令和６年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)，情報融合 [理系])
令和６年２月25日

問題 1 2 3 4

1 e を自然対数の底とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = e^x$ 上の点 $(a,\ e^a)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接線の傾きを p，y 切片を q とする。q を p の式で表せ。

(3) (2) で求めた p の式を $f(p)$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 ℓ_1 および点 $(e,\ f(e))$ における接線 ℓ_2 の方程式を求めよ。

(4) (3) で求めた 2 本の接線 ℓ_1，ℓ_2 および曲線 $y = f(x)$ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

2 平面上に点 O を中心とする半径 2 の円 D がある。円 D の周上に異なる 3 点 A，B，C をとる。ただし，直線 AB，BC，CA は点 O を通らないとする。2 点 A，B における円 D のそれぞれの接線の交点を P とする。同様に，2 点 B，C における円 D のそれぞれの接線の交点を Q，2 点 C，A における円 D のそれぞれの接線の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{4}{4 + \vec{a}\cdot\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$ が成り立つことを示せ。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\sqrt{3}$ のとき，線分 OP の長さを求めよ。

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = -2\sqrt{3}$ かつ $\vec{b}\cdot\vec{c} = 2$ のとき，$\triangle$PQR の面積を求めよ。

3 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ とする。$\mathrm{AB}=1$，$\angle\mathrm{BAC}=3\theta$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ について，辺 BC の中点を D としたとき，$\angle\mathrm{BAD}=2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{AC}=2\cos\theta$ であることを示せ。

(2) BC を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

4 実数からなる数列 $\{a_n\}$ は $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$a_{n+1}=\begin{cases}3^{n-1} & (a_n<1 \text{ のとき})\\ \log_3 a_n & (a_n\geqq 1 \text{ のとき})\end{cases}$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 2 以上の自然数 n に対して $a_n\geqq 0$ であることを示せ。

(2) $a_4+a_5=1$ のとき，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(3) $a_4+a_5=1$ のとき，a_1 のとりうる値の範囲の最大値と最小値ををそれぞれ M_1，m_1 とし，a_2 のとりうる値の範囲の最大値と最小値をそれぞれ M_2，m_2 とする。このとき，$m_1+m_2+\log_3 M_1M_2$ の値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=e^x$ を微分すると　$y'=e^x$

したがって，曲線 $y=e^x$ 上の点 $(a,\ e^a)$ における接線の方程式は

$$y-e^a=e^a(x-a)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=e^a x+e^a(1-a)}$$

(2) (1) の結果から　$p=e^a,\quad q=e^a(1-a)$

$e^a=p,\ a=\log p$ より　　$\boldsymbol{q=p(1-\log p)}$

(3) (2) の結果から　$f(x)=x(1-\log x)$　これを微分すると　$f'(x)=-\log x$

$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-a(1-\log a)=-(x-a)\log a\quad \text{ゆえに}\quad y=-x\log a+a$$

$\ell_1,\ \ell_2$ は，上式の a にそれぞれ $1,\ e$ を代入したものであるから

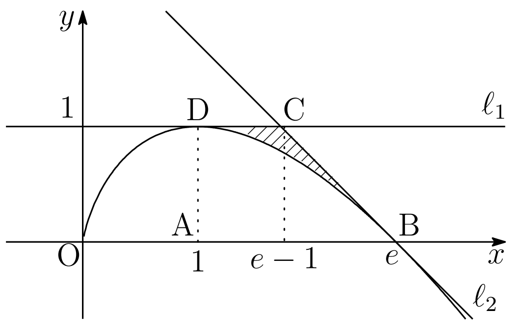
$$\boldsymbol{\ell_1: y=1,\quad \ell_2: y=-x+e}$$

(4) $f''(x)=-\dfrac{1}{x}<0$ から，$\ell_1,\ \ell_2$ は曲線 $y=f(x)$ の上側にある．ここで

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx=\int x(1-\log x)\,dx&=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'(1-\log x)\,dx\\&=\frac{x^2}{2}(1-\log x)-\int\frac{x^2}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)dx\\&=x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log x\right)+C\quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

求める面積を S とすると，下の図から

$$\begin{aligned}S&=\text{台形 ABCD}-\int_1^e f(x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\{(e-2)+(e-1)\}-\left[\,x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log x\right)\,\right]_1^e\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{4}(e^2-4e+3)}\end{aligned}$$



2 (1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$0<\angle\mathrm{AOB}<\pi$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$ より

$$-4<\vec{a}\cdot\vec{b}<4 \quad \cdots ①$$

$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ であるから

$$\vec{a}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0,\quad \vec{b}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{p}=4,\ \vec{b}\cdot\vec{p}=4$$

$\vec{a},\ \vec{b}$ は，1 次独立であるから，$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とすると ($x,\ y$ は実数)

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=4\\ \vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=4\end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases}4x+(\vec{a}\cdot\vec{b})y=4\\ (\vec{a}\cdot\vec{b})x+4y=4\end{cases}$$

① に注意してこれを解くと　$x=y=\dfrac{4}{4+\vec{a}\cdot\vec{b}}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{4+\vec{a}\cdot\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$ が成立する．

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=2(4+\vec{a}\cdot\vec{b})$ であるから，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{|\vec{a}+\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$$

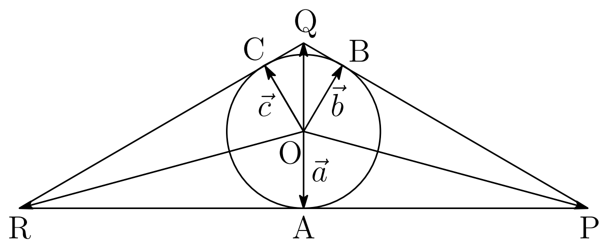
したがって　$\mathrm{OP}=\dfrac{8}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{8}{\sqrt{8+2\vec{a}\cdot\vec{b}}}=\dfrac{8}{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}$

$$=\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\mathbf{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

別解 $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\cdot 2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに　$\angle\mathrm{AOB}=150^\circ$

$\angle\mathrm{AOP}=75^\circ$ であるから

$$\mathrm{OP}=\frac{\mathrm{OA}}{\cos 75^\circ}=2\times\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\mathbf{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$



(3) 与えられた条件より，$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\cdot 2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=150^\circ\quad \text{ゆえに}\quad \angle\mathrm{QPR}=\angle\mathrm{QRP}=30^\circ$$

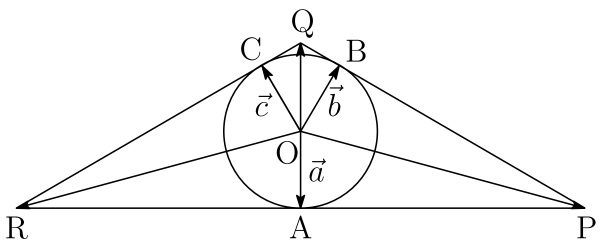
(2) と同様に $\qquad \mathrm{OQ}=\dfrac{8}{\sqrt{8+2\vec{b}\cdot\vec{c}}}=\dfrac{8}{\sqrt{8+2\cdot 2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\triangle$QRP は，PQ $=$ RQ の二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AQ}=\mathrm{OA}+\mathrm{OQ}=2+\frac{4}{\sqrt{3}},$$
$$\mathrm{PR}=2\mathrm{AP}=2\sqrt{3}\mathrm{AQ}$$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