平成１８年度　熊本リハビリテーション学院一般後期入学試験問題
数学I・数学A(平成18年2月18日)

第１問 (1) 次の$\boxed{\text{〔問1〕}}$～$\boxed{\text{〔問3〕}}$に適するものを 1 ～ 0 から選べ。

$A = \dfrac{1}{3+\sqrt{3}}$, $B = \dfrac{1}{3-\sqrt{3}}$ のとき，$A+B = \boxed{\text{〔問1〕}}$, $A \times B = \boxed{\text{〔問2〕}}$,
$A^3 + B^3 = \boxed{\text{〔問3〕}}$ である。

1 $\dfrac{1}{6}$　2 $\dfrac{2}{9}$　3 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　4 $\dfrac{1}{3}$　5 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6 $\dfrac{1}{2}$　7 $\dfrac{2+2\sqrt{3}}{9}$　8 $\dfrac{2}{3}$　9 $\dfrac{5}{6}$　0 1

(2) 次の$\boxed{\text{〔問4〕}}$～$\boxed{\text{〔問6〕}}$に適するものを 1 ～ 0 から選べ。

自然数 n，r に対して，${}_n\mathrm{C}_r$ および ${}_n\mathrm{P}_r$ は異なる n 個のものから異なる r 個のものを取り出す順列の総数および組合せの総数を表すとする。
${}_n\mathrm{C}_2 = 15$ のとき $n = \boxed{\text{〔問4〕}}$, ${}_7\mathrm{C}_r = {}_7\mathrm{C}_{r-1}$ のとき $n = \boxed{\text{〔問5〕}}$,
${}_n\mathrm{P}_3 = 3 \times {}_n\mathrm{P}_2$ のとき $n = \boxed{\text{〔問6〕}}$ である。

1 2　2 3　3 4　4 5　5 6

6 8　7 9　8 10　9 11　0 12

第２問 1000 より大きくて 2000 以下の整数を 1 つ選ぶとき，次の$\boxed{\text{〔問7〕}}$～$\boxed{\text{〔問10〕}}$に適するものを 1 ～ 0 から選べ。

$\boxed{\text{〔問7〕}}$ 4 の倍数を選ぶ確率を求めよ。

$\boxed{\text{〔問8〕}}$ 6 の倍数を選ぶ確率を求めよ。

$\boxed{\text{〔問9〕}}$ 4 の倍数かつ 6 の倍数であるものを選ぶ確率を求めよ。。

$\boxed{\text{〔問10〕}}$ 4 の倍数または 6 の倍数を選ぶ確率を求めよ。

1 $\dfrac{167}{1000}$　2 $\dfrac{417}{1000}$　3 $\dfrac{1}{2}$　4 $\dfrac{333}{2000}$　5 $\dfrac{83}{1000}$

6 $\dfrac{167}{500}$　7 $\dfrac{9}{125}$　8 $\dfrac{83}{2000}$　9 $\dfrac{1}{4}$　0 $\dfrac{167}{200}$

第 3 問 次の $\boxed{\textbf{〔問 11〕}}$，$\boxed{\textbf{〔問 12〕}}$ に適するものを 1 〜 0 から選べ。

方程式 $x^2 - 5 = x + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ の解を α，β $(\alpha > \beta)$ とすると，

$\alpha = \boxed{\textbf{〔問 11〕}}$，$\beta = \boxed{\textbf{〔問 12〕}}$ である。

1 -3　2 $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$　3 -1　4 $-\dfrac{1}{2}$　5 $\dfrac{1}{2}$

6 1　7 $\dfrac{1+\sqrt{21}}{\sqrt{2}}$　8 2　9 3　0 4

第 4 問 k を正の定数とし，△ABC の辺 AB，AC の長さを x，y とする。

次の $\boxed{\textbf{〔問 13〕}}$〜$\boxed{\textbf{〔問 15〕}}$ に適するものを 1 〜 0 から選べ。

(1) $x + y = k$ のとき，△ABC の面積の最大値が $\dfrac{\sqrt{3}k^2}{16}$ となるような ∠A の値を求めると $\angle\mathrm{A} = \boxed{\textbf{〔問 13〕}}^\circ$ である。ただし，$0^\circ < \angle\mathrm{A} \leqq 90^\circ$ とする。

(2) ∠A が (1) で求めた値のとき，∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とし，線分 AD の長さを k で表すと $\mathrm{AD} = \boxed{\textbf{〔問 14〕}}\,k$ である。

(3) △ABC に外接する円の半径 R を k で表すと，$R = \boxed{\textbf{〔問 15〕}}\,k$ である。

1 30　2 45　3 60　4 75　5 90

6 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　7 $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$　8 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　9 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　0 $\sqrt{3}$

解答例

第 1 問 (1) $A+B=\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{(3-\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\dfrac{6}{9-3}=\mathbf{1}$

$A\times B=\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{1\times 1}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\dfrac{1}{9-3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

上の 2 式から $\quad A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$

$$=1^3-3\times\frac{1}{6}\times 1=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) $${}_n\mathrm{C}_2=15$$

