平成 22 年度　九州中央リハビリテーション学院
一般入学試験後期 (数学 I・A) 平成 21 年 12 月 12 日

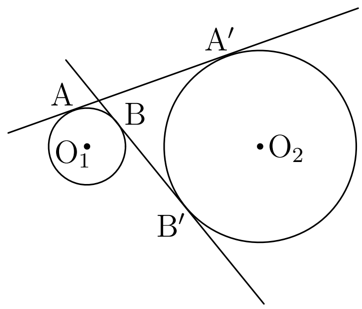
[1] 次の問いに答えよ.

(1) $-1 < a < \dfrac{1}{2}$ のとき, $\sqrt{4a^2-4a+1}+\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2+6a+9}=\boxed{\ 1\ }$ である.

(2) $\dfrac{4x-z}{2}=\dfrac{x+3y+z}{4}=\dfrac{3x+2y-2z}{3}\neq 0$ のとき,
$x:y:z=\boxed{\ 2\ }:\boxed{\ 3\ }:\boxed{\ 4\ }$ である.

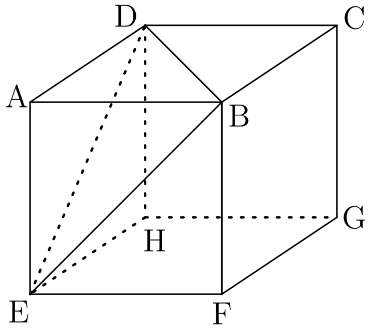
(3) a, b を整数とするとき, $a^2-ab+6=0$ を満たす整数 a, b の組は全部で $\boxed{\ 5\ }$ 組ある.

(4) 図のように, 2 円 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ があり, 2 円の半径はそれぞれ 2 と 5 であり, 中心間の距離は 9 である. この 2 円と共通接線の接点を A, A′, B, B′ とするとき, $\dfrac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}}=\dfrac{\boxed{\ 6\ }}{\boxed{\ 7\ }}$ である.



[2] 放物線 $C: y=x^2+2ax+b$ は点 $(1,\ 2)$ を通る. このとき, $b=\boxed{\ 8\ }-2a$ であり, C の最小値を $g(a)$ とすると, $g(a)$ の最大値は $\boxed{\ 9\ }$ となる. また, $a>\dfrac{\boxed{10}}{\boxed{11}}$ のとき, C は x 軸の正の部分, 負の部分で x 軸とそれぞれ交点を持つ.

[3] 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある. このとき, 三角形 BDE の面積は $\boxed{12}\sqrt{\boxed{13}}$ であり, 頂点 A より三角形 BDE に垂線 AP を下ろすと, $\mathrm{AP}=\dfrac{\boxed{14}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{16}}$ である. また, 三角形 BDE に内接する円の半径を r とすると, $r=\dfrac{\sqrt{\boxed{17}}}{\boxed{18}}$ である.



[4] 箱の中に1から6までの数字の書かれたカードがそれぞれ1枚ずつ入っている．この箱の中から同時に3枚のカードを引き，カードに書かれている最大の数字を X とする．このとき，次の確率を求めよ．

(1) X が5以下である確率は $\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20}}$ である．

(2) $X=5$ である確率は $\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}\boxed{23}}$ である．

(3) X の期待値は $\dfrac{\boxed{24}\boxed{25}}{\boxed{26}}$ である．

解答例

[1] (1)

$$\begin{aligned} &\sqrt{4a^2-4a+1}+\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2+6a+9} \\ &=\sqrt{(2a-1)^2}+\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a+3)^2} \\ &=|2a-1|+|a+1|+|a+3| \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$-1<a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$2a-1<0$，$a+1>0$，$a+3>0$

このとき　$|2a-1|+|a+1|+|a+3|$

$$=-(2a-1)+(a+1)+(a+3)=5 \quad \cdots ②$$

①，② より，$-1<a<\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\sqrt{4a^2-4a+1}+\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2+6a+9}=\mathbf{5}$$

(2) $\dfrac{4x-z}{2}=\dfrac{x+3y+z}{4}=\dfrac{3x+2y-2z}{3}=k\neq 0$ とおくと

$$\begin{aligned} 4x-z&=2k \quad \cdots ① \\ x+3y+z&=4k \quad \cdots ② \\ 3x+2y-2z&=3k \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

