

令和7年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 薬, 工, 医保健(放射線, 検査), 情報融合[理系])
令和7年2月25日

問題 1 2 3 4

1 次のように定められた複素数の数列 $\{z_n\}$ を考える。

$$z_1 = 1, \quad z_{n+1} = (1+i)z_n + (2+i)\overline{z_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし, i は虚数単位であり, $\overline{z_n}$ は z_n と共役な複素数である。以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha_n = z_n + \overline{z_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくとき, 数列 $\{\alpha_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $\beta_n = (2-i)z_n - (2+i)\overline{z_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくとき, 数列 $\{\beta_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{z_n\}$ の一般項を求めよ。

2 放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 $(0, -4)$ を通り C に接する直線のうち, 傾きが正のものを ℓ_1 , 負のものを ℓ_2 とする。 C , ℓ_1 , ℓ_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。
- (2) $a > 0$, $b < 0$ とし, 直線 $\ell: y = ax + b$ は C の接線であるとする。 C , x 軸, ℓ で囲まれる部分の面積が (1) で求めた面積に等しいとする。 a , b を求めよ。
- (3) 点 (p, q) に対し, (p, q) を通る2つの直線 m_1 , m_2 が C の異なる接線であり, C , m_1 , m_2 で囲まれる部分の面積が (1) で求めた面積に等しいとする。このような (p, q) の軌跡を求めよ。

3 実数 $a > 0$ に対し、座標平面の点の集合 X_a を

$$X_a = \left\{ (m, n) \mid m, n \text{ は } m^2 a + \frac{n^2}{a} \leq 25 \text{ を満たす正の整数} \right\}$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) X_1 の要素の個数を求めよ。
- (2) 正の整数 m に対し、点 $(m, 1)$ はどのような $a > 0$ に対しても X_a に含まれないとする。このような m の最小値を求めよ。
- (3) 座標平面の点の集合 X を

$$X = \{(m, n) \mid \text{ある } a > 0 \text{ に対し } (m, n) \in X_a \text{ となる}\}$$

で定める。 X の要素の個数を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $\log(x+3) < x + \log 3$ を証明せよ。
- (2) n を 2 以上の整数とすると、不等式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

を証明せよ。

- (3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \left(3 + \frac{1}{n+1}\right) a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ を用いてよい。

解答例

- 1** (1) (*) $z_{n+1} = (1+i)z_n + (2+i)\overline{z_n}$ より ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$z_{n+1} = (1+i)z_n + (2+i)\overline{z_n}$$

$$\overline{z_{n+1}} = (1-i)\overline{z_n} + (2-i)z_n$$

上の2式の辺々を加えると

$$z_{n+1} + \overline{z_{n+1}} = 3(z_n + \overline{z_n}) \quad \text{すなわち} \quad \alpha_{n+1} = 3\alpha_n$$

$$\alpha_1 = z_1 + \overline{z_1} = 1 + 1 = 2 \text{ および上の第2式から } \alpha_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$(2) (*) \text{ より } \begin{aligned} (2-i)z_{n+1} &= (2-i)\{(1+i)z_n + (2+i)\overline{z_n}\} \\ &= (3+i)z_n + 5\overline{z_n} \end{aligned}$$

$$\text{上式から } (2+i)\overline{z_{n+1}} = (3-i)\overline{z_n} + 5z_n$$

上の第1式から第2式を引くと

$$(2-i)z_{n+1} - (2+i)z_{n+1} = -\{(2-i)z_n - (2+i)\overline{z_n}\}$$

$$\text{すなわち } \beta_{n+1} = -\beta_n$$

$$\beta_1 = (2-i)z_1 - (2+i)\overline{z_1} = (2-i) \cdot 1 - (2+i) \cdot 1 = -2i$$

$$\text{したがって } \beta_n = -2i \cdot (-1)^{n-1}$$

- (3) $\alpha_n = z_n + \overline{z_n}$, $\beta_n = (2-i)z_n - (2+i)\overline{z_n}$ より, $\overline{z_n}$ を消去すると

$$\begin{aligned} (2+i)\alpha_n + \beta_n &= (2+i)(z_n + \overline{z_n}) + \{(2-i)z_n - (2+i)\overline{z_n}\} \\ &= 4z_n \end{aligned}$$

(1), (2) の結果から

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{4}\{(2+i)\alpha_n + \beta_n\} \\ &= \frac{1}{4}\{(2+i) \cdot 2 \cdot 3^{n-1} - 2i \cdot (-1)^{n-1}\} \\ &= 3^{n-1} + \frac{3^{n-1} - (-1)^{n-1}}{2}i \end{aligned}$$



