平成 22 年度　九州中央リハビリテーション学院
一般入学試験前期 (数学 I・A) 平成 21 年 10 月 3 日

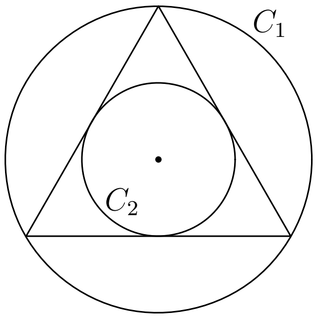
[1] 次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2 - kx + k - 1 = 0$ が重解をもつとき，定数 k の値は $k = \boxed{1}$ であり，重解は $x = \boxed{2}$ である．

(2) $x = 2 - \sqrt{3}$ のとき，$x^3 - 2x^2 + x - 8 = \boxed{3} - \boxed{4}\sqrt{\boxed{5}}$ である．

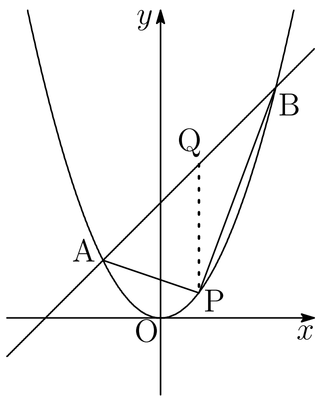
(3) $0° < \theta < 90°$ において，$\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2$ が成り立つとき，$\tan\theta = \boxed{6}$ である．

(4) 図のように，1 辺の長さが a の正三角形に外接する円を C_1，内接する円を C_2 とする．C_1，C_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とすると，$\dfrac{r_1}{r_2} = \boxed{7}$ である．



[2] 原点を O とするとき，図のように直線 $l : y = x + 2$ と放物線 $C : y = x^2$ の交点 A，B をとり，放物線 C 上の点 A と点 B の間に点 P をとる．また，点 P の x 座標を t とし，直線 $x = t$ と直線 l の交点を Q とする．このとき，$-\boxed{8} \leqq t \leqq \boxed{9}$ であり，△ABP の面積が △OAB の面積の半分となるとき

$$t = \frac{\boxed{10} \pm \sqrt{\boxed{11}}}{\boxed{12}}$$ である．



また，PQ の長さが $\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{14}}$ であるとき，△ABP の面積は最大値 $\dfrac{\boxed{15}\boxed{16}}{\boxed{17}}$ をとる．

[3] 実数 a，b について，次の問いに答えよ．

(1) $a^2 > b^2$ であることは，$a^4 > b^4$ であるための $\boxed{18}$ 条件である．

(2) $a = b$ であることは，$a^2 - 2b^2 + ab = 0$ であるための $\boxed{19}$ 条件である．

(3) $a < 1$ または $b < 1$ であることは，$a^2 + b^2 < 1$ であるための $\boxed{20}$ 条件である．

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

[4] 赤球 2 個，白球 3 個，青球 4 個が入った袋がある．この袋から続けて 3 個の球を取り出すとき，次の問いに答えよ．ただし，取り出した球は袋に戻さないものとする．

(1) 取り出された球の色がすべて同じ確率は $\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}\boxed{23}}$ である．

(2) 取り出された球の色がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}$ である．

(3) 1 回目に取り出された球の色と 3 回目に取り出された球の色が異なる確率は $\dfrac{\boxed{26}\boxed{27}}{\boxed{28}\boxed{29}}$ である．

解答例

[1] (1) 2 次方程式の係数について

$$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(k-1)=k^2-4k+4=(k-2)^2$$

2 次方程式が重解をもつとき，$D=0$ であるから

$$(k-2)^2=0 \quad よって \quad \boldsymbol{k=2}$$

2 次方程式の重解は　$x=-\dfrac{-k}{2\cdot1}=\dfrac{k}{2}$

このとき重解は，これに $k=2$ を代入して　$\boldsymbol{x=1}$

(2) $x=2-\sqrt{3}\cdots$ ① より　$x-2=-\sqrt{3}$

等式の両辺を平方して，整理すると

$$\begin{aligned}(x-2)^2&=(-\sqrt{3})^2\\ x^2-4x+4&=3\\ x^2&=4x-1 \quad \cdots ②\end{aligned}$$

② より

$$\begin{aligned}x^3-2x^2+x-8&=x\cdot x^2-2x^2+x-8\\&=x(4x-1)-2(4x-1)+x-8\\&=4x^2-8x-6\\&=4(4x-1)-8x-6\\&=8x-10\end{aligned}$$

上式に ① を代入すると

$$x^3-2x^2+x-8=8(2-\sqrt{3})-10=\boldsymbol{6-8\sqrt{3}}$$

(3) 与式の左辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}&=\frac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)+\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\&=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=2\tan\theta\end{aligned}$$

