2006年度　九州東海大学　一般入学試験問題

数学 (60分) 平成18年2月2日

I 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 出題科目，ページおよび選択方法は，下表のとおりです。

出題科目	ページ	選択方法
数学I・数学A	1〜2	左の2科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。
数学II・数学B	3〜4	

3. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従ってそれぞれ正しく記入し，マークしなさい。

   ① **氏名欄**　氏名を記入しなさい。

   ② **受験番号**　受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄にマークしなさい。正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。

   ③ **解答科目欄**　解答する科目を1つ選び，科目の下の ⬯ にマークしなさい。マークされていない場合，または，複数の科目にマークされている場合は，0点となります。

4. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{1}$，$\boxed{\boxed{2}\ \boxed{3}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字 (1〜0)，符号 (−) が入ります。1，2，3，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の1，2，3，… で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 $\boxed{\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}}$ に −12 と答えたいとき

	解答欄										
1	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
2	⊖	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
3	⊖	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪

2. 分数形で解答する場合は，既約分数で答えなさい。符号は分子につけ分母につけてはいけません。

例2 $\dfrac{\boxed{\boxed{4}\ \boxed{5}}}{\boxed{6}}$ に $-\dfrac{3}{5}$ と答えたいときは $\dfrac{-3}{5}$ として

	解答欄										
4	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
5	⊖	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
6	⊖	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪

数学 I・数学 A

I 次の$\boxed{}$の中にもっとも適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

(1) $x = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ の分母を有理化すると，$x = \boxed{1}$ となるから，x の整数部分は$\boxed{2}$，小数部分は$\boxed{3}$である。

$\boxed{1}$の選択肢 ① $5-2\sqrt{6}$ ② $5-2\sqrt{3}$ ③ $1+2\sqrt{6}$ ④ $5+2\sqrt{3}$ ⑤ $5+2\sqrt{6}$

$\boxed{2}$の選択肢 ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$\boxed{3}$の選択肢 ① $-5+2\sqrt{3}$ ② $-3+2\sqrt{3}$ ③ $4-2\sqrt{3}$ ④ $-4+2\sqrt{6}$ ⑤ $9-2\sqrt{6}$

(2) 放物線 $y = ax^2+bx+1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線が，2 点 $(-1,\ 3)$，$(1,\ 13)$ を通るとき，$a = \boxed{4}$，$b = \boxed{5}$ である。

$\boxed{4}$の選択肢 ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

$\boxed{5}$の選択肢 ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

(3) (i) $(3x^2-1)^7$ の展開式における x^4 の項の係数は$\boxed{6}$である。

(ii) $(x-2y+3z)^6$ の展開式における x^3y^2z の項の係数は$\boxed{7}$である。

$\boxed{6}$の選択肢 ① -189 ② -81 ③ 9 ④ 81 ⑤ 189

$\boxed{7}$の選択肢 ① -720 ② -360 ③ -12 ④ 360 ⑤ 720

(4) 円に内接する四角形 ABCD で，$\mathrm{AB}=9$，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{DA}=14$ である。いま，辺 AD の D の方への延長と，辺 BC の C の方への延長が点 P で交わり，$\mathrm{PA}=2\mathrm{PC}+6$ である。このとき，$\mathrm{PC} = \boxed{8}$，$\mathrm{CD} = \boxed{9}$ である。

$\boxed{8}$の選択肢 ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$\boxed{9}$の選択肢 ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

II a を実数の定数とする。2 次関数 $f(x)=x^2-2(a+1)x+5a-1$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ の定義域が実数全体であるとき，$f(x)$ の最小値 m を a の式で表すと，$m=\boxed{10}a^2+\boxed{11}a-\boxed{12}$ となる。さらに，a がすべての実数の値をとって変化するとき，m の最大値は $\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{14}}$ となる。

