平成21年度　九州中央リハビリテーション学院
一般入学試験 (数学I・A) 平成20年11月1日

[1] 次の問いに答えよ.

(1) $a = 2+\sqrt{3}$, $b = 2-\sqrt{3}$ のとき, $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b} = \boxed{1}\boxed{2}$ である.

(2) $1 < x < \dfrac{3}{2}$ のとき, $|x-1|-|2x-3| = \boxed{3}\,x - \boxed{4}$ である.

(3) 40人の生徒のうちで, 通学の際, 自転車を利用する生徒は26人, バスを利用する生徒は16人, どちらも利用しない生徒は5人である. このとき, バスのみを利用する生徒は $\boxed{5}$ 人である.

(4) $\mathrm{AB}=6$, $\mathrm{BC}=5$, $\angle\mathrm{B}=90^\circ$ の三角形ABCがある. 点Pは点Aを出発した後, 毎秒1の一定の速さで点Bまで進み, 点Qは点Bを出発した後, 毎秒2の一定の速さで点Cまで進む. 点B, Cのいずれかが先に終点に到達すれば終了とする. 2点P, Qが同時に出発し, t 秒後に線分PQが三角形ABCの面積を二等分するとき,

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$ であることより $t = \dfrac{\boxed{8}-\sqrt{\boxed{9}}}{\boxed{10}}$ である.

[2] 次の $\boxed{11}$ ～ $\boxed{14}$ に当てはまるものを, 下の ⓪～③ のうちから一つずつ選べ.

(1) $|\,x\,| = 3$ であることは, $x^2-6x+9=0$ であるための $\boxed{11}$.

(2) 自然数 n について, n^2 が偶数であることは, n が偶数であるための $\boxed{12}$.

(3) $a+b \geqq 0$ であることは, $a^2+b^2>0$ であるための $\boxed{13}$.

(4) x が24の倍数であることは, x が4および6の倍数であるための $\boxed{14}$.

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが, 十分条件ではない
② 十分条件であるが, 必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

[3] 2次関数 $y = ax^2+bx+c$ のグラフの頂点が $(2,-1)$ であるとき,

$b = -\boxed{15}\,a$, $c = \boxed{16}\,a - \boxed{17}$ である.

さらに, $k < x < k+2$ において $y<0$ となるとき, $k = \boxed{18}$, $a = \boxed{19}$ である.

[4] $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=3$，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$ の三角形ABCがある．辺AC上に$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}$となる点Dをとると，$\mathrm{BC}=\sqrt{\boxed{20}}$ であることより，$\sin\angle\mathrm{CBD}=\dfrac{\sqrt{\boxed{21}\boxed{22}}}{\boxed{23}\boxed{24}}$ となる．また，三角形ABDの外接円と辺BCとの点B以外の交点を点Eとするとき，$\mathrm{DE}=\dfrac{\boxed{25}\sqrt{\boxed{26}}}{\boxed{27}}$ であり，四角形ABEDの面積は $\dfrac{\boxed{28}\sqrt{\boxed{29}}}{\boxed{30}}$ となる．

[5] 男子4人と女子3人の計7人が一列に並ぶとき，次の問いに答えよ．

(1) 並び方は全部で$\boxed{31}\boxed{32}\boxed{33}\boxed{34}$通りある．

(2) どの女子も隣り合わない並び方は全部で$\boxed{35}\boxed{36}\boxed{37}\boxed{38}$通りある．

(3) 男子が3人以上隣り合う並び方は全部で$\boxed{39}\boxed{40}\boxed{41}\boxed{42}$通りある．

解答例

[1] (1)
$$a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$$
$$ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$$

よって
$$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}=\frac{b^3+a^3}{ab}=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$$
$$=\frac{4^3-3\cdot 1\cdot 4}{1}=\mathbf{52}$$

