平成19年度　九州中央リハビリテーション学院
一般入学試験前期 (数学 I) 平成18年11月4日

[1] 2次関数 $y = 2x^2 - 4x + 1 \cdots$ ① について，① のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に2だけ平行移動したグラフを表す2次関数は $y = \boxed{1}\,x^2 + \boxed{2}$ であり，① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると $y = 2x^2 + 3x + 1$ のグラフと一致する場合，$p = -\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$，$q = \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{6}}$ である．

[2] a を定数とする．放物線 $y = x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a \cdots$ ② が x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲は $\boxed{7} < a < \boxed{8}$ である．このとき，② によって切り取られる線分の長さを ℓ とすると，$\ell^2 = -\boxed{9}\,a^2 + \boxed{10}\boxed{11}\,a$ であり，ℓ の最大値は $\boxed{12}$ である．

[3] 自然数 x，y，z が $2x + 9y - 7z = 0$，$3x - 4y + 2z = 0$ をみたしているとき，
$x : y : z = \boxed{13} : \boxed{14} : \boxed{15}$ である．
また，$\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$ のとる値のうち最小の自然数は $\boxed{16}\boxed{17}$ で，そのとき
$x = \boxed{18}\boxed{19}$ である．

[4] $x = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{3}$，$y = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3}$ のとき，

$$x^2 + y^2 = \frac{\boxed{20}\boxed{21}}{\boxed{22}},\quad x^3 - y^3 = -\frac{\boxed{23}\sqrt{\boxed{24}}}{\boxed{25}}$$

である．

[5] $\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{4}$ $(0° < \theta < 180°)$ のとき，

$$\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{\boxed{26}}}{\boxed{27}},\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{\boxed{28}} - \sqrt{\boxed{29}}}{\boxed{30}}$$

である．

[6] $\triangle$ABC において，$a + b : b + c : c + a = 5 : 7 : 6$ であるとき，
$a : b : c = \boxed{31} : \boxed{32} : \boxed{33}$，$\sin A : \sin B : \sin C = \boxed{34} : \boxed{35} : \boxed{36}$，
$\cos A : \cos B : \cos C = \boxed{37}\boxed{38} : \boxed{39}\boxed{40} : -\boxed{41}$ である．

[7] $\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{A} = 120°$，$\mathrm{BC} = 19$，$\mathrm{CA} = 16$，AB の長さは $\boxed{42}$，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{43}\boxed{44}\sqrt{\boxed{45}}$，$\triangle$ABC の内接円の半径は $\sqrt{\boxed{46}}$ である．

解答例

[1] $y=2x^2-4x+1\cdots$ ① を変形すると

$$y=2(x-1)^2-1$$

であるから，① の頂点の座標は $(1,-1)$ である．この放物線を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線の頂点の座標は

$$(1-1,-1+2)\quad \text{すなわち}\quad (0,\ 1)$$

ゆえに，この平行移動後の放物線の方程式は　$\boldsymbol{y=2x^2+1}$

$y=2x^2+3x+1$ を変形すると　$y=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

ゆえに，頂点の座標は　$\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{8}\right)$

これは，① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものであるから

$$1+p=-\frac{3}{4},\ -1+q=-\frac{1}{8}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{p=-\frac{7}{4},\ q=\frac{7}{8}}$$

(答) $\boxed{1}$ 2　$\boxed{2}$ 1　$\boxed{3}$ 7　$\boxed{4}$ 4　$\boxed{5}$ 7　$\boxed{6}$ 8

[2] 放物線が x 軸と異なる 2 点で交わるための条件は，$D/4>0$ であるから

$$(-a)^2-1\cdot(2a^2-4a)>0$$

整理して　$a^2-4a<0$

ゆえに　$a(a-4)<0$

したがって　$\boldsymbol{0<a<4}$

このとき，放物線と x 軸との共有点の x 座標は，
2 次方程式 $x^2-2ax+2a^2-4a=0$ を解いて

$$x=\frac{-(-a)\pm\sqrt{(-a)^2-1\cdot(2a^2-4a)}}{1}=a\pm\sqrt{-a^2+4a}$$

ゆえに，放物線によって切り取られる x 軸の線分の長さ ℓ は

$$\ell=(a+\sqrt{-a^2+4a})-(a-\sqrt{-a^2+4a})=2\sqrt{-a^2+4a}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}\ell^2&=2^2(\sqrt{-a^2+4a})^2\qquad (0<a<4)\\&=4(-a^2+4a)\\&=\boldsymbol{-4a^2+16a}=-4(a-2)^2+16\end{aligned}$$

よって，ℓ^2 は $a=2$ のとき最大となる．

したがって，ℓ は $a=2$ のとき最大値 $\sqrt{16}=\boldsymbol{4}$ をとる．

(答) $\boxed{7}$ 0　$\boxed{8}$ 4　$\boxed{9}$ 4　$\boxed{10}$ 1　$\boxed{11}$ 6　$\boxed{12}$ 4

[3] $$2x+9y-7z=0\cdots①,\ 3x-4y+2z=0\cdots②$$

とおく．① $\times 3-$ ② $\times 2$ から

$$35y-25z=0 \quad \text{すなわち} \quad 7y=5z$$

ゆえに，比例定数 k を用いて，$y=5k$，$z=7k$ とおける．
これを ① に代入して

$$2x+9\cdot 5k-7\cdot 7k=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=2k$$