(2) $x>0$ において常に $f(x)>0$ であるとき，a のとりうる値の範囲は $\boxed{15}<a<\boxed{16}$ である。

(3) $y=f(x)$ のグラフが x 軸と $0\leqq x\leqq 3$ の範囲で異なる 2 つの交点をもつとき，a のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}}\leqq a<\boxed{19}$ である。

また，そのときこの放物線が，x 軸から切り取る線分の長さが $\sqrt{2}$ となるときの a の値は $a=\dfrac{\boxed{20}-\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{22}}$

III 1，2，3，4 の数を書いた 10 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{3}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{4}$，$\boxed{4}$，$\boxed{4}$ がある。この中から 3 枚のカードを同時に取り出すとき，次の問いに答えなさい。

(1) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数が全て同じになる確率は，$\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{\boxed{24}\boxed{25}}}$ である。

(2) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数がすべて異なる確率は，$\dfrac{\boxed{26}}{\boxed{\boxed{27}\boxed{28}}}$ である。

(3) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数の積が偶数になる確率は，$\dfrac{\boxed{\boxed{29}\boxed{30}}}{\boxed{\boxed{31}\boxed{32}}}$ である。

(4) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数の和が 3 の倍数になる確率は，$\dfrac{\boxed{\boxed{33}\boxed{34}}}{\boxed{\boxed{35}\boxed{36}\boxed{37}}}$ である。

数学 II・数学 B

I 次の$\boxed{}$の中にもっとも適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

(1) 多項式 x^3+3x^2+ax+b を多項式 x^2-x+2 で割ると，割り切れる。このとき，$a=\boxed{1}$，$b=\boxed{2}$ であり，x^3+3x^2+ax+b を因数分解すると $(x^2-x+2)(x+\boxed{3})$ となる。

$\boxed{1}$の選択肢 ① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

$\boxed{2}$の選択肢 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\boxed{3}$の選択肢 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

(2) 関数 $y=\log_2 2x+\log_2(4-x)$ は，$x=\boxed{4}$ のとき最大値$\boxed{5}$をとる。

$\boxed{4}$の選択肢 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\boxed{5}$の選択肢 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

(3) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ である 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 120° である。$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるとき $t=\boxed{6}$ である。また，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ が最小になるとき $t=\boxed{7}$ であり，最小値は$\boxed{8}$である。

$\boxed{6}$の選択肢 ① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{5}{12}$ ④ $\dfrac{7}{12}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

$\boxed{7}$の選択肢 ① $-\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ 1

$\boxed{8}$の選択肢 ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ 3

(4) a，b，c を実数の定数とする。関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は，$x=-1$ で極大，$x=3$ で極小となる．このとき，$a=\boxed{9}$，$b=\boxed{10}$ である。また，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるとき，c のとりうる値の範囲は$\boxed{11}$である。

$\boxed{9}$の選択肢 ① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

$\boxed{10}$の選択肢 ① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

$\boxed{11}$の選択肢 ① $c<-5$ ② $c<-5,\ 27<c$ ③ $-5<c<27$
④ $c<27$ ⑤ $c>27$

II 初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

である数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $a_1 = \boxed{12}$，$a_2 = \boxed{\boxed{13}\ \boxed{14}}$ である。

(2) $a_n = n(n+\boxed{15})(n+\boxed{16})$ である。ただし，$\boxed{15} < \boxed{16}$ とする。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+2} = \frac{\boxed{17}}{\boxed{18}} n(n+\boxed{19})(n+\boxed{20})$ である。
ただし，$\boxed{19} < \boxed{20}$ とする。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n(n+\boxed{21})}{\boxed{22}(n+\boxed{23})(n+\boxed{24})}$ である。
ただし，$\boxed{23} < \boxed{24}$ とする。

III 点 O を原点とする xy 平面上に，円 $C_1 : x^2+y^2=9$，円 $C_2 : (x-a)^2+y^2=r^2$ と，直線 $\ell : mx-y-6m=0$ がある。ただし，a，r，m は正の定数であるとする。

