平成19年度　九州中央リハビリテーション学院 一般入学試験後期(数学I) 平成18年12月2日

[1] $\alpha = -1 + \sqrt{3}$ のとき，

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = -\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}}{\boxed{5}},\quad \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = -\frac{\boxed{6}\boxed{7}}{\boxed{8}} + \frac{\boxed{9}\boxed{10}\sqrt{\boxed{11}}}{\boxed{12}}$$

である．また，$x\alpha^2 + y\alpha^3 = -2 + 2\sqrt{3}$ をみたす整数 x，y の値は，

$x = \boxed{13}$，$y = \boxed{14}$ である．

[2] $f(x) = x^2 - 2\sqrt{11}x + 8$ とする．

方程式 $f(x) = 0$ の解は，$x = \sqrt{\boxed{15}\boxed{16}} \pm \sqrt{\boxed{17}}$ であり，

不等式 $f(x) < 0$ をみたす整数 x の個数は $\boxed{18}$ 個である．

[3] 2次関数 $f(x) = x^2 + 2x - 3$，$g(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 3$ について考える．

任意の実数 x について $f(x) > g(x)$ となるような a の値の範囲は

$a < -\sqrt{\boxed{19}\boxed{20}}$，$\sqrt{\boxed{21}\boxed{22}} < a$ である．

また，$y = f(x)$ のグラフの頂点は $(-\boxed{23}, -\boxed{24})$ であり，任意の実数 x_1，x_2 について $f(x_1) > g(x_2)$ となるような a の値の範囲は $a < -\boxed{25}$ である．

[4] 放物線 $C : y = x^2 - 2x + 3$ について考える．

直線 $x = 2$ に関して C と対称な曲線の方程式は $y = x^2 - \boxed{26}x + \boxed{27}\boxed{28}$ であり，点 $(-1,\ 1)$ に関して C と対称な曲線の方程式は $y = -x^2 - \boxed{29}x - \boxed{30}$ である．

[5] $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{\boxed{31}}{\boxed{32}}$，$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = -\dfrac{\boxed{33}}{\boxed{34}}$，

$\tan^3\theta + \dfrac{1}{\tan^3\theta} = -\dfrac{\boxed{35}\boxed{36}}{\boxed{37}}$ である．

[6] 四角形ABCDにおいて，$\mathrm{AB} = \sqrt{3} - 1$，$\mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \sqrt{2}$，$\mathrm{DA} = 2$，$\angle\mathrm{A} = 120^\circ$ である．このとき，$\mathrm{BD} = \sqrt{\boxed{38}}$，$\angle\mathrm{DBC} = \boxed{39}\boxed{40}^\circ$ であり，この四角形の面積は $\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}$ である．

解答例

[1] $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-1+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-1+\sqrt{3}}=-1+\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$$=-1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$\alpha^2-1+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-3=4-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに　$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^2-1+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(4-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{35}{4}+\frac{27\sqrt{3}}{4}}$$

次に，$\alpha^2=(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$，$\alpha^3=(\sqrt{3}-1)^3=-10+6\sqrt{3}$

を $x\alpha^2+y\alpha^3=-2+2\sqrt{3}$ に代入して

$$x(4-2\sqrt{3})+y(-10+6\sqrt{3})=-2+2\sqrt{3}$$

左辺を整理して　　$(4x-10y)+(-2x+6y)\sqrt{3}=-2+2\sqrt{3}$

$4x-10y$，$-2x+6y$ は有理数であるから

$4x-10y=-2$，$-2x+6y=2$　ゆえに　$\boldsymbol{x=2,\ y=1}$

(答) $\boxed{1}$ 1　$\boxed{2}$ 2　$\boxed{3}$ 3　$\boxed{4}$ 3　$\boxed{5}$ 2　$\boxed{6}$ 3　$\boxed{7}$ 5
$\boxed{8}$ 4　$\boxed{9}$ 2　$\boxed{10}$ 7　$\boxed{11}$ 3　$\boxed{12}$ 4　$\boxed{13}$ 2　$\boxed{14}$ 1

[2] $f(x)=0$ の解は，解の公式により

$$x=\frac{-(-\sqrt{11})\pm\sqrt{(-\sqrt{11})^2-1\cdot 8}}{1}=\boldsymbol{\sqrt{11}\pm\sqrt{3}}$$

$f(x)<0$ の解は　$\sqrt{11}-\sqrt{3}<x<\sqrt{11}+\sqrt{3}$

ここで，$3.3^2=10.89$，$3.4^2=11.56$，$1.7^2=2.89$，$1.8^2=3.24$ であるから

$3.3<\sqrt{11}<3.4$，$1.7<\sqrt{3}<1.8$，$-1.8<-\sqrt{3}<-1.7$ により

$3.3+1.7<\sqrt{11}+\sqrt{3}<3.4+1.8$　ゆえに　$5<\sqrt{11}+\sqrt{3}<5.2$
$3.3-1.8<\sqrt{11}-\sqrt{3}<3.4-1.7$　ゆえに　$1.5<\sqrt{11}-\sqrt{3}<1.7$