(2) $1<x<\dfrac{3}{2}$ のとき　$x-1>0$, $2x-3<0$

このとき　$|\,x-1\,|=x-1$, $|\,2x-3\,|=-(2x-3)=-2x+3$

よって
$$|\,x-1\,|-|\,2x-3\,|=(x-1)-(-2x+3)$$
$$=\boldsymbol{3x-4}$$

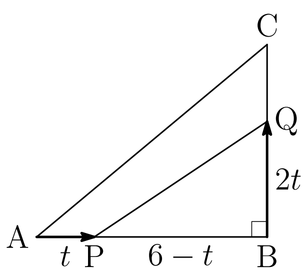
(3) 生徒全体の集合を U, 自転車を利用する生徒の集合を A, バスを利用する生徒の集合を B とすると
$$n(U)=40,\ n(A)=26,\ n(B)=16$$
$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=5$ であるから
$$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})=40-5=35$$
これらを
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
に代入すると　$35=26+16-n(A\cap B)$

これを解いて　$n(A\cap B)=7$

よって，バスのみを利用する生徒の人数は
$$n(B)-n(A\cap B)=16-7=\mathbf{9}$$

(4) Q が先に C に到着するので　$\boldsymbol{0\leqq t\leqq \dfrac{5}{2}}$　$\cdots$①

条件より，$\triangle\mathrm{PBQ}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$ であるから
$$\frac{1}{2}(6-t)\cdot 2t=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5$$
整理して
$$t^2-6t+\frac{15}{2}=0$$
① に注意して
$$\boldsymbol{t=\frac{6-\sqrt{6}}{2}}$$



(答) $\boxed{1}$ 5　$\boxed{2}$ 2　$\boxed{3}$ 3　$\boxed{4}$ 4　$\boxed{5}$ 9　$\boxed{6}$ 5　$\boxed{7}$ 2　$\boxed{8}$ 6　$\boxed{9}$ 6　$\boxed{10}$ 2

[2] (1) $|\,x\,| = 3$ を解いて　$x = \pm 3$

$x^2 - 6x + 9 = 0$ を解いて　$x = 3$

ゆえに，$|\,x\,| = 3 \;\Longleftarrow\; x^2 - 6x + 9 = 0$

したがって，**必要条件ではあるが，十分条件ではない**.

(2) 証明 ($\Leftarrow$)

n が偶数のとき，整数 m を用いて $n = 2m$ とおけるので

$$n^2 = (2m)^2 = 2{\cdot}2m^2$$

となる．$2m^2$ は整数であるから，n^2 は偶数である．

よって，n が偶数ならば，n^2 は偶数である．

証明 ($\Rightarrow$)

命題「n^2 が偶数ならば，n は偶数である.」の対偶は

「n が奇数ならば，n^2 は奇数である」　$\cdots$(A)

奇数 n は，ある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ と表され，

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

となる．$2k^2 + 2k$ は整数であるから，n^2 は奇数である．

ゆえに，命題 (A) は真であり，もとの命題も真である．

したがって，**必要十分条件である**

(3) $a = 0$，$b = 0$ のとき，　$a + b \geqq 0 \not\Rightarrow a^2 + b^2 > 0$

$a = 1$，$b = -2$ のとき，$a + b \geqq 0 \not\Leftarrow a^2 + b^2 > 0$

したがって，**必要条件でも十分条件でもない**.

(4) 24 の倍数であれば，4 の倍数および 6 の倍数である．

$x = 12$ のとき，x は 4 の倍数および 6 の倍数であるが，24 の倍数ではない．

したがって，**十分条件ではあるが必要条件ではない**.

(答) $\boxed{11}$ 1　$\boxed{12}$ 0　$\boxed{13}$ 3　$\boxed{14}$ 2

[3] 頂点の座標が $(2,-1)$ であるから，$y=a(x-2)^2-1\cdots$ ① とおける．

これを展開して　　$y=ax^2-4ax+4a-1$

係数を比較して　　$\boldsymbol{b=-4a,\ c=4a-1}$

区間 $k<x<k+2$ で $y<0$ であるから，この区間の中央 $k+1$ が頂点の x 座標である．したがって

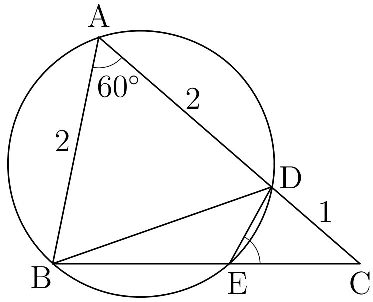
$k+1=2$　これを解いて　$\boldsymbol{k=1}$

ゆえに，$1<x<3$ で $y<0$ であるから，$x=1,3$ で $y=0$

これを ① に代入して　$0=a-1$　よって　$\boldsymbol{a=1}$

(答) $\boxed{15}$ 4 $\boxed{16}$ 4 $\boxed{17}$ 1 $\boxed{18}$ 1 $\boxed{19}$ 1

[4] △ABC に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=3^2+2^2-2{\cdot}3{\cdot}2\cos 60^\circ\\&=9+4-2{\cdot}3{\cdot}2\times\frac{1}{2}\\&=7\end{aligned}$$