したがって，与式から　$2\tan\theta=2$　よって　$\boldsymbol{\tan\theta=1}$

(4) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin 60^\circ} = 2r_1$

よって　$r_1 = \dfrac{a}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

正三角形の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}a\cdot a\sin 60^\circ = \frac{1}{2}a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$2s = a + a + a$ とすると　$s = \dfrac{3}{2}a$

これらを $S = r_2 s$ に代入すると

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = r_2 \times \frac{3}{2}a \quad \text{ゆえに} \quad r_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

よって　$\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a \div \dfrac{\sqrt{3}}{6}a = \mathbf{2}$

問	1	2	3	4	5	6	7
答	2	1	6	8	3	1	2

[2] 連立方程式 $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ を解いて　$(x,\ y) = (-1,\ 1),\ (2,\ 4)$

したがって，図から，点 A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ 4)$

よって　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 2}$　$\cdots$①

l と y 軸との交点を C とすると

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\mathrm{OC} \times 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3 \quad \cdots ②$$

また　$\triangle\mathrm{ABP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{PQ} \times 3 = \dfrac{3}{2}\mathrm{PQ}$　$\cdots$③

このとき　$\mathrm{PQ} = (t+2) - t^2 = -t^2 + t + 2$　$\cdots$④

$\triangle$ABP の面積が $\triangle$OAB の半分となるとき，②，③ より

$$\frac{3}{2}\mathrm{PQ} = 3 \times \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{PQ} = 1$$

④ をこれに代入して　$-t^2 + t + 2 = 1$

整理すると　$t^2 - t - 1 = 0$

① に注意して　$\boldsymbol{t = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

③，④ より，PQ が最大のとき，△ABP の面積は最大となるので

$$\mathrm{PQ} = -t^2 + t + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \quad (-1 \leqq t \leqq 2)$$

上式および ③ より

PQ の長さが $\boldsymbol{\frac{5}{4}}$ であるとき，△ABP の面積は最大値 $\boldsymbol{\frac{15}{8}}$ をとる

問	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
答	1	2	1	5	2	5	4	1	5	8

[3] (1) $a^2 > b^2$ のとき $a \neq b$ であるから　$a^2 + b^2 > 0$

等式

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \quad \cdots ①$$

により，$a^4 - b^4$ は $a^2 - b^2$ と同符号であるから

$$a^2 > b^2 \quad \Longrightarrow \quad a^4 > b^4$$

同様に，$a^4 - b^4 > 0$ のとき $a \neq b$ であるから　$a^2 + b^2 > 0$

① により，$a^2 - b^2$ は $a^4 - b^4$ と同符号であるから

$$a^2 > b^2 \quad \Longleftarrow \quad a^4 > b^4$$

よって，$a^2 > b^2$ であることは，$a^4 > b^4$ であるための**必要十分**条件である．

(2) $a - b = 0 \Longrightarrow (a - b)(a + 2b) = 0$ であるから

$a = b$ であることは，$a^2 - 2b^2 + ab = 0$ であるための**十分**条件である．

(3) $a < 1$ または $b < 1 \quad \not\Rightarrow \quad a^2 + b^2 < 1$　(反例：$a = -2$，$b = 0$)

$a \geqq 1$ かつ $b \geqq 1 \quad \Longrightarrow \quad a^2 + b^2 \geqq 1$

したがって　$a < 1$ または $b < 1 \quad \Longleftarrow a^2 + b^2 < 1$

よって，$a < 1$ または $b < 1$ であることは，$a^2 + b^2 < 1$ であるための**必要**条件である．

問	1	2	3
答	⓪	②	①

[4] (1) 取り出された球の色がすべて同じであるのは，3 個とも白球である場合と 3 個とも青球である場合である．したがって，求める確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{P}_3 + {}_4\mathrm{P}_3}{{}_9\mathrm{P}_3} = \frac{3\cdot2\cdot1 + 4\cdot3\cdot2}{9\cdot8\cdot7} = \mathbf{\frac{5}{84}}$$

(2) 球の色がすべて異なるのは，赤球，白球，青球が 1 個ずつ取り出される場合である．したがって，求める確率は

$$\frac{2\times3\times4\times3!}{{}_9\mathrm{P}_3} = \frac{2\times3\times4\times3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

(3) ［1］1 回目と 3 回目に赤球が出る確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{P}_2 \times {}_7\mathrm{P}_1}{{}_9\mathrm{P}_3} = \frac{1}{36}$$

［2］1 回目と 3 回目に白球が出る確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{P}_2 \times {}_7\mathrm{P}_1}{{}_9\mathrm{P}_3} = \frac{1}{12}$$

［3］1 回目と 3 回目に青球が出る確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{P}_2 \times {}_7\mathrm{P}_1}{{}_9\mathrm{P}_3} = \frac{1}{6}$$

求める確率は, ［1］～［3］の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{13}{18}}$$

問	21	22	23	24	25	26	27	28	29
答	5	8	4	2	7	1	3	1	8