(1) 直線 ℓ は，m の値にかかわらず定点 $(\boxed{25}, \boxed{26})$ を通る。

(2) 直線 ℓ が円 C_1 に接するとき，$m = \dfrac{\sqrt{\boxed{27}}}{\boxed{28}}$ である。

(3) 直線 ℓ が円 C_1 にも円 C_2 にも接し，さらに C_1 と C_2 が外接するとき，
$a = \boxed{29}$，$r = \boxed{30}$ である。また，このとき ℓ と C_1，C_2 の接点をそれぞれ P，Q とすると，$\mathrm{PQ} = \boxed{31}\sqrt{\boxed{32}}$ である。

解答例

数学I・数学A

I (1) $x = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2} = \mathbf{5+2\sqrt{6}}$

$2\sqrt{6}=\sqrt{24}$ であるから　$4<2\sqrt{6}<5$

各辺に5をたして　$9<5+2\sqrt{6}<10$

$5+2\sqrt{6}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると

$$a+b=5+2\sqrt{6},\ \ a=\mathbf{9}$$

であるから，$b=\mathbf{-4+2\sqrt{6}}$

(2) 2点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に3だけ平行移動した点がそれぞれ $(-1,\ 3)$，$(1,\ 13)$ であるとすると

$$\begin{cases} x_1-2=-1 \\ y_1+3=3 \end{cases},\ \begin{cases} x_2-2=1 \\ y_2+3=13 \end{cases}$$

であるから，これを解いて　$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 10)$

2点A，Bは放物線 $y=ax^2+bx+1$ 上の点であるから

$$0=a\cdot1^2+b\cdot1+1$$
$$10=a\cdot3^2+b\cdot3+1$$

整理すると　$a+b=-1$　$\cdots$①

$9a+3b=9$　すなわち　$3a+b=3$　$\cdots$②

①，②を解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

(3) (i) 一般項 ${}_7\mathrm{C}_r(3x^2)^{7-r}(-1)^r$ において，$2(7-r)=4$ とすると　$r=5$

よって，求める係数は　${}_7\mathrm{C}_5\times3^2\times(-1)^5=\mathbf{-189}$

(ii) $\dfrac{6!}{3!2!1!}\times(-2)^2\times3=\mathbf{720}$

(4) 方べきの定理により

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PD} = \mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC} \quad \cdots ①$$

$\mathrm{PC} = x$ とおくと

条件より　$\mathrm{PA} = 2x + 6$

また　$\mathrm{PB} = \mathrm{PC} + \mathrm{BC} = x + 6$

$\mathrm{PD} = \mathrm{PA} - \mathrm{DA} = (2x + 6) - 14 = 2x - 8$

① に代入して　$(2x + 6)(2x - 8) = (x + 6)x$

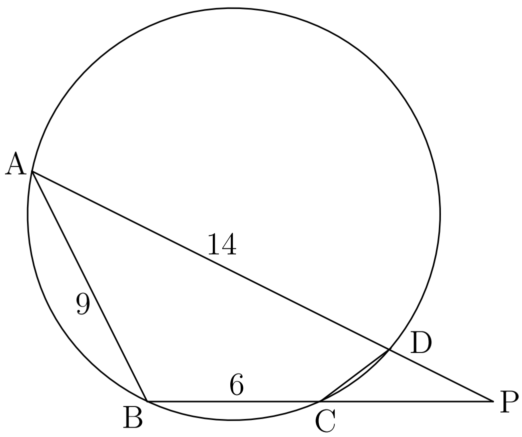
整理して　$3x^2 - 10x - 48 = 0$

$(x - 6)(3x + 8) = 0$

$x > 0$ であるから　$x = 6$　すなわち　$\mathbf{PC = 6}$

また，$\triangle\mathrm{ABP}$ と $\triangle\mathrm{CDP}$ の相似比は　$\mathrm{PA} : \mathrm{PC} = 18 : 6 = 3 : 1$