$a>0$ であるから　$\boldsymbol{a=\mathrm{BC}=\sqrt{7}}$

$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{EDC}$ であるから $\mathrm{AB}:\mathrm{DE}=\mathrm{BC}:\mathrm{CD}=\sqrt{7}:1$ より

$$2:\mathrm{DE}=\sqrt{7}:1\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{\mathrm{DE}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}}$$

△ABD は正三角形であり，その外接円の半径 R は，正弦定理により

$$2R=\frac{2}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$\angle\mathrm{CBD}=\theta$ とおき，△BDE に正弦定理 を適用して　$\dfrac{\mathrm{DE}}{\sin\theta}=2R$

ゆえに　$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{DE}}{2R}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\div\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$　よって　$\boldsymbol{\sin\angle\mathrm{CBD}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}}$

$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{EDC}=(\sqrt{7})^2:1=7:1$ であるから，四角形 ABED の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{EDC}&=\triangle\mathrm{ABC}-\frac{1}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{6}{7}\triangle\mathrm{ABC}\\&=\frac{6}{7}\times\frac{1}{2}{\cdot}2{\cdot}3\sin 60^\circ=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{7}}\end{aligned}$$

(答) $\boxed{20}$ 7 $\boxed{21}$ 2 $\boxed{22}$ 1 $\boxed{23}$ 1 $\boxed{24}$ 4 $\boxed{25}$ 2 $\boxed{26}$ 7 $\boxed{27}$ 7 $\boxed{28}$ 9 $\boxed{29}$ 3 $\boxed{30}$ 7

[5] (1) 7人全員の並べ方であるから

$$7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = \mathbf{5040} \text{ (通り)}$$

(2) 男子4人の並び方は

$$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$$

女子3人の並び方は，右の図のように　｜男｜男｜男｜男｜

5ヶ所の｜から3ヶ所を選んで並ぶ方法であるので

$${}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot4\cdot3 = 60$$

求める並び方の総数は，積の法則により　$24 \times 60 = \mathbf{1440}$　(通り)

(3) ［1］男子3人が隣り合う場合，男子3人をひとまとめにする．

女子3人の並び方は　3!

ひとまとめにした男子3人と残りの1人の男子の並び方は，

右の図のように　｜女｜女｜女｜

4ヶ所の｜から2ヶ所を選んで並ぶ方法であるので　${}_4\mathrm{P}_2$

また，ひとまとめにした男子3人と残りの1人の男子の並び方は，

${}_4\mathrm{P}_3$ 通りある．

求める並び方の総数は，積の法則により

$$3! \times {}_4\mathrm{P}_2 \times {}_4\mathrm{P}_3 = 3\cdot2\cdot1 \times 4\cdot3 \times 4\cdot3\cdot2 = 1728 \quad \text{(通り)}$$

［2］男子4人が隣り合う場合，男子4人をひとまとめにする．

女子3人と男子ひとまとめの並び方は，4! 通りある．

また，ひとまとめにした男子4人の並び方は，4! 通りある．

よって，並び方の総数は，積の法則により

$$4! \times 4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 \times 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 576 \quad \text{(通り)}$$

よって，求める並び方は全部で　$1728 + 576 = \mathbf{2304}$　(通り)

(答) $\boxed{31}$ 5 $\boxed{32}$ 0 $\boxed{33}$ 4 $\boxed{34}$ 0 $\boxed{35}$ 1 $\boxed{36}$ 4 $\boxed{37}$ 4 $\boxed{38}$ 0 $\boxed{39}$ 2 $\boxed{40}$ 3 $\boxed{41}$ 0 $\boxed{42}$ 4