- 2 (1) $y = x^2$ より $y' = 2x$

C 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

すなわち $y = 2tx - t^2 \quad \dots (*)$

これが点 $(0, -4)$ を通るとき

$$-4 = 2t \cdot 0 - t^2 \quad \text{ゆえに} \quad t = \pm 2$$

ℓ_1, ℓ_2 の傾きがそれぞれ正, 負であるから, $(*)$ にそれぞれ $t = 2, -2$ を代入して

$$\ell_1 : y = 4x - 4, \quad \ell_2 : y = -4x - 4$$

ℓ_1 と ℓ_2 は y 軸に関して対称であり, C も y 軸に関して対称であるから, 求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{2} &= \int_0^2 \{x^2 - (4x - 4)\} dx \\ &= \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \frac{1}{3} \left[(x - 2)^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって, 求める面積は $S_1 = \frac{16}{3}$

- (2) $(*)$ の x 軸との交点の x 座標は $(t > 0)$

$$2tx - t^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{t}{2}$$

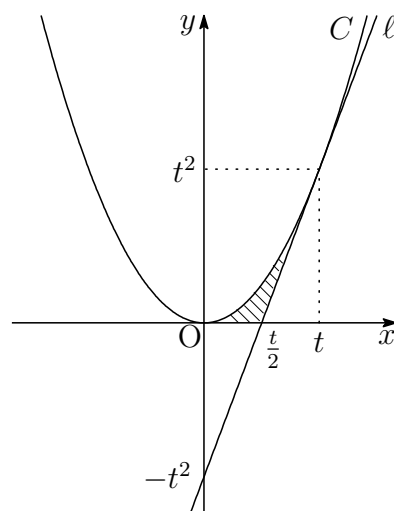
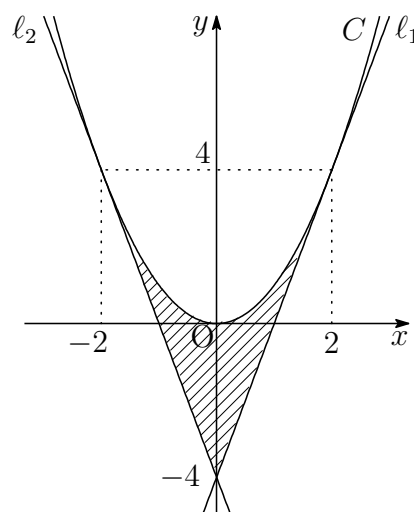
C, x 軸, ℓ で囲まれる部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^t x^2 dx - \frac{1}{2} \left(t - \frac{t}{2} \right) \cdot t^2 \\ &= \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{4} t^3 = \frac{1}{12} t^3 \end{aligned}$$

$S_2 = S_1$ であるから

$$\frac{1}{12} t^3 = \frac{16}{3} \quad \text{ゆえに} \quad t = 4$$

$(*)$ に $t = 4$ を代入して $y = 8x - 16$ よって $a = 8, b = -16$



- (3) $C: x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}y$ であるから、点 $P(p, q)$ を極とする C の極線 ℓ は

$$px = 2 \cdot \frac{1}{4}(y + q) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - q$$

$C: y = x^2$ と極線 $y = 2px - q$ の共有点の x 座標を α, β とすると、 α, β は、2 次方程式

$$x^2 = 2px - q \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2px + q = 0$$

の解であるから、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2p, \quad \alpha\beta = q \quad (**)$$

C 上の 2 点 $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$ における接線をそれぞれ m_1, m_2 とすると、(*) より

$$m_1: y = 2\alpha x - \alpha^2, \quad m_2: y = 2\beta x - \beta^2$$

m_1 と m_2 の交点の x 座標は $(\alpha \neq \beta)$

$$2\alpha x - \alpha^2 = 2\beta x - \beta^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

C, m_1, m_2 で囲まれた部分の面積を S_3 とすると

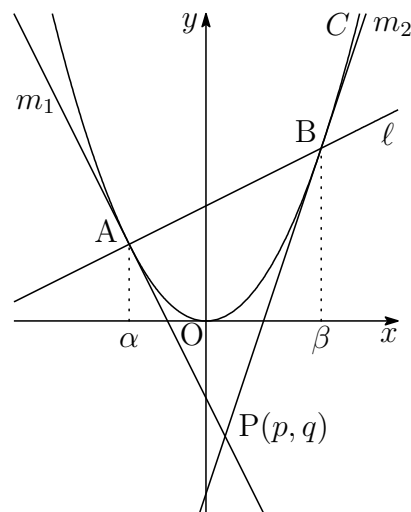
$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\} dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{x^2 - (2\beta x - \beta^2)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x - \alpha)^2 dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{1}{3} \left[(x - \beta)^3 \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

