平成18年度　九州中央リハビリテーション学院
一般入学試験B(数学I) 平成18年1月11日

[1] 5^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を7で割った余りを $n = 1$ より順に書くと

5，4，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\cdots$ となり，以降これを繰り返すので，5^{2006} を7で割った余りは $\boxed{5}$ である．

[2] $x = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ のとき，$x = \boxed{6} - \boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}$ であり，これは x の2次方程式

$x^2 - \boxed{9}\boxed{10}x + \boxed{11} = 0$ をみたす．

このとき，$3x^2 - 36x + 33 = 3(x^2 - \boxed{9}\boxed{10}x + \boxed{11}) - \boxed{12}x + \boxed{13}\boxed{14}$ であるので，この式の値は $\boxed{15}\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}$ である．

[3] $xyz \neq 0$，$\dfrac{y+z}{x} = \dfrac{z+x}{y} = \dfrac{x+y}{z} = k$ とするとき，k の値は $\boxed{18}$ または $-\boxed{19}$ であり，このとき，$\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\left(1 + \dfrac{z}{y}\right)\left(1 + \dfrac{x}{z}\right)$ の値は $\boxed{20}$ または $-\boxed{21}$ である．

[4] 放物線 $y = x^2 + ax + a - 2$ (a は定数) の頂点の y 座標は $-\dfrac{1}{\boxed{22}}a^2 + a - \boxed{23}$ であり，これは $-\boxed{24}$ 以下の値をとる．この放物線と x 軸との交点をP，Qとおくと，線分PQの長さは $\sqrt{a^2 - \boxed{25}a + \boxed{26}}$ だから，これが最短となるのは $a = \boxed{27}$ のときで，そのときの長さは $\boxed{28}$ である．

[5] 関数 $f(x) = |x^2 - 8x + 12| + 2x - 6$ $(0 \leqq x \leqq 6)$ は,

$$0 \leqq x \leqq \boxed{29} \quad \text{のとき} \quad f(x) = x^2 - \boxed{30}x + \boxed{31}$$
$$\boxed{29} \leqq x \leqq 6 \quad \text{のとき} \quad f(x) = -x^2 + \boxed{32}\boxed{33}x - \boxed{34}\boxed{35}$$

この $0 \leqq x \leqq t$ $(0 \leqq t \leqq 6)$ における最大値は,

$$0 \leqq t \leqq \boxed{36} \quad \text{のとき} \quad \boxed{37}$$
$$\boxed{36} \leqq t \leqq \boxed{38} \quad \text{のとき} \quad -t^2 + \boxed{39}\boxed{40}t - \boxed{41}\boxed{42}$$
$$\boxed{38} \leqq t \leqq 6 \quad \text{のとき} \quad \boxed{43}$$

[6] $0° < x < 90°$，$0° < y < 90°$ である x，y が $\sin x = \cos y \cdots$ ①
をみたすとき，$x + y = \boxed{44}\boxed{45}°$ であり，さらに ① が $\sin(y - x)$ に等しいとき，$x = \boxed{46}\boxed{47}°$，$y = \boxed{48}\boxed{49}°$ である．

[7] 四角形 ABCD が円に内接し，AB $=3$，BC $=4$，CD $=2$，DA $=5$ である．

このとき $\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C}=\boxed{50}\boxed{51}\boxed{52}^\circ$ であり，BD^2 を考えることにより

