平成18年度　九州中央リハビリテーション学院
一般入学試験A(数学I) 平成17年11月9日

[1] 有理数 $\dfrac{13}{101}$ を小数で表すと$\boxed{1}$桁の循環小数になり，循環小数 $0.\dot{4}\dot{5}$ を有理数で表すと $\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}\boxed{4}}$ となる．

[2] $f(x) = \big|2|x-3|-7\big|$ とすると，方程式 $f(x) = 5$ の解のうち最大のものは $x = \boxed{5}$ であり，関数 $y = f(x)$ は $x = -\dfrac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$, $\dfrac{\boxed{8}\boxed{9}}{\boxed{10}}$ で最小値をとる．

[3] $f(x) = x^3 - (2a-1)x^2 - 2(a-1)x + 2$ を1次式と2次式の積で表すと $f(x) = (x + \boxed{11})(x^2 - \boxed{12}ax + \boxed{13})$ となり，方程式 $f(x) = 0$ が異なる3つの実数解をもつ条件は $a^2 > \boxed{14}$ かつ $a \neq -\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}}$ である．

[4] 連立不等式 $x^2 - 2x - 3 \leqq 0$，$x^2 - ax + a - 7 \geqq 0$ を考える．$a = 4$ のとき，この連立不等式をみたす x の値の範囲は $-\boxed{17} \leqq x \leqq \boxed{18} - \sqrt{\boxed{19}}$ であり，また，この連立不等式が解をもたないような実数 a の値の範囲は $\boxed{20} < a < \boxed{21}$ である．

[5] 放物線 $y = -2x^2 + 17x - 32$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に$\boxed{22}$だけ平行移動すれば，放物線 $y = -2x^2 + \boxed{23}x + 3$ になる．これを，さらに x 軸方向正の向きに $\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}$ だけ平行移動すれば原点を通る．

[6] 三角形ABCは $\mathrm{AB} = 5\sqrt{3}$，$\mathrm{BC} = 5$，$\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$ をみたす．このとき $\angle\mathrm{CAB} = \boxed{26}\boxed{27}^\circ$ であり，三角形ABCの面積は $\dfrac{\boxed{28}\boxed{29}\sqrt{\boxed{30}}}{\boxed{31}}$ である．

[7] 円に内接する四角形ABCDは $\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{BC} = 5$，$\mathrm{CD} = 1$，$\cos\mathrm{B} = \dfrac{2}{3}$ をみたす．このとき $\mathrm{AC} = \sqrt{\boxed{32}\boxed{33}}$，$\mathrm{AD} = \boxed{34}$，円の半径は $\dfrac{\boxed{35}\sqrt{\boxed{36}\boxed{37}}}{\boxed{38}\boxed{39}}$，四角形ABCDの面積は $\boxed{40}\sqrt{\boxed{41}}$ である．

解答例

[1] $\dfrac{13}{101} = 0.128712871287\cdots$ であるから，**4** 桁の循環小数である．

$x = 0.\dot{4}\dot{5}$ とおくと，$x = 0.454545\cdots$，$100x = 45.454545\cdots$ であるから

$$100x - x = 45$$

すなわち　$99x = 45$

よって　$x = \dfrac{45}{99} = \boldsymbol{\dfrac{5}{11}}$

(答) $\boxed{1}$ 4　$\boxed{2}$ 5　$\boxed{3}$ 1　$\boxed{4}$ 1

[2] $f(x) = 5$ の解は，$2|x-3| - 7 = 5$　または　$2|x-3| - 7 = -5$

$2|x-3| - 7 = 5$ のとき　$|x-3| = 6$

$x - 3 = \pm 6$

したがって　$x = 9, -3$

$2|x-3| - 7 = -5$ のとき　$|x-3| = 1$

$x - 3 = \pm 1$

したがって　$x = 4,\ 2$

$f(x) = 5$ の解は $x = 9, -3,\ 4,\ 2$ であり，この解のうち最大のものは $\boldsymbol{x = 9}$

$f(x)$ が最小となるのは $2|x-3| - 7 = 0$ のときであり

$$|x-3| = \frac{7}{2}$$

$$x - 3 = \pm\frac{7}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{x = \dfrac{13}{2}, -\dfrac{1}{2}}$

(答) $\boxed{5}$ 9　$\boxed{6}$ 1　$\boxed{7}$ 2　$\boxed{8}$ 1　$\boxed{9}$ 3　$\boxed{10}$ 2

[3]

$$
\begin{aligned}
& x^3-(2a-1)x^2-2(a-1)x+2 \\
=& x^3+x^2+2x+2-2ax^2-2ax \qquad \longleftarrow a\text{ について整理する} \\
=& x^2(x+1)+2(x+1)-2ax(x+1) \\
=& (x+1)(x^2+2-2ax) \\
=& \boldsymbol{(x+1)(x^2-2ax+2)}
\end{aligned}
$$

$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつためには，方程式 $x^2-2ax+2=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，その解が $x\neq-1$ であればよい．

$D>0$ から　$(-2a)^2-4\cdot1\cdot2>0$

$4a^2-8>0$

-1 は解ではないから　$(-1)^2-2a\cdot(-1)+2\neq0$

$2a+3\neq0$

したがって，求める条件は　$\boldsymbol{a^2>2}$　**かつ**　$\boldsymbol{a\neq-\frac{3}{2}}$

(答) $\boxed{11}$ 1　$\boxed{12}$ 2　$\boxed{13}$ 2　$\boxed{14}$ 2　$\boxed{15}$ 3　$\boxed{16}$ 2