したがって，$\mathrm{AB} = 9$，$\mathrm{AB} : \mathrm{CD} = 3 : 1$ から　$\mathbf{CD = 3}$



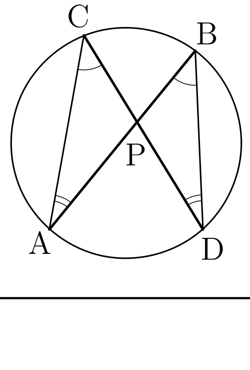
方べきの定理

円の 2 つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，

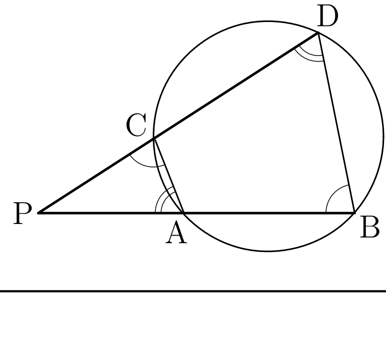
$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

が成り立つ.

［1］



［2］



II (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2(a+1)x+5a-1 \\ &= x^2-2(a+1)x+(a+1)^2-(a+1)^2+5a-1 \\ &= \{x-(a+1)\}^2-a^2+3a-2 \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{m=-a^2+3a-2}$

$$\begin{aligned} m &= -a^2+3a-2 \\ &= -(a^2-3a)-2 \\ &= -\left\{\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-2 \\ &= -\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって，m の最大値は　$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(2)　［1］$a+1 \leqq 0$ のとき，すなわち $a \leqq -1$ のとき

$f(0) \geqq 0$ であるから

$$5a-1 \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad a \geqq \frac{1}{5}$$

このとき，$a \leqq -1$ と共通する値の範囲はない

［2］$a+1>0$ のとき，すなわち $a>-1$ のとき

$(*)$ より　$-a^2+3a-2>0$

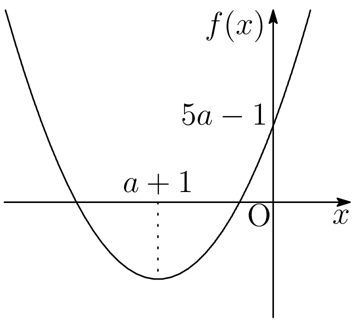
$a^2-3a+2<0$

$(a-1)(a-2)<0$

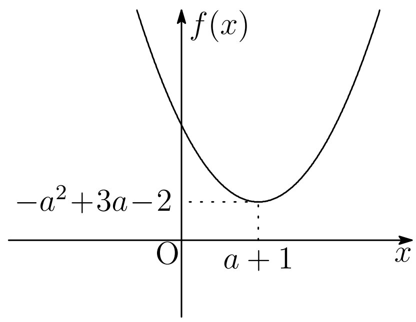
$a>-1$ に注意して　$1<a<2$

［1］,［2］より　$\boldsymbol{1<a<2}$

［1］



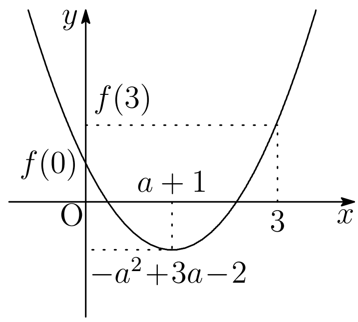
［2］



(3) $(*)$ から

$$y=\{x-(a+1)\}^2-a^2+3a-2$$

であるから，グラフが右の図のような位置にあればよい．すなわち



$$\begin{cases} 0<a+1<3 \\ -a^2+3a-2<0 \\ f(0)\geqq 0 \\ f(3)\geqq 0 \end{cases}$$

第 1 式から　$-1<a<2$　$\cdots$①

第 2 式から　$a^2-3a+2>0$

$(a-1)(a-2)>0$

$a<1,\ 2<a$　$\cdots$②

第 3 式から　$5a-1\geqq 0$

$a\geqq\dfrac{1}{5}$　$\cdots$③

第 4 式から　$-a+2\geqq 0$

$a\leqq 2$　$\cdots$④

①，②，③，④ の共通する値の範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\leqq a<1}$　$\cdots$⑤