$\cos A=\dfrac{\boxed{53}}{\boxed{54}\boxed{55}}$ とわかる．

また，この四角形の面積は $\boxed{56}\sqrt{\boxed{57}\boxed{58}}$ である．

解答例

[1] A を 7 で割ったときの商が a，余りが 5 のとき，$A=7a+5$ であるから

$5A=5\cdot7a+25=7(5a+3)+4$　すなわち　$5A$ を 7 で割った余りは　4

B を 7 で割ったときの商が b，余りが 4 のとき，$B=7b+4$ であるから

$5B=5\cdot7b+20=7(5b+2)+6$　すなわち　$5B$ を 7 で割った余りは　**6**

C を 7 で割ったときの商が c，余りが 6 のとき，$C=7c+6$ であるから

$5C=5\cdot7c+30=7(5c+4)+2$　すなわち　$5C$ を 7 で割った余りは　**2**

D を 7 で割ったときの商が d，余りが 2 のとき，$D=7d+2$ であるから

$5D=5\cdot7d+10=7(5d+1)+3$　すなわち　$5D$ を 7 で割った余りは　**3**

E を 7 で割ったときの商が e，余りが 3 のとき，$E=7e+3$ であるから

$5E=5\cdot7e+15=7(5e+2)+1$　すなわち　$5E$ を 7 で割った余りは　**1**

F を 7 で割ったときの商が f，余りが 1 のとき，$F=7f+1$ であるから

$5F=5\cdot7f+5=7\cdot5f+5$　すなわち　$5F$ を 7 で割った余りは　5

したがって，5^n $(n=1,2,3,\cdots)$ を 7 で割った余りを $n=1$ より順に書くと

5，4，6，2，3，1，$\cdots$ となり，以降これを繰り返す．

$2006=6\times334+2$ であるから　5^{2006} を 7 で割った余りは　**4**

(答) $\boxed{1}$ 6　$\boxed{2}$ 2　$\boxed{3}$ 3　$\boxed{4}$ 1　$\boxed{5}$ 4

[2] $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2}=\mathbf{5-2\sqrt{6}}$

$x-5=-2\sqrt{6}$ であるから，両辺を 2 乗して整理すると

$$\begin{aligned}(x-5)^2&=(-2\sqrt{6})^2\\ x^2-10x+25&=24\\ x^2-\mathbf{10}x+\mathbf{1}&=0\end{aligned}$$

このとき　$3x^2-36x+33=3x^2-30x+3-6x+30$

$$=3(x^2-\mathbf{10}x+\mathbf{1})-\mathbf{6}x+\mathbf{30}$$

したがって，$3x^2-36x+33=3\times0-6(5-2\sqrt{6})+30=\mathbf{12\sqrt{6}}$

(答) $\boxed{6}$ 5　$\boxed{7}$ 2　$\boxed{8}$ 6　$\boxed{9}$ 1　$\boxed{10}$ 0　$\boxed{11}$ 1　$\boxed{12}$ 6　$\boxed{13}$ 3　$\boxed{14}$ 0
$\boxed{15}$ 1　$\boxed{16}$ 2　$\boxed{17}$ 6

[3] $\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{x+y}{z}=k$ より　$y+z=kx$，$z+x=ky$，$x+y=kz$

これらの辺々を加えて整理すると

$$\begin{aligned}2(x+y+z)&=k(x+y+z)\\ (2-k)(x+y+z)&=0\end{aligned}$$

i) $x+y+z\neq0$ のとき　$k=\mathbf{2}$

ii) $x+y+z=0$ のとき

$$\frac{y+z}{x}=\frac{-x}{x}=-1,\quad \frac{z+x}{y}=\frac{-y}{y}=-1,\quad \frac{x+y}{z}=\frac{-z}{z}=-1$$

であるから　$k=\mathbf{-1}$

このとき

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)&=\frac{x+y}{x}\times\frac{y+z}{y}\times\frac{z+x}{z}\\ &=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\\ &=\frac{x+y}{z}\times\frac{y+z}{x}\times\frac{z+x}{y}\\ &=k\times k\times k\\ &=k^3\end{aligned}$$

であるから　この値は　$2^3=\mathbf{8}$　または　$(-1)^3=\mathbf{-1}$

(答) $\boxed{18}$ 2　$\boxed{19}$ 1　$\boxed{20}$ 8　$\boxed{21}$ 1

[4]

$$\begin{aligned} y &= x^2+ax+a-2 \\ &= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+a-2 \\ &= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+a-2 \end{aligned}$$

したがって，頂点の y 座標は $-\dfrac{1}{\mathbf{4}}a^2+a-\mathbf{2}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}a^2+a-2 &= -\frac{1}{4}(a^2-4a)-2 \\ &= -\frac{1}{4}\{(a-2)^2-2^2\}-2 \\ &= -\frac{1}{4}(a-2)^2-1 \end{aligned}$$

よって，頂点の y 座標は $\mathbf{-1}$ 以下の値をとる.

放物線と x 軸との交点の x 座標は，2 次方程式 $x^2+ax+a-2=0$ であるから

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\cdot1(a-2)}}{2\cdot1}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}$$

これから放物線と x 軸との交点 P，Q を結ぶ線分 PQ の長さは

$$\mathrm{PQ}=\frac{-a+\sqrt{a^2-4a+8}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2-4a+8}}{2}=\sqrt{a^2-\mathbf{4}a+\mathbf{8}}$$

$\sqrt{a^2-4a+8}=\sqrt{(a-2)^2+4}$ であるから，PQ が最短となるのは

$\boldsymbol{a}=\mathbf{2}$ のとき　$\mathrm{PQ}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$

(答) $\boxed{22}$ 4　$\boxed{23}$ 2　$\boxed{24}$ 1　$\boxed{25}$ 4　$\boxed{26}$ 8　$\boxed{27}$ 2　$\boxed{28}$ 2