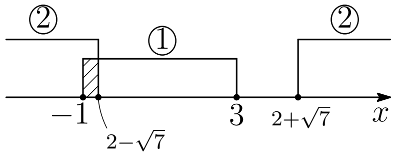
[4] $a=4$ のとき，連立不等式 $\begin{cases} x^2-2x-3\leqq0 \\ x^2-4x-3\geqq0 \end{cases}$ を解けばよい．

第 1 式を解いて　$-1\leqq x\leqq3$　$\cdots$①

第 2 式を解いて　$x\leqq2-\sqrt{7},\ 2+\sqrt{7}\leqq x$　$\cdots$②

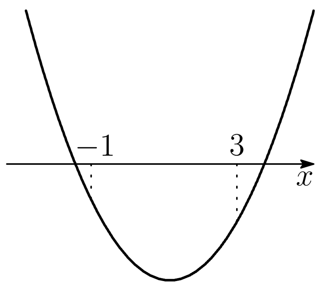
①，② の共通範囲を求めて

$\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 2-\sqrt{7}}$



$f(x)=x^2-ax+a-7$ とおくと，
連立不等式が解をもたないためには

$f(-1)<0$　かつ　$f(3)<0$



$f(-1)<0$ から　$(-1)^2-a\cdot(-1)+a-7<0$

$2a-6<0$

したがって　$a<3$　$\cdots$③

$f(3)<0$ から　$3^2-a\cdot3+a-7<0$

$-2a+2<0$

したがって　$a>1$　$\cdots$④

③，④ から，求める実数 a の値の範囲は　$\boldsymbol{1<a<3}$

(答) $\boxed{17}$ 1　$\boxed{18}$ 2　$\boxed{19}$ 7　$\boxed{20}$ 1　$\boxed{21}$ 3

[5] $f(x)=-2x^2+17x-32$ とおく．放物線 $y=f(x)$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に q だけ平行移動したものは，$y=f(x+3)+q$ である．

$$\begin{aligned} f(x+3)+q &= -2(x+3)^2+17(x+3)-32+q \\ &= -2x^2+5x+q+1 \end{aligned}$$

係数を比較して　$q+1=3$　これを解いて　$q=\mathbf{2}$

$-2x^2+5x+3=-(x-3)(2x+1)$ であるから，放物線 $y=-2x^2+\mathbf{5}x+3$ は x 軸と $x=3,-\dfrac{1}{2}$ で交わる．したがって，x 軸方向正の向きに $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ だけ平行移動すると原点をを通る．

(答) $\boxed{22}$ 2　$\boxed{23}$ 5　$\boxed{24}$ 1　$\boxed{25}$ 2

グラフの平行移動

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，次の関数のグラフになる．

$$y=f(x-p)+q$$

たとえば，$f(x)=2x^2+3x+1$，$p=1$，$q=3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x-1)+3 &= 2(x-1)^2+3(x-1)+1+3 \\ &= 2x^2-x+3 \end{aligned}$$

となるから，移動後の放物線は，次の 2 次関数のグラフになる．

$$y=2x^2-x+3$$

[6] 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ &= (5\sqrt{3})^2 + 5^2 - 2\cdot 5\sqrt{3}\cdot 5\cos 60^\circ \\ &= 75 + 25 - 50\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25 \end{aligned}$$

$b > 0$ であるから　$b = 5$

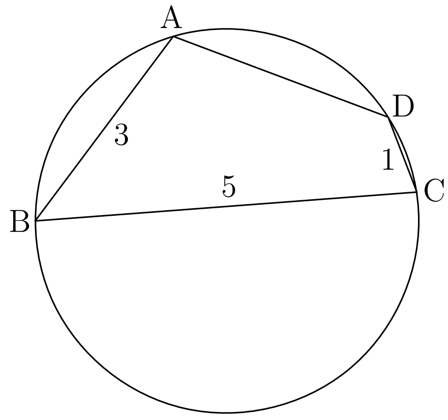
$a = b$ となり　$A = B$　したがって　$\angle\mathrm{CAB} = 30^\circ$

三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{3}\cdot 5\sin 30^\circ \\ &= \frac{25\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{25\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

(答) $\boxed{26}$ 3　$\boxed{27}$ 0　$\boxed{28}$ 2　$\boxed{29}$ 5　$\boxed{30}$ 3　$\boxed{31}$ 4

[7] △ABC を余弦定理に適用すると



$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B \\ &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{2}{3} = 14 \end{aligned}$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathbf{AC = \sqrt{14}}$

$D = 180^\circ - B$ であるから

$$\begin{aligned} \cos D &= \cos(180^\circ - B) \\ &= -\cos B = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\mathrm{DA} = x$ とおいて，△ACD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 &= \mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 - 2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\cos D \\ (\sqrt{14})^2 &= 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \\ 14 &= 1 + x^2 + \frac{4}{3}x \\ 3x^2 &+ 4x - 39 = 0 \\ (x&-3)(3x + 13) = 0 \end{aligned}$$

$x > 0$ であるから　$x = 3$　すなわち　$\mathbf{AD = 3}$

$$\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

円の半径を R とすると　$2R = \dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}$ より

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{AC}}{\sin B} = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \div \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{14}}{2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{70}}{10}} \end{aligned}$$

$$\sin D = \sin(180^\circ - B) = \sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

したがって，四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B + \frac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\sin D \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{5}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \boldsymbol{3\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(答) $\boxed{32}$ 1　$\boxed{33}$ 4　$\boxed{34}$ 3　$\boxed{35}$ 3　$\boxed{36}$ 7　$\boxed{37}$ 0　$\boxed{38}$ 1　$\boxed{39}$ 0　$\boxed{40}$ 3
$\boxed{41}$ 5