九 州 看 護 福 祉 大 学

平 成 18 年 度

入学試験問題

数　学　I

(地 方 試 験)

福岡・長崎・宮崎・那覇

看護学科・社会福祉学科

平成 18 年 2 月 1 日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具 (鉛筆・消しゴム)、時計 (時間表示機能のみ) 以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙をふくめて 3 ページ あり、これとは別に 解答用紙が、1 枚 ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
   (解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情 (病気・トイレ等) のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

平成 18 年度　九州看護福祉大学一般入学選抜試験 (数学 I)
看護学科・社会福祉学科

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

問 1. $x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ のとき, $x + \dfrac{1}{x} = \boxed{\text{ア}}$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \boxed{\text{イ}}$, $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \boxed{\text{ウ}}$ である。

問 2. $a^2b - ab^2 + ab - 2a + 2b - 2$ を因数分解すると $\boxed{\text{エ}}$ である。

問 3. 不等式 $|5x-3| < x$ を解くと $\boxed{\text{オ}}$ であり,
不等式 $4x^2 - 3 < (x+2)(3x-2)$ を解くと $\boxed{\text{カ}}$ である。

問 4. 2 つの 2 次関数 $y = 2x^2 + 3mx + m$, $y = x^2 - (m-1)x + m^2$ (m は定数) のグラフがある。

(1) 2 つのグラフがともに x 軸と 2 個の共有点をもつとき, m の値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(2) 2 つのグラフのどちらか一方のみが x 軸と 2 個の共有点をもつとき, m の値の範囲は $\boxed{\text{ク}}$ である。

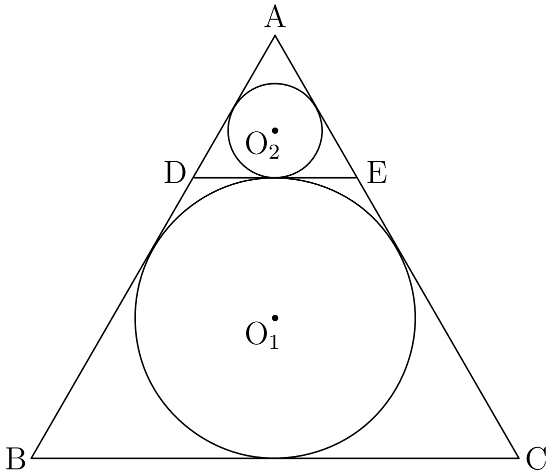
2 次の各問いに答えよ。

なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 三角形 ABC は，1 辺の長さが a の正三角形である。点 D は辺 AB 上の点，点 E は辺 AC 上の点で，DE//BC とする。円 O_1 が三角形 ABC に内接し，しかも台形 DBCE に内接している。さらに円 O_2 が三角形 ADE に内接している。

(1) 円 O_1 の面積を求めよ。

(2) 円 O_2 の面積を求めよ。



問 B. $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，関数 $f(\theta) = 2\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 1$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 問1. $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ より $\dfrac{1}{x}=1\div\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ であるから

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}&=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\\&=\frac{(3+2\sqrt{3}+1)+(3-2\sqrt{3}+1)}{3-1}=\frac{8}{2}=\mathbf{4}\quad\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2+\frac{1}{x^2}&=x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\end{aligned}$$

① から $=4^2-2=\mathbf{14}\quad\cdots②$

$$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)\end{aligned}$$

①，② から $=4\times(14-1)=\mathbf{52}$

(答) ア. 4　イ. 14　ウ. 52

[補足] $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$，$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

であるからこれらに $a=x$，$b=\dfrac{1}{x}$ を代入すると，① より

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}=4^2-2=14$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\cdot4=52$$

問 2. $a^2b - ab^2 + ab - 2a + 2b - 2 = ab(a-b+1) - 2(a-b+1)$

$$= \boldsymbol{(ab-2)(a-b+1)}$$

(答) エ. $(ab-2)(a-b+1)$

問 3. $|5x-3| < x$ より $-x < 5x-3 < x$ であるから

$-x < 5x-3$ を解いて　$x > \dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

$5x-3 < x$ を解いて　$x < \dfrac{3}{4}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{4}}$

$$4x^2 - 3 < (x+2)(3x-2)$$

右辺を展開して　$4x^2 - 3 < 3x^2 + 4x - 4$

移項して整理すると　$x^2 - 4x + 1 < 0$

2 次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の解は　$x = 2 \pm \sqrt{3}$

したがって，求める 2 次不等式の解は　$\boldsymbol{2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}}$

(答) オ. $x < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4} < x$　カ. $2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$

