平成20年度　九州中央リハビリテーション学院
一般入学試験 (数学 I・A) 平成19年11月3日

[1] $a = \dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$ の小数部分を b とするとき，

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{\boxed{1}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{3}}$，$a^3 + b^3 = \boxed{4}\,\boxed{5}\sqrt{\boxed{6}}$ となる．

[2] 関数 $y = -(x^2+4x+6)^2 + 2(x^2+4x+6) + 3 \cdots ①$ について，
$x^2+4x+6 = t$ とおく．このとき t の最小値が $\boxed{7}$ であることより，① の最大値は $\boxed{8}$ となる．

[3] 次の $\boxed{9}$ 〜 $\boxed{12}$ にあてはまるものを，下の ⓪〜③ のうちから一つずつ選べ．

(1) $x = 1$ であることは，$x^2 = 1$ であるための $\boxed{9}$.

(2) $ab + 3 = 2a + 2b$ であることは，$a = 1$ かつ $b = 1$ であるための $\boxed{10}$.

(3) $a + b$，ab が有理数であることは，a，b が有理数であるための $\boxed{11}$.

(4) 2次不等式 $x^2 + 2ax + 2a + 3 > 0$ がすべての x について成り立つことは，$|a-1| < 2$ であるための $\boxed{12}$.

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件ではない
② 十分条件であるが，必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

[4] 2次不等式 $x^2 - 3x - 4 < 0 \cdots ①$，$x^2 - (a+5)x + 5a < 0 \cdots ②$ において，① を満たす x の範囲は $-\boxed{13} < x < \boxed{14}$ となる．このとき，①，② を同時に満たす整数 x が2つ存在するときの a の値の範囲は $\boxed{15} \leqq a < \boxed{16}$ となる．また，② を満たす実数 x が存在しないとき，$a = \boxed{17}$ である．

[5] 三角形 ABC において，AB $= 5$，AC $= 3$，$\angle$BAC $= 120^\circ$ とする．このとき，
BC $= \boxed{18}$，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{19}\,\boxed{20}\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{22}}$ であり，三角形 ABC に内接する円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{23}}}{\boxed{24}}$ となる．

また，三角形 ABC に外接する円において，弦 BC に対して点 A と反対側に点 P をとるとき，四角形 ABPC の面積の最大値は $\boxed{25}\,\boxed{26}\sqrt{\boxed{27}}$ となる．

[6] $medical$ の 7 文字を 1 列に並べるとき

(1) 並べ方は全部で $\boxed{28}\boxed{29}\boxed{30}\boxed{31}$ 通りある．

(2) m，d，l がとなり合わない並び方は $\boxed{32}\boxed{33}\boxed{34}\boxed{35}$ 通りある．

(3) m，d，l がこの順に並ぶ並び方は $\boxed{36}\boxed{37}\boxed{38}$ 通りある．

解答例

[1] $a=\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}=\dfrac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\sqrt{7}+2$

$2<\sqrt{7}<3$ であるから $4<\sqrt{7}+2<5$ となり，a の整数部分は 4,

小数部分 b は $b=a-4=(\sqrt{7}+2)-4=\sqrt{7}-2$ であるから

$$a+b=(\sqrt{7}+2)+(\sqrt{7}-2)=2\sqrt{7}$$
$$ab=(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=7-4=3$$

したがって $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\mathbf{\dfrac{2\sqrt{7}}{3}}$

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\&=(2\sqrt{7})^3-3\cdot3\cdot2\sqrt{7}\\&=56\sqrt{7}-18\sqrt{7}=\mathbf{38\sqrt{7}}\end{aligned}$$

(答) $\boxed{1}$ 2　$\boxed{2}$ 7　$\boxed{3}$ 3　$\boxed{4}$ 3　$\boxed{5}$ 8　$\boxed{6}$ 7

[2] $t=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$

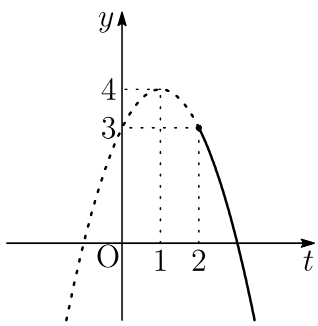
ゆえに，t の最小値は　**2**

y を t を用いて表すと

$$y=-t^2+2t+3 \quad (t \geqq 2)$$

よって　　$=-(t-1)^2+4$

したがって，y の最大値は　**3**



(答) $\boxed{7}$ 2　$\boxed{8}$ 3

[3] (1) $x=1 \implies x^2=1$ したがって **十分条件**
(必要条件ではない $[x=-1]$)

(2) $ab+3=2a+2b \impliedby a=1$ かつ $b=1$ したがって **必要条件**
(十分条件ではない $[a=3,\ b=3]$)

(3) $a+b,\ ab$ が有理数 $\impliedby$ $a,\ b$ が有理数 したがって **必要条件**
(十分条件ではない $[a=\sqrt{2},\ b=-\sqrt{2}]$)

(4) 2 次不等式 $x^2+2ax+2a+3>0$ がすべての x について成り立つとき，x^2 の係数が正であるから，$D<0$ を満たせばよい.