$$S_3 = S_1 \text{ であるから } \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{16}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 4$$

$$(**) \text{ より } \beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{(2p)^2 - 4q} = 2\sqrt{p^2 - q}$$

$$\text{したがって } 2\sqrt{p^2 - q} = 4 \quad \text{すなわち} \quad q = p^2 - 4$$

$$\text{よって、求める軌跡の方程式は} \quad \mathbf{y = x^2 - 4}$$



極線の方程式

2次曲線に対して、 $P(x_1, y_1)$ から2本の接線を引けるとし、その接点を A, B とおく．直線 AB を極 P に対する極線という．

- 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の極線の方程式は $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$
- 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の極線の方程式は $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$
- 放物線 $x^2 = 4py$ の極線の方程式は $x_1x = 2p(y + y_1)$
- 放物線 $y^2 = 4px$ の極線の方程式は $y_1y = 2p(x + x_1)$

注意 2次曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式と一致している．

円の極線

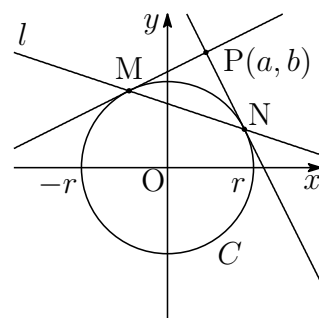
円 $C : x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $P(a, b)$ から C に引いた2本の接線の接点を $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ とする．2本の接線

$$x_1x + y_1y = r^2, \quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $P(a, b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2, \quad ax_2 + by_2 = r^2$$

上の2式から直線 $l : ax + by = r^2$ は2点 M, N を通る．
このとき、 l を P を極とする C の極線という．

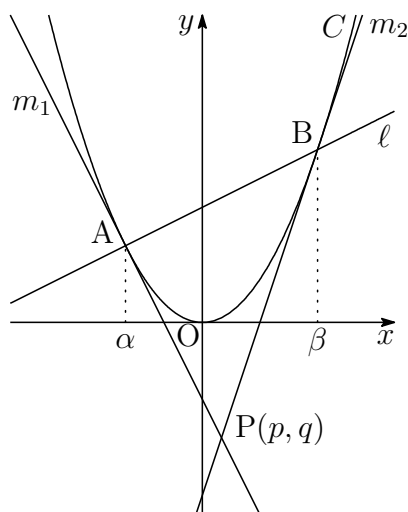


補足 C の極 (p, q) に対する極線 $\ell: y = 2px - q$, すなわち, $y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$ と C で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(\alpha + \beta)x - \alpha\beta - x^2\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

(3) の結果から $S_3 = \frac{1}{2}S$

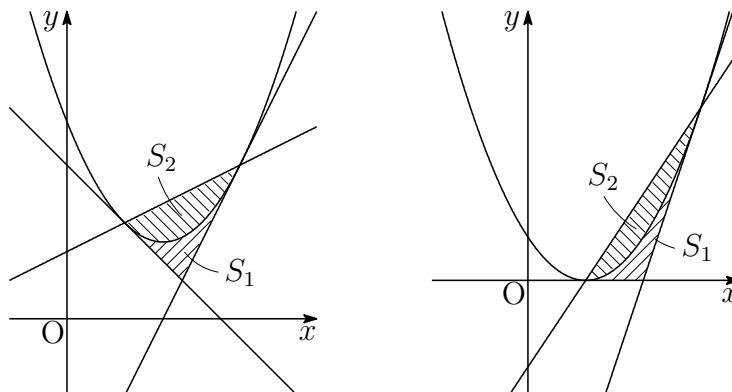
また, (**) の第 1 式から $p = \frac{\alpha + \beta}{2}$



放物線と放物線の 2 本の接線で囲まれた図形の面積 S_1 と, その 2 つの接点を結ぶ直線と放物線で囲まれた図形の面積 S_2 の比は,

$$S_1 : S_2 = 1 : 2$$

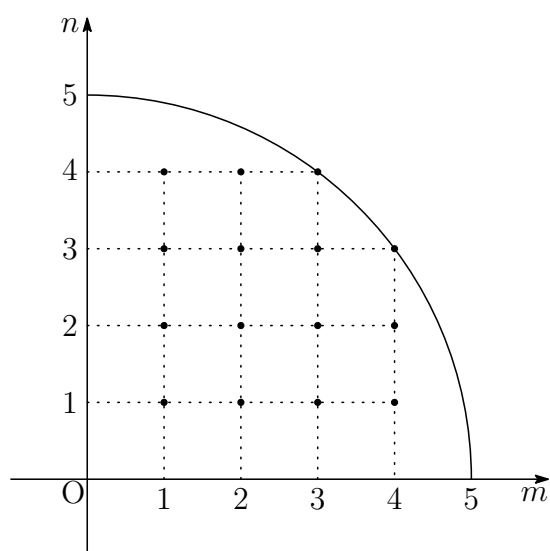
2 本の接線の交点の x 座標は, 2 つの接点の中点の x 座標と等しい.