左辺を変形して $\quad \dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}=15$

整理して $\quad n^2-n-30=0$

すなわち $\quad (n+5)(n-6)=0$

$n\geqq 2$ であるから $\quad \boldsymbol{n=6}$

${}_7\mathrm{C}_r={}_7\mathrm{C}_{r-1}$ を満たすとき

$\quad r=r-1$ または $r+(r-1)=7$

$r\neq r-1$ であるから $r+(r-1)=7$ を解いて $\quad \boldsymbol{r=4}$

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{P}_3&=3\times{}_n\mathrm{P}_2\\ n(n-1)(n-2)&=3\times n(n-1)\\ n^3-3n^2+2n&=3n^2-3n\end{aligned}$$

整理して $\quad n^3-6n^2+5n=0$

したがって $\quad n(n-1)(n-5)=0$

$n\geqq 3$ であるから $\quad \boldsymbol{n=5}$

	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	問 6
正解	0	1	6	5	3	4
配点	6 点	7 点	7 点	7 点	6 点	7 点

第 2 問 4 の倍数は

$$4{\cdot}251,\ 4{\cdot}252,\ 4{\cdot}253,\ \cdots,\ 4{\cdot}500$$

の 250 個であるから $(500 - 251 + 1 = 250)$，4 の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{250}{1000} = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \quad \cdots \boxed{\textbf{〔問 7〕}}$$

6 の倍数は

$$6{\cdot}167,\ 6{\cdot}168,\ 6{\cdot}169,\ \cdots,\ 6{\cdot}333$$

の 167 個であるから $(333 - 167 + 1 = 167)$，6 の倍数を選ぶ確率は

$$\boldsymbol{\frac{167}{1000}} \quad \cdots \boxed{\textbf{〔問 8〕}}$$

4 の倍数かつ 6 の倍数は

$$12{\cdot}84,\ 12{\cdot}85,\ 12{\cdot}86,\ \cdots,\ 12{\cdot}166$$

の 83 個であるから $(166 - 84 + 1 = 83)$，4 の倍数かつ 6 の倍数を選ぶ確率は

$$\boldsymbol{\frac{83}{1000}} \quad \cdots \boxed{\textbf{〔問 9〕}}$$

したがって，4 の倍数または 6 の倍数を選ぶ確率は

$$\frac{250}{1000} + \frac{167}{1000} - \frac{83}{1000} = \frac{334}{1000} = \boldsymbol{\frac{167}{500}} \quad \cdots \boxed{\textbf{〔問 10〕}}$$

	問 7	問 8	問 9	問 10
正解	9	1	5	6
配点	6 点	7 点	6 点	7 点

和事象の確率

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

第3問 $\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|$ であるから，方程式

$$x^2-5=x+|2x-1|$$

を解けばよい．

$\underline{x \geqq \frac{1}{2} \text{ のとき}}$ 　　$|2x-1|=2x-1$ であるから

$$x^2-5=x+(2x-1)$$

整理して　　$x^2-3x-4=0$

ゆえに　　$(x+1)(x-4)=0$

$x \geqq \frac{1}{2}$ に注意して　　$x=4$

$\underline{x < \frac{1}{2} \text{ のとき}}$ 　　$|2x-1|=-(2x-1)=-2x+1$ であるから

$$x^2-5=x+(-2x+1)$$

整理して　　$x^2+x-6=0$

ゆえに　　$(x-2)(x+3)=0$

$x < \frac{1}{2}$ に注意して　　$x=-3$

したがって，求める解 α，β は $(\alpha > \beta)$,

$$\boldsymbol{\alpha=4,\ \beta=-3}$$

	問 11	問 12
正解	0	1
配点	6 点	7 点

$$\boldsymbol{\sqrt{a^2}=|a|,\qquad |a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}}$$

第4問 (1) △ABC の面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}xy\sin A\quad\cdots①$

$y=k-x$ であるから

$$\begin{aligned} xy &= x(k-x) \\ &= -(x^2-kx) \\ &= -\left\{\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2\right\} \\ &= -\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{4}\quad\cdots② \end{aligned}$$

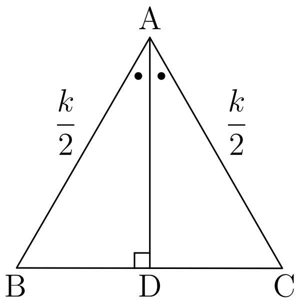
①，② より S は $x=y=\dfrac{k}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{k^2}{8}\sin A$ をとる．

したがって，$\dfrac{k^2}{8}\sin A=\dfrac{\sqrt{3}k^2}{16}$ より　$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<\angle\mathrm{A}\leqq 90^\circ$ であるから　　　$\boldsymbol{\angle\mathrm{A}=60^\circ}$

(2) (1) の結果から，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ であるから，△ABC は正三角形である．
∠A の 2 等分線 AD は，辺 BC に下ろした垂線である．右の図から

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\cos 30^\circ=\frac{k}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}k}$$



(3) 正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 60^\circ}=2R$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{BC}}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{2}\times\frac{k}{2}\div\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{k}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{k}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}k} \end{aligned}$$

	問 13	問 14	問 15
正解	3	6	8
配点	7 点	7 点	7 点