問 4. 2 つの 2 次関数の係数について，

$$D_1 = (3m)^2 - 4{\cdot}2{\cdot}m = 9m^2 - 8m = m(9m-8)$$

$$D_2 = \{-(m-1)\}^2 - 4{\cdot}1{\cdot}m^2 = -3m^2 - 2m + 1 = -(3m^2+2m-1) = -(m+1)(3m-1)$$

(1) 2 つのグラフがともに x 軸と 2 個の共有点をもつとき

$$\begin{cases} m(9m-8) > 0 \\ -(m+1)(3m-1) > 0 \end{cases}$$

第 1 式から　$m < 0,\ \dfrac{8}{9} < m$　$\cdots$ ①

第 2 式から　$-1 < m < \dfrac{1}{3}$　$\cdots$ ②

① と ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-1 < m < 0}$

(2) 2 つのグラフのどちらか一方のみが x 軸と 2 個の共有点をもつとき

$$(*)\begin{cases} m(9m-8) > 0 \\ -(m+1)(3m-1) \leqq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad (**)\begin{cases} m(9m-8) \leqq 0 \\ -(m+1)(3m-1) > 0 \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式から　$m < 0,\ \dfrac{8}{9} < m$

$(*)$ の第 2 式から　$m \leqq -1,\ \dfrac{1}{3} \leqq m$

連立不等式 $(*)$ の解は　$m \leqq -1,\ \dfrac{8}{9} < m$ $\cdots$ ③

$(**)$ の第 1 式から　$0 \leqq m \leqq \dfrac{8}{9}$

$(**)$ の第 2 式から　$-1 < m < \dfrac{1}{3}$

連立不等式 $(**)$ の解は　$0 \leqq m < \dfrac{1}{3}$　$\cdots$ ④

求める m の値の範囲は ③ または ④ であるから

$$\boldsymbol{m \leqq -1,\ 0 \leqq m < \frac{1}{3},\ \frac{8}{9} < m}$$

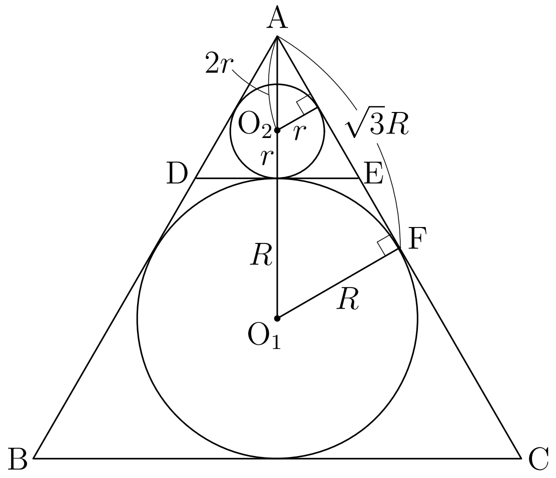
(答) キ. $-1 < m < 0$　ク. $m \leqq -1,\ 0 \leqq m < \dfrac{1}{3},\ \dfrac{8}{9} < m$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 問 A. (1) 円 $\mathrm{O_1}$ の半径を R，$\mathrm{O_1}$ と辺 AC の接点を F とすると，
△$\mathrm{FAO_1}$ は $\angle\mathrm{A} = 30^\circ$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{AF} = \sqrt{3}R,\quad \mathrm{AO_1} = 2R$$

F は AC の中点であるから，$\sqrt{3}R = \dfrac{a}{2}$ より　$R = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$　$\cdots$①

したがって，円 $\mathrm{O_1}$ の面積は　$\pi R^2 = \pi\left(\dfrac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{\pi a^2}{12}}$



(2) 円 $\mathrm{O_2}$ の半径を r とすると，$\mathrm{AO_1} = 2R$ から

$$2r + r + R = 2R \quad \text{これを解いて} \quad r = \frac{1}{3}R$$

よって，① から　$r = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a}{6\sqrt{3}}$

したがって，円 $\mathrm{O_2}$ の面積は　$\pi r^2 = \pi\left(\dfrac{a}{6\sqrt{3}}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{\pi a^2}{108}}$

問 B.
$$\begin{aligned}2\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 1 &= 2(1-\cos^2\theta) - 2\sqrt{3}\cos\theta - 1\\ &= -2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta + 1\end{aligned}$$

$\cos\theta = x$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき $-1 \leqq x \leqq 1$ であり

$$f(\theta) = -2x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 1$$

よって $f(\theta) = -2\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{2}$

したがって $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\boldsymbol{\theta = 150^\circ}$ **で** **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

$x = 1$ すなわち $\boldsymbol{\theta = 0^\circ}$ **で** **最小値** $\boldsymbol{-1-2\sqrt{3}}$