$D/4<0$ より $\quad a^2-1\cdot(2a+3)<0$

整理して $\quad a^2-2a-3<0$

ゆえに $\quad (a+1)(a-3)<0$

よって $\quad -1<a<3 \quad \cdots$①

$|a-1|<2$ を解くと

$$-2<a-1<2 \quad \text{すなわち} \quad -1<a<3 \quad \cdots ②$$

①，② から **必要十分条件**

(答) $\boxed{9}$ 2 $\boxed{10}$ 1 $\boxed{11}$ 1 $\boxed{12}$ 0

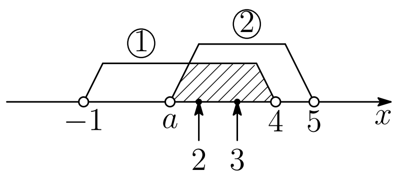
[4] $x^2-3x-4<0\cdots$①，$x^2-(a+5)x+5a<0\cdots$②

① から $\quad (x+1)(x-4)<0$

よって $\quad \boldsymbol{-1<x<4}$

② から $\quad (x-a)(x-5)<0\cdots$③

① と ② を同時に満たす整数 x が 2 つ存在するとき，その整数は 2，3 である．このとき，a の値の範囲は $\boldsymbol{1 \leqq a<2}$



② を満たす実数 x が存在しないとき，③ より $\boldsymbol{a=5}$

(答) $\boxed{13}$ 1 $\boxed{14}$ 4 $\boxed{15}$ 1 $\boxed{16}$ 2 $\boxed{17}$ 5

[5] △ABC に余弦定理を適用して

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 3^2 + 5^2 - 2{\cdot}3{\cdot}5\cos 120^\circ$$
$$= 9 + 25 - 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}\left(-\frac{1}{2}\right) = 49$$

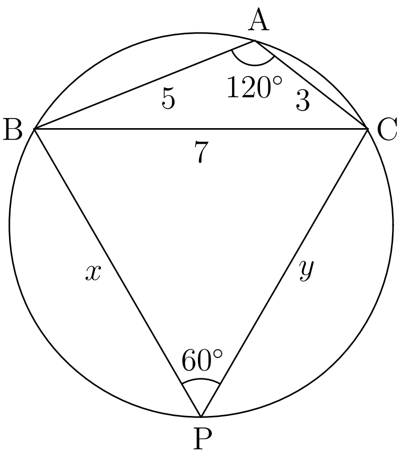
BC > 0 より　$\mathbf{BC = 7}$

△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}{\cdot}3{\cdot}5\sin 120^\circ = \frac{1}{2}{\cdot}3{\cdot}5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{4}}$$

$2s = a + b + c = 7 + 3 + 5$ とすると

$$s = \frac{15}{2}$$



△ABC の内接円の半径を r とすると，
$S = rs$ により

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = r{\cdot}\frac{15}{2}$$

よって　　$r = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

四角形 ABPC は円に内接するので，

$$\angle\mathrm{BPC} = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$$

$\mathrm{BP} = x$，$\mathrm{PC} = y$ とおいて，△BPC に余弦定理を適用すると

$$7^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ$$

整理して　　$49 = x^2 - xy + y^2$

ゆえに　　$xy = 49 - (x-y)^2 \quad \cdots ①$

△BPC の面積は

$$\triangle\mathrm{BPC} = \frac{1}{2}xy\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}xy \quad \cdots ②$$

四角形 ABPC の面積が最大となるのは，△BPC の面積が最大となるときであるから

①，② より，$x = y$ のとき最大となる．このとき，$\triangle\mathrm{BPC} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

したがって，四角形 ABPC の面積の最大値は　$\frac{15\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} = \mathbf{16\sqrt{3}}$

(答) $\boxed{18}$ 7　$\boxed{19}$ 1　$\boxed{20}$ 5　$\boxed{21}$ 3　$\boxed{22}$ 4　$\boxed{23}$ 3　$\boxed{24}$ 2　$\boxed{25}$ 1　$\boxed{26}$ 6　$\boxed{27}$ 3

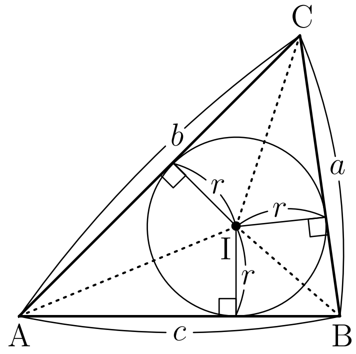
内接円の半径

三角形 ABC の内接円の中心を I，内接円の半径を r，$2s = a + b + c$ とする．このとき，△IBC，△ICA，△IAB の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}ar,\quad \frac{1}{2}br,\quad \frac{1}{2}cr$$

であり，三角形 ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) = rs \end{aligned}$$



[6] (1) 異なる 7 文字の並べ方であるから

$$7! = 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = \mathbf{5040}\ (\text{通り})$$

(2) m，d，l 以外の 4 文字を一列に並べる並べ方は　　○○○○

$$4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24$$

m，d，l の並べ方は，右の図のように　　｜○｜○｜○｜○｜

5ヶ所の｜に 3ヶ所を選んで並べる方法であるから

$${}_5\mathrm{P}_3 = 5{\cdot}4{\cdot}3 = 60$$

求める並べ方の総数は，積の法則により　$24 \times 60 = \mathbf{1440}$　(通り)

(3) e，i，c，a，○，○，○を並べるときに，○には順に，m，d，l を並べればよいので，求める並べ方の総数は

$$\frac{7!}{3!} = \mathbf{840}\quad (\text{通り})$$

(答) $\boxed{28}$ 5　$\boxed{29}$ 0　$\boxed{30}$ 4　$\boxed{31}$ 0　$\boxed{32}$ 1　$\boxed{33}$ 4　$\boxed{34}$ 4　$\boxed{35}$ 0
$\boxed{36}$ 8　$\boxed{37}$ 4　$\boxed{38}$ 0