① + ② より　$5x+3y=6k \quad \cdots ④$

② × 2 + ③ より　$5x+8y=11k \quad \cdots ⑤$

④，⑤ より　$x=\dfrac{3}{5}k$，$y=k$

$x=\dfrac{3}{5}k$ を ① に代入すると　$z=\dfrac{2}{5}k$

よって　$x:y:z=\dfrac{3}{5}k:k:\dfrac{2}{5}k=\mathbf{3:5:2}$

(3) $a=0$ は $a^2-ab+6=0$ を満たす整数解ではないので　$a \neq 0$

ゆえに　　$b=a+\dfrac{6}{a}$　$\cdots$①

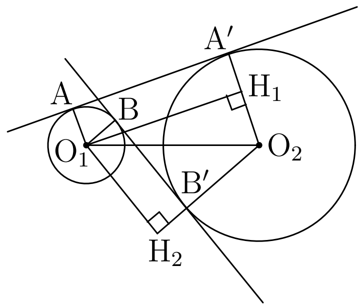
① において $\dfrac{6}{a}$ は整数であるから　$a=-6, -3, -2, -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6$

よって，① を満たす整数解は，次の **8 組**である．

$$(a,\ b)=(-6, -7),\ (-3, -5),\ (-2, -5),\ (-1, -7),$$
$$(1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (3,\ 5),\ (6,\ 7)$$

(4) 図のように，線分 $\mathrm{O_2A'}$ に垂線 $\mathrm{O_1H_1}$，$\mathrm{O_2B'}$ の延長に垂線 $\mathrm{O_1H_2}$ を下ろすと

$$\mathrm{O_2H_1}=5-2=3$$
$$\mathrm{O_2H_2}=5+2=7$$



$$\begin{aligned}\mathrm{AA'}&=\mathrm{O_1H_1}\\&=\sqrt{\mathrm{O_1O_2}^2-\mathrm{O_2H_1}^2}\\&=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BB'}&=\mathrm{O_1H_2}\\&=\sqrt{\mathrm{O_1O_2}^2-\mathrm{O_2H_2}^2}\\&=\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

問	1	2	3	4	5	6	7
答	5	3	5	2	8	3	2

[2] 放物線 $C: y=x^2+2ax+b$ は点 $(1,\ 2)$ を通るので

$$2=1^2+2a\cdot 1+b \quad よって \quad \boldsymbol{b=1-2a}$$

したがって　$y=x^2+2ax+1-2a=(x+a)^2-a^2-2a+1$

C の最小値 $g(a)$ は　$g(a)=-a^2-2a+1=-(a+1)^2+2$

よって，$g(a)$ の最大値は　**2**

また，$y=x^2+2ax+1-2a$ が x 軸の正の部分，負の部分で交点をもつための条件は $x=0$ で $y<0$ であるから

$$1-2a<0 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{a>\frac{1}{2}}$$

問	8	9	10	11
答	1	2	1	2

[3] $\triangle$BDE は一辺が $2\sqrt{2}$ の正三角形であるから

$$\triangle\mathrm{BDE} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

三角錐 ABDE の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 \times 2 = \frac{4}{3}$$

$\dfrac{1}{3} \times \triangle\mathrm{BDE} \times \mathrm{AP} = V$ により

$$\frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \mathrm{AP} = \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{AP} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$2s = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ とすると　$s = 3\sqrt{2}$

$rs = \triangle\mathrm{BDE}$ により

$$r \times 3\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{r = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

問	12	13	14	15	16	17	18
答	2	3	2	3	3	6	3

[4] (1) X が 5 以下である確率 $P(X \leqq 5)$ は，1 から 5 のカードから 3 枚引く確率であるから

$$P(X \leqq 5) = \frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{10}{20} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) $X = 5$ である確率 $P(X = 5)$ は

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= P(X \leqq 5) - P(X \leqq 4) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{1}{2} - \frac{4}{20} = \boldsymbol{\frac{3}{10}} \end{aligned}$$

(3) $3 \leqq X \leqq 6$ であるから

$$P(X = 3) = \frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{1}{20}$$

$$P(X = 4) = P(X \leqq 4) - P(X = 3) = \frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 6) = P(X \leqq 6) - P(X \leqq 5) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

したがって，次のような表ができる．

X	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$	1

よって，求める期待値は

$$3 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{3}{20} + 5 \times \frac{6}{20} + 6 \times \frac{10}{20} = \frac{105}{20} = \boldsymbol{\frac{21}{4}}$$

問	19	20	21	22	23	24	25	26
答	1	2	3	1	0	2	1	4