放物線と x 軸との共有点の x 座標を x_1，x_2 とすると $(x_1<x_2)$，これらは 2 次方程式

$$\{x-(a+1)\}^2-a^2+3a-2=0$$

の解であるから

$$\begin{aligned} \{x-(a+1)\}^2&=a^2-3a+2 \\ x-(a+1)&=\pm\sqrt{a^2-3a+2} \\ x&=a+1\pm\sqrt{a^2-3a+2} \end{aligned}$$

したがって，$x_1=a+1-\sqrt{a^2-3a+2}$，

$x_2=a+1+\sqrt{a^2-3a+2}$

このとき，$x_2-x_1=\sqrt{2}$ であるから

$2\sqrt{a^2-3a+2}=\sqrt{2}$

両辺を平方して　$4(a^2-3a+2)=2$

整理して　$2a^2-6a+3=0$

⑤ に注意して　$\boldsymbol{a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}}$

III (1) 「3 枚とも同じ数である」という事象は,「3 枚とも 3 である」という事象と「3 枚とも 4 である」という事象の和事象である.

3 枚とも 3 である確率は $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{120}$

3 枚とも 4 である確率は $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{4}{120}$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{120} + \frac{4}{120} = \frac{5}{120} = \boldsymbol{\frac{1}{24}}$$

(2) 「3 枚のカードがすべて異なる数である」という事象は，3 枚のカードが $\{1, 2, 3\}$，$\{1, 2, 4\}$，$\{1, 3, 4\}$，$\{2, 3, 4\}$ である事象の和事象である.

3 枚のカードが $\{1, 2, 3\}$ である確率は $\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{120} = \dfrac{6}{120}$

3 枚のカードが $\{1, 2, 4\}$ である確率は $\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 4}{120} = \dfrac{8}{120}$

3 枚のカードが $\{1, 3, 4\}$ である確率は $\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 4}{120} = \dfrac{12}{120}$

3 枚のカードが $\{2, 3, 4\}$ である確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4}{120} = \dfrac{24}{120}$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{120} + \frac{8}{120} + \frac{12}{120} + \frac{24}{120} = \frac{50}{120} = \boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

(3) 「3 枚のカードの数の積が奇数である」という事象は，3 枚のカードが $\{1, 3, 3\}$，$\{3, 3, 3\}$ である事象の和事象である.

3 枚のカードが $\{1, 3, 3\}$ である確率は $\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1 \cdot 3}{120} = \dfrac{3}{120}$

3 枚のカードが $\{3, 3, 3\}$ である確率は $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{120} = \dfrac{1}{120}$

これらの事象は互いに排反であるから，3 枚のカードの数の積が奇数である確率は

$$\frac{3}{120} + \frac{1}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

「3 枚のカードの数の積が偶数である」という事象は,「3 枚のカードの数の積が奇数である」という事象の余事象であるから，求める確率は

$$1 - \frac{1}{30} = \boldsymbol{\frac{29}{30}}$$

(4) 「3 枚のカードの数の和が 3 の倍数である」という事象は，3 枚のカードが $\{1,2,3\}$，$\{1,4,4\}$，$\{2,3,4\}$，$\{3,3,3\}$，$\{4,4,4\}$ である事象の和事象である．

3 枚のカードが $\{1,2,3\}$ である確率は　$\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1\cdot2\cdot3}{120}=\dfrac{6}{120}$

3 枚のカードが $\{1,4,4\}$ である確率は　$\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1\cdot6}{120}=\dfrac{6}{120}$

3 枚のカードが $\{2,3,4\}$ である確率は　$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{2\cdot3\cdot4}{120}=\dfrac{24}{120}$

3 枚のカードが $\{3,3,3\}$ である確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{120}$