よって，$f(x)<0$ をみたす整数 x は　　2，3，4，5 の **4 個**

(答) $\boxed{15}$ 1　$\boxed{16}$ 1　$\boxed{17}$ 3　$\boxed{18}$ 4

[3] $f(x) > g(x)$ より　$x^2 + 2x - 3 > -x^2 + 2ax - a^2 + a + 3$

変形して　　　$2x^2 + 2(1 - a) + a^2 - a - 6 > 0$　　　$\cdots$①

任意の実数 x に対して，$f(x) > g(x)$ であるためには，① の左辺が常に正であればよいから，x^2 の係数が 2 で正であるから，求める条件は

$$D/4 = (1 - a)^2 - 2\cdot(a^2 - a - 6) < 0$$

ゆえに　$a^2 - 13 > 0$

よって　$\boldsymbol{a < -\sqrt{13},\ \sqrt{13} < a}$

また　$f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$

ゆえに，$y = f(x)$ の頂点の座標は　$\boldsymbol{(-1, -4)}$

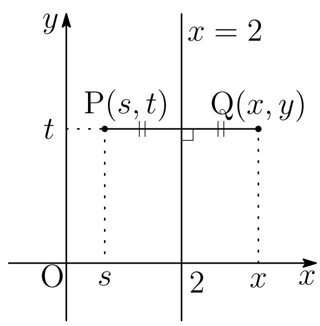
$$g(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 3 = -(x - a)^2 + a + 3$$

$f(x)$ の最小値が -4，$g(x)$ の最大値が $a + 3$ であるから，任意の実数 x_1，x_2 について $f(x_1) > g(x_2)$ となるための条件は

$$-4 > a + 3\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a < -7}$$

(答) $\boxed{19}$ 1　$\boxed{20}$ 3　$\boxed{21}$ 1　$\boxed{22}$ 3　$\boxed{23}$ 1　$\boxed{24}$ 4　$\boxed{25}$ 7

[4] C 上に点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ をとり，点 P と直線 $x = 2$ に関して対称な点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると



$$t = s^2 - 2s + 3\qquad \cdots①$$

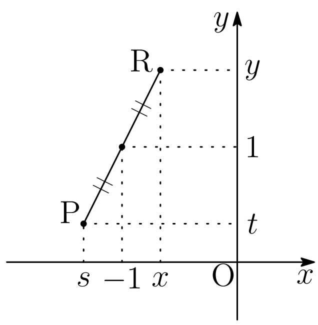
$$\frac{s + x}{2} = 2,\ y = t\qquad \cdots②$$

が成り立つ．② から　$s = 4 - x,\ t = y$

① に代入すると　$y = (4 - x)^2 - 2(4 - x) + 3$

すなわち　$\boldsymbol{y = x^2 - 6x + 11}$

同様に，点 P と点 $(-1,\ 1)$ に関して対称な点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると



$$\frac{s + x}{2} = -1,\ \frac{t + y}{2} = 1\qquad \cdots③$$

が成り立つ．③ から　$s = -2 - x,\ t = 2 - y$

① に代入すると

$$2 - y = (-2 - x)^2 - 2(-2 - x) + 3$$

すなわち　$-y = x^2 + 6x + 9$

よって　$\boldsymbol{y = -x^2 - 6x - 9}$

(答) $\boxed{26}$ 6　$\boxed{27}$ 1　$\boxed{28}$ 1　$\boxed{29}$ 6　$\boxed{30}$ 9

[5] $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

よって　　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{5}$

したがって　　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{-\dfrac{2}{5}}$

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=1\div\left(-\frac{2}{5}\right)=\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$$

$$\tan^2\theta-1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2-3=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-3=\frac{13}{4}$$

ゆえに　$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}=\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)\left(\tan^2\theta-1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}\right)$

$$=-\frac{5}{2}\times\frac{13}{4}=\boldsymbol{-\frac{65}{8}}$$

(答) $\boxed{31}$ 2　$\boxed{32}$ 5　$\boxed{33}$ 5　$\boxed{34}$ 2　$\boxed{35}$ 6　$\boxed{36}$ 5　$\boxed{37}$ 8

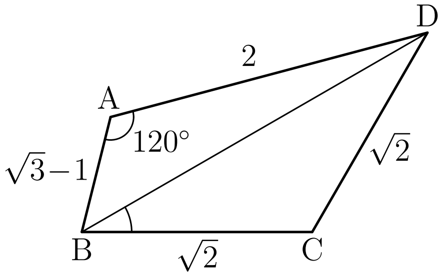
[6] △ABD に余弦定理を適用して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{DA}^2+\mathrm{AB}^2-2{\cdot}\mathrm{DA}{\cdot}\mathrm{AB}\cos A\\
&= 2^2+(\sqrt{3}-1)^2-2{\cdot}2(\sqrt{3}-1)\cos 120^\circ\\
&= 4+(4-2\sqrt{3})-2{\cdot}2(\sqrt{3}-1){\cdot}\left(-\frac{1}{2}\right)\\
&= 6
\end{aligned}
$$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　$\mathbf{BD}=\sqrt{\mathbf{6}}$

△BCD に余弦定理を適用して

$$
\begin{aligned}
\cos\angle\mathrm{DBC} &= \frac{\mathrm{DB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2}{2\mathrm{DB}{\cdot}\mathrm{BC}}\\
&= \frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}{2\sqrt{6}\sqrt{2}}\\
&= \frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$



ゆえに　　$\angle\mathbf{DBC}=\mathbf{30^\circ}$

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{DAB} &= \frac{1}{2}\mathrm{DA}{\cdot}\mathrm{AB}\sin A\\
&= \frac{1}{2}{\cdot}2{\cdot}(\sqrt{3}-1)\sin 120^\circ\\
&= \frac{1}{2}{\cdot}2(\sqrt{3}-1){\cdot}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{DBC} &= \frac{1}{2}\mathrm{DB}{\cdot}\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{DBC}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{2}\sin 30^\circ\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{2}{\cdot}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

よって，四角形 ABCD の面積は

$$
\triangle\mathrm{DAB}+\triangle\mathrm{DBC}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\frac{3}{2}}
$$

(答) $\boxed{38}$ 6　$\boxed{39}$ 3　$\boxed{40}$ 0　$\boxed{41}$ 3　$\boxed{42}$ 2