よって　$x:y:z=2k:5k:7k=\mathbf{2:5:7}$

また

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}=\frac{(2k)^2+(5k)^2+(7k)^2}{2k+5k+7k}=\frac{78k^2}{14k}=\frac{39k}{7}$$

よって，この式がとる最小の自然数は，$k=7$ のとき **39** であり，
このとき　$x=2\cdot 7=\mathbf{14}$

(答) $\boxed{13}$ 2　$\boxed{14}$ 5　$\boxed{15}$ 7　$\boxed{16}$ 3　$\boxed{17}$ 9　$\boxed{18}$ 1　$\boxed{19}$ 4

[4]
$$x+y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$
$$x-y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$xy=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}$$

したがって

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2-2\times\frac{2}{9}=\boldsymbol{\frac{16}{9}}$$

$$x^3-y^3=(x-y)\{(x^2+y^2)+xy\}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{16}{9}+\frac{2}{9}\right)=\boldsymbol{-\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

(答) $\boxed{20}$ 1　$\boxed{21}$ 6　$\boxed{22}$ 9　$\boxed{23}$ 4　$\boxed{24}$ 3　$\boxed{25}$ 3

[5] $\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{4} < 0\ (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ より

$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$ であるから　$\sin\theta - \cos\theta > 0$　$\cdots$①

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\times\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

① より　$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

したがって，$\sin\theta$，$-\cos\theta$ を解とする 2 次方程式は

$$(x - \sin\theta)(x + \cos\theta) = 0$$

すなわち　$x^2 - (\sin\theta - \cos\theta)x - \sin\theta\cos\theta = 0$

ゆえに　$x^2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}x + \dfrac{1}{4} = 0$

この方程式を解いて

$$(\sin\theta, -\cos\theta) = \left(\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}\mp\sqrt{2}}{4}\right) \qquad \text{(複号同順)}$$

よって　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{6}\mp\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\pm\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

別解 (数学 II)

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ であるから

$0 < 2\theta < 360^\circ$ に注意して，これを解くと　$2\theta = 210^\circ$，330°

ゆえに　$\theta = 105^\circ$，165°

$\theta = 105^\circ$ のとき

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \cos\theta = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\ \sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\theta = 165^\circ$ のとき

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\ \sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

実際は，$\cos\theta = \dfrac{\pm\sqrt{\boxed{28}}-\sqrt{\boxed{29}}}{\boxed{30}}$ であるが，拙者が当学院に問い合わせたところによると，試験後に “±” が抜けていたことに出題者が気付かれたようである．

(答) $\boxed{26}$ 6　$\boxed{27}$ 2　$\boxed{28}$ 2　$\boxed{29}$ 6　$\boxed{30}$ 4

[6] $a+b:b+c:c+a=5:7:6$ であるから，定数 k を用いて $(k>0)$,

$$a+b=5k\cdots①,\ b+c=7k\cdots②,\ c+a=6k\cdots③$$

とおける．これらの式の辺々を加えると

$$2a+2b+2c=18k \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c=9k\cdots④$$

①，④ から $c=4k$,　②，④ から $a=2k$,　③，④ から $b=3k$

ゆえに　$a:b:c=2k:3k:4k=\mathbf{2:3:4}$

正弦定理により $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$ であるから

$$\sin A:\sin B:\sin C=\mathbf{2:3:4}$$

$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$ を余弦定理に適用して

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\cdot 3k\cdot 4k}=\frac{21k^2}{24k^2}=\frac{7}{8}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(4k)^2+(2k)^2-(3k)^2}{2\cdot 4k\cdot 2k}=\frac{11k^2}{16k^2}=\frac{11}{16}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\cdot 2k\cdot 3k}=\frac{-3k^2}{12k^2}=-\frac{1}{4}$$

よって　$\cos A:\cos B:\cos C=\dfrac{7}{8}:\dfrac{11}{16}:-\dfrac{1}{4}=\mathbf{14:11:-4}$

(答) $\boxed{31}$ 2　$\boxed{32}$ 3　$\boxed{33}$ 4　$\boxed{34}$ 2　$\boxed{35}$ 3　$\boxed{36}$ 4
　　$\boxed{37}$ 1　$\boxed{38}$ 4　$\boxed{39}$ 1　$\boxed{40}$ 1　$\boxed{41}$ 4

[7] AB $= c$ とおく．△ABC を余弦定理に適用すると

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos A$$

ゆえに　$19^2 = 16^2 + c^2 - 2\cdot 16\cdot c\cos 120^\circ$

整理して　$c^2 + 16c - 105 = 0$

したがって　$(c+21)(c-5) = 0$

$c > 0$ であるから　$c = \mathbf{5}$

△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{20\sqrt{3}}$$

$2s = 19 + 16 + 5$ とおくと　$s = 20$

△ABC の内接円の半径を r とし，これらを $S = rs$ に代入して

$$20\sqrt{3} = r\cdot 20 \quad よって \quad r = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(答) $\boxed{42}$ 5　$\boxed{43}$ 2　$\boxed{44}$ 0　$\boxed{45}$ 3　$\boxed{46}$ 3