす x が存在するための条件は $D>0$

したがって　　$a^2-4\cdot 1(a+3)>0$

$a^2-4a-12>0$

ゆえに　　$(a+2)(a-6)>0$

よって　　$\boldsymbol{a<-2,\ 6<a}$

(3) $f(x)<0$ を満たす整数 x が 1，2 だけである条件は

$$f(0)\geqq 0,\quad f(1)<0,\quad f(2)<0,\quad f(3)\geqq 0$$

であるから

$f(0)\geqq 0$ より　　$a+3\geqq 0$　　すなわち　$a\geqq -3$

$f(1)<0$ より　　$2a+4<0$　　すなわち　$a<-2$

$f(2)<0$ より　　$3a+7<0$　　すなわち　$a<-\dfrac{7}{3}$

$f(3)\geqq 0$ より　　$4a+12\geqq 0$　すなわち　$a\geqq -3$

したがって，共通する a の値の範囲を求めて　　$\boldsymbol{-3\leqq a<-\dfrac{7}{3}}$

(4) 頂点の x 座標は p は，$p=-\dfrac{a}{2}$ であるから

$4<a<10$ のとき　$-5<-\dfrac{a}{2}<-2$　ゆえに　$\boldsymbol{-5<p<-2}$

$-2\leqq x\leqq 2$ において，$x=2$ で最大，$x=-2$ で最小となる．

よって，$f(2)=22$ より　$2^2+a\cdot 2+a+3=22$　すなわち　$\boldsymbol{a=5}$

$f(x)=x^2+5x+8$ であるから，最小値は

$$f(-2)=(-2)^2+5\cdot(-2)+8=\mathbf{2}$$

	解 答 欄										
1	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
2	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
3	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
4	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
5	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
6	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
7	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
8	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
9	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
10	−	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
11	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
12	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
13	−	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	0
14	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
15	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
16	−	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
17	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
18	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
19	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
20	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
21	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
22	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
23	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
24	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
25	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
26	−	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
27	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
28	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
29	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
30	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0

	解 答 欄										
31	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
32	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
33	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
34	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
35	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
36	−	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	0
37	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
38	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
39	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
40	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
41	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
42	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
43	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0

解答例

数学 II・数学 B

I (1) 2 次方程式 $2x^2+x+3=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\quad \alpha\beta=\frac{3}{2}$$

ここで

$$\begin{aligned}(2\alpha-1)+(2\beta-1)&=2(\alpha+\beta)-2\\&=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-3\\(2\alpha-1)(2\beta-1)&=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1\\&=4\times\frac{3}{2}-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=8\end{aligned}$$

よって　$2\alpha-1$，$2\beta-1$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-(-3)x+8=0\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{x^2+3x+8=0}$$

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

第 6 項が -14 であるから　$a+5d=-14$　$\cdots$①

初項から第 10 項までの和が -150 であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=-150\quad \text{すなわち}\quad 2a+9d=-30\quad \cdots②$$

①，② を解いて　$a=-24$，$d=2$

よって一般項は　$a_n=-24+(n-1)\cdot 2=2n-26$

また，0 になる項は　$2n-26=0$　これを解いて　**第 13 項**

$a_{11}=-4$，$a_{20}=14$ であるから，第 11 項から第 20 項までの和は

$$\frac{1}{2}\cdot 10(-4+14)=\mathbf{50}$$

(3) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	$\searrow$	極小 $a-2$	$\nearrow$	$a+2$

よって，この関数は　$x=1$ で最小値をとるので

$a-2=3$　ゆえに　$\boldsymbol{a=5}$

このとき，最大値は　$a+2=5+2=\mathbf{7}$

(4) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{3^2+4^2-(\sqrt{33})^2}{2\cdot3\cdot4}=-\frac{1}{3}$$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=3\cdot4\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\mathbf{-4}$

点 C は AB を $1:2$ に内分する点であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$　すなわち　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\dfrac{1}{3}|2\vec{a}+\vec{b}|$

ここで

$$\begin{aligned}|2\vec{a}+\vec{b}|^2&=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})\\&=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=4\cdot3^2+4\cdot(-4)+4^2=36\end{aligned}$$