3 枚のカードが $\{4,4,4\}$ である確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{4}{120}$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{120}+\frac{6}{120}+\frac{24}{120}+\frac{1}{120}+\frac{4}{120}=\mathbf{\frac{41}{120}}$$

	解	答	欄								
1	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
2	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
3	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
4	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
5	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
6	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
7	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
8	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
9	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
10	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
11	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
12	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
13	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
14	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
15	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
16	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
17	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
18	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
19	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
20	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0

	解	答	欄								
21	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
22	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
23	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
24	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
25	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
26	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
27	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
28	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
29	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
30	−	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	0
31	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
32	−	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
33	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
34	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
35	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
36	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
37	−	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**

解答例

数学II・数学B

I (1) 右の割り算から，このとき

$$a+2=0 \text{ かつ } b-8=0$$

よって　$\boldsymbol{a=-2,\ b=8}$

したがって

$$\begin{aligned}&x^3+3x^2-2x+8\\&=(x^2-x+2)(x+\mathbf{4})\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & x & +4 & \\ \hline x^2-x+2 & x^3+3x^2 & +ax & +b \\ & x^3-x^2 & +2x & \\ \hline & 4x^2 & +(a-2)x & +b \\ & 4x^2 & -4x & +8 \\ \hline & & (a+2)x & +b-8 \end{array}$$

(2) 真数は正であるから　$2x>0$　かつ　$4-x>0$

すなわち　$0<x<4$　$\cdots$①

$$\begin{aligned}y&=\log_2 2x(4-x)\\&=\log_2\{-2(x^2-4x)\}\\&=\log_2\{-2(x-2)^2+8\}\end{aligned}$$

① において，y は $\boldsymbol{x=2}$ のとき**最大値 3** をとる．

(3) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 120° であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$$

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$ のとき　　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

よって　　$|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$

$$2^2+(t-1)\cdot(-3)-t\cdot3^2=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{t=\dfrac{7}{12}}$

$$\begin{aligned}|\vec{a}+t\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\&=2^2+2t\cdot(-3)+t^2\cdot3^2\\&=9t^2-6t+4\\&=9\left(t^2-\tfrac{2}{3}t\right)+4\\&=9\left\{\left(t-\tfrac{1}{3}\right)^2-\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right\}+4\\&=9\left(t-\tfrac{1}{3}\right)^2+3\end{aligned}$$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となるから，

$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は，$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{3}}$ のとき**最小値 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$** をとる．

(4) $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$ の解が $-1,\ 3$ であるから，解と係数の関係により

$$(-1)+3=-\frac{2a}{3},\qquad (-1)\cdot 3=\frac{b}{3}$$

ゆえに　　$\boldsymbol{a=-3,\ b=-9}$

したがって　$f(x)=x^3-3x^2-9x+c$

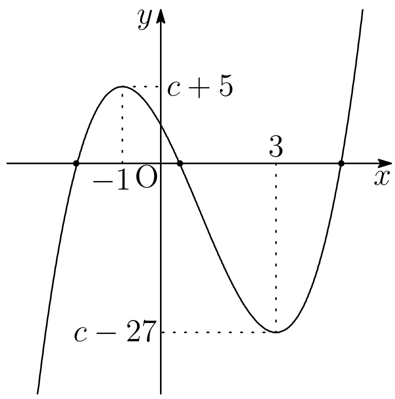
極大値は　　$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+c=c+5$

極小値は　　$f(3)=3^3-3\cdot 3^2-9\cdot 3+c=c-27$

$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるとき，

$$c+5>0\quad \text{かつ}\quad c-27<0$$

すなわち　$\boldsymbol{-5<c<27}$



II (1)
$$S_1=\frac{1}{4}\cdot 1(1+1)(1+2)(1+3)=6$$
$$S_2=\frac{1}{4}\cdot 2(2+1)(2+2)(2+3)=30$$

$a_1=S_1,\ a_1+a_2=S_2$ であるから　$\boldsymbol{a_1=6,\ a_2=24}$

(2) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\\&\qquad\qquad-\frac{1}{4}(n-1)\{(n-1)+1\}\{(n-1)+2\}\{(n-1)+3\}\\&=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)\\&=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)\{(n+3)-(n-1)\}\\&=\boldsymbol{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