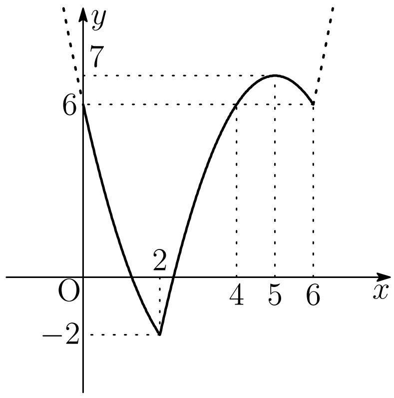
[5] $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$ であるから

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき　$x^2-8x+12 \geqq 0$ より

$$|x^2-8x+12| = x^2-8x+12$$

$2 \leqq x \leqq 6$ のとき　$x^2-8x+12 \leqq 0$ より

$$|x^2-8x+12| = -(x^2-8x+12)$$



$0 \leqq x \leqq \mathbf{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-8x+12)+2x-6 \\ &= x^2-\mathbf{6}x+\mathbf{6} \end{aligned}$$

$\mathbf{2} \leqq x \leqq 6$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2-8x+12)+2x-6 \\ &= -x^2+\mathbf{10}x-\mathbf{18} \end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq t$ $(0 \leqq t \leqq 6)$ における最大値は，

$0 \leqq t \leqq \mathbf{4}$　のとき　$\mathbf{6}$

$\mathbf{4} \leqq t \leqq \mathbf{5}$　のとき　$-t^2+\mathbf{10}t-\mathbf{18}$

$\mathbf{5} \leqq t \leqq 6$　のとき　$\mathbf{7}$

(答) $\boxed{29}$ 2　$\boxed{30}$ 6　$\boxed{31}$ 6　$\boxed{32}$ 1　$\boxed{33}$ 0　$\boxed{34}$ 1　$\boxed{35}$ 8　$\boxed{36}$ 4　$\boxed{37}$ 6

$\boxed{38}$ 5　$\boxed{39}$ 1　$\boxed{40}$ 0　$\boxed{41}$ 1　$\boxed{42}$ 8　$\boxed{43}$ 7

[6] $0° < x < 90°$，$0° < y < 90°$ である x，y が $\sin x = \cos y \cdots$ ① をみたすとき，

$\cos y = \sin(90° - y)$ であるから

$x = 90° - y$　すなわち　$\boldsymbol{x+y=90°}$　$\cdots$ ②

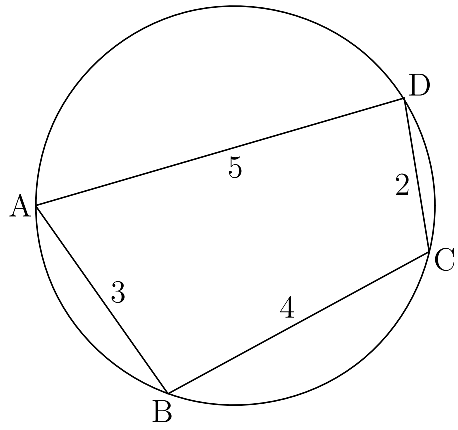
さらに ① が $\sin(y-x)$ に等しいとき，$\sin x = \sin(y-x)$ より

$x = y - x$　すなわち　$y = 2x$　$\cdots$ ③

②，③ を解いて　$\boldsymbol{x=30°}$，$\boldsymbol{y=60°}$

(答) $\boxed{44}$ 9　$\boxed{45}$ 0　$\boxed{46}$ 3　$\boxed{47}$ 0　$\boxed{48}$ 6　$\boxed{49}$ 0

[7] △ABD に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cos A\\ &= 34-30\cos A\end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するので

$$A+C=180^\circ$$

すなわち　$C=180^\circ-A$

△BCD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cos C\\ &= 20-16\cos(180^\circ-A)\\ &= 20+16\cos A\end{aligned}$$

よって　　$34-30\cos A=20+16\cos A$

これを解いて　　$\cos A=\dfrac{7}{23}$

$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{7}{23}\right)^2}=\frac{4\sqrt{30}}{23}$$

よって，求める四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\ &= \frac{1}{2}\cdot5\cdot3\sin A+\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin(180^\circ-A)\\ &= \frac{15}{2}\sin A+4\sin A\\ &= \frac{23}{2}\sin A=\frac{23}{2}\times\frac{4\sqrt{30}}{23}=2\sqrt{30}\end{aligned}$$

(答) $\boxed{50}$ 1　$\boxed{51}$ 8　$\boxed{52}$ 0　$\boxed{53}$ 7　$\boxed{54}$ 2　$\boxed{55}$ 3　$\boxed{56}$ 2　$\boxed{57}$ 3　$\boxed{58}$ 0