ゆえに　$|2\vec{a}+\vec{b}|=6$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\dfrac{1}{3}|2\vec{a}+\vec{b}|=\dfrac{1}{3}\times6=\mathbf{2}$

II (1) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= 5\cos^2 x + 6\sin x\cos x - 3\sin^2 x \\ &= 5\times\frac{1}{2}(1+\cos 2x) + 6\times\frac{1}{2}\sin 2x - 3\times\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ &= \boldsymbol{3\sin 2x + 4\cos 2x + 1} \end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{\sin\alpha = \dfrac{4}{5}}$, $\boldsymbol{\cos\alpha = \dfrac{3}{5}}$ とおくと $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin 2x + 4\cos 2x + 1 \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\sin 2x + \frac{4}{5}\cos 2x\right) + 1 \\ &= 5(\sin 2x\cos\alpha + \cos 2x\sin\alpha) + 1 \\ &= \boldsymbol{5\sin(2x+\alpha) + 1} \end{aligned}$$

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$0 \leqq 2x \leqq \pi$

すなわち　$\alpha \leqq 2x + \alpha \leqq \pi + \alpha$

したがって，$f(x)$ は

$2x + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}}$ **のとき最大値**をとり，

$2x + \alpha = \pi + \alpha$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2}}$ **のとき最小値**をとる．

よって　最大値は　$5\sin\dfrac{\pi}{2} + 1 = \boldsymbol{6}$

最小値は　$5\sin(\pi+\alpha) + 1 = -5\sin\alpha + 1$

$$= -5\times\frac{4}{5} + 1 = \boldsymbol{-3}$$

(4) $f(x)$ が最大となるのは，$2x + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のときであるから

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

III (1) 円 $C: x^2+y^2-4+2k(x-3y+2)=0$ が原点を通るから

$x=0,\ y=0$ を代入して　$-4+4k=0$　すなわち　$k=1$

このとき　$x^2+y^2+2x-6y=0$

ゆえに　$(x+1)^2+(y-3)^2=10$

よって円 C の**中心は $(-1,\ 3)$**，**半径は $\sqrt{10}$**

(2)
$$x^2+y^2-4+2k(x-3y+2)=0 \quad \cdots ①$$

が k についての恒等式となるための条件は

$$x^2+y^2-4=0,\ x-3y+2=0$$

これを解いて　$(x,\ y)=(-2,\ 0),\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right)$

このとき，① は k の値にかかわらず成り立つ．

したがって，円 C は，k の値にかかわらず定点 $\boldsymbol{(-2,\ 0),\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right)}$ を通る．

(3)
$$x^2+y^2-4+2k(x-3y+2)=0$$

ゆえに　$(x+k)^2+(y-3k)^2=10k^2-4k+4 \quad \cdots ②$

よって，中心 P の座標は $\boldsymbol{(-k,\ 3k)}$

$x=-k,\ y=3k$ とおく．これから P は直線 $\boldsymbol{y=-3x}$ 上にある．

また，$10k^2-4k+4=10\left(k-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{18}{5}$ であるから

半径は，$\boldsymbol{k=\frac{1}{5}}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{18}{5}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{10}}{5}}$ をとる．

(4) 円 C と x 軸が接するとき，円 C の中心の y 座標と半径について

② より　$|3k|=\sqrt{10k^2-4k+4}$

ゆえに　$9k^2=10k^2-4k+4$

すなわち　$k^2-4k+4=0$

よって　$\boldsymbol{k=2}$

	解答欄										
1	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
2	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
3	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
4	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
5	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
6	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
7	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
8	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
9	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
10	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
11	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
12	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
13	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
14	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
15	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
16	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
17	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
18	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
19	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
20	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
21	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
22	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
23	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
24	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
25	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
26	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
27	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
28	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
29	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
30	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0

	解答欄										
31	−	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
32	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
33	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
34	−	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
35	−	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
36	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
37	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
38	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
39	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
40	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
41	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
42	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
43	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
44	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
45	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
46	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
47	−	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
48	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
49	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0