- 3** (1) $X_1 = \{(m, n) \mid m, n \text{ は } m^2 + n^2 \leq 25 \text{ を満たす正の整数}\}$ であるから,
 $m = 1, 2, 3, 4$ の場合について調べればよい.

- $m = 1, 2, 3$ のとき, $n = 1, 2, 3, 4$
- $m = 4$ のとき, $n = 1, 2, 3$

よって $3 \times 4 + 3 = 15$ 個



- (2) 点 $(m, 1)$ はどのような $a > 0$ に対しても X_a に含まれないから

$$(*) \quad m^2 a + \frac{1}{a} > 25$$

$m > 0$, $a > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$m^2 a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{m^2 a \cdot \frac{1}{a}} = 2m$$

これから, $(*)$ の左辺の最小値 $2m$ であるから (m は自然数)

$$2m > 25$$

これを満たす最小の整数 m は **13**

(3) $m > 0$, $n > 0$, $a > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$25 \geq m^2 a + \frac{n^2}{a} \geq 2\sqrt{m^2 a \cdot \frac{n^2}{a}} = 2mn$$

m , n は正の整数であるから

$$mn \leq 12$$

m は 12 以下の正の整数であるから

- $m = 1$ のとき, $n = 1, 2, \dots, 12$
- $m = 2$ のとき, $n = 1, 2, \dots, 6$
- $m = 3$ のとき, $n = 1, 2, 3, 4$
- $m = 4$ のとき, $n = 1, 2, 3$
- $m = 5, 6$ のとき, $n = 1, 2$
- $m = 7, 8, 9, 10, 11, 12$ のとき, $n = 1$

よって, 求める個数は

$$12 + 6 + 4 + 3 + 2 \times 2 + 6 = \mathbf{35} \text{ (個)}$$



$$\boxed{4} \quad (1) \quad x > 0 \text{ のとき} \quad \log(x+3) - \log 3 = \left[\log t \right]_3^{x+3} = \int_3^{x+3} \frac{dt}{t} \\ < \int_3^{x+3} \frac{dt}{3} = \left[\frac{t}{3} \right]_3^{x+3} = \frac{x}{3} < x$$

よって $x > 0$ のとき $\log(x+3) < x + \log 3$

$$(2) \quad k \leq x < k+1 \text{ のとき, } \frac{1}{k+1} < \frac{1}{x} \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \left[\log x \right]_k^{k+1} = \log(k+1) - \log k$$

$$n \geq 2 \text{ であるから} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \{\log(k+1) - \log k\} = \log n$$

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < 1 + \log n \quad \text{すなわち} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

$$(3) \quad a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \left(3 + \frac{1}{n+1} \right) a_n \text{ であるから, } a_n > 0 \text{ に注意して}$$

$$(*) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 + \frac{1}{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(3 + \frac{1}{k+1} \right) > \prod_{k=1}^{n-1} 3 = 3^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a_1} > 3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n > a_1 \cdot 3^{n-1} > 3^n \quad \text{すなわち} \quad \sqrt[n]{a_n} > 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(1) \text{ の結論により} \quad \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log \left(3 + \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{n+1} + \log 3$$

$$\text{したがって} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{a_{k+1}}{a_k} < \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} + \log 3 \right) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + (n-1) \log 3$$

$$(2) \text{ の結論を利用すると} \quad \log a_n - \log a_1 < 1 + \log(n-1) + (n-1) \log 3$$

$$a_1 = 4 \text{ より} \quad \frac{1}{n} \log a_n < \frac{1 + \log 4}{n} + \frac{\log(n-1)}{n} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \log 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{a_n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 + \log 4}{n} + \frac{\log(n-1)}{n} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \log 3 \right\} = \log 3$$

$$\text{したがって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から, はさみうちの原理により} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$$

補足 $g(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とすると $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$

$g(1) = 2$, $x > 1$ において $g'(x) > 0$ であるから

$x > 1$ において $g(x) > g(1) = 2 > 0$ ゆえに $2\sqrt{x} > \log x$

$x > 1$ のとき $0 < \frac{\log x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ であるから, はさうみちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