$n=1$ のときも上式は成り立つから　$a_n=n(n+1)(n+2)$

(3) $\dfrac{a_k}{k+2}=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{k+2}=k(k+1)=k^2+k$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+2}&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{(n+2)+3\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+5)}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\frac{1}{a_k}&=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}\\&=\boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

III (1) 直線の方程式を m について整理すると

$$(x-6)m-y=0 \quad \cdots①$$

① が正の値 m にかかわらず成り立つための条件は

$$x-6=0,\ \ y=0$$

したがって，求める定点の座標は　**(6，0)**

(2) 円 C_1 の中心は原点であり，半径は 3

原点と直線 $\ell: mx - y - 6m = 0$ の距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|-6m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{6m}{\sqrt{m^2+1}}$$

円 C_1 と直線 ℓ が接するのは $d_1 = 3$ のときであるから

$$\frac{6m}{\sqrt{m^2+1}} = 3$$

$m > 0$ に注意して解いて　　$\boldsymbol{m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

(3) 円 C_2 の中心は $(a,\ 0)$，半径は r である．

直線 ℓ は $x - \sqrt{3}y - 6 = 0$ であるから，点 $(a,\ 0)$ と直線 ℓ の距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|a-6|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{|a-6|}{2}$$

円 C_2 と直線 ℓ が接するのは $d_2 = r$ のときであるから　$\dfrac{|a-6|}{2} = r$　$\cdots$①

C_1，C_2 の半径がそれぞれ 3，r，中心間の距離 a である 2 つの円が外接するから　$3 + r = a$　$\cdots$②

$r > 0$ に注意して，①，② を解くと　$\boldsymbol{a = 4,\ r = 1}$

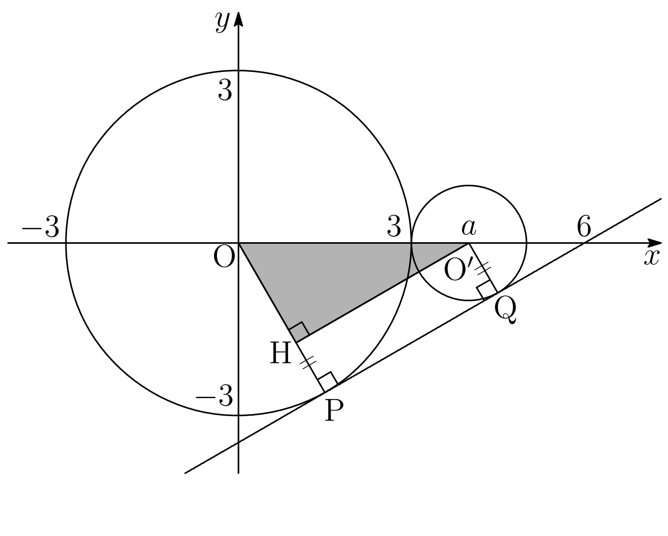
下図のように，C_2 の中心 $\mathrm{O'}$ から線分 OP に垂線 $\mathrm{O'H}$ を下ろすと

$$\mathrm{OH} = \mathrm{OP} - \mathrm{O'Q} = 3 - 1 = 2$$

$\triangle\mathrm{OO'H}$ は直角三角形であるから

$$\mathrm{O'H}^2 = \mathrm{OO'}^2 - \mathrm{OH}^2$$

よって　$\mathrm{PQ} = \mathrm{O'H} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$



	解　答　欄										
1	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
2	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
3	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
4	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
5	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
6	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
7	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
8	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
9	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
10	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
11	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
12	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
13	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
14	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
15	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
16	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
17	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
18	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
19	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
20	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
21	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
22	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
23	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
24	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
25	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
26	−	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
27	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
28	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
29	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
30	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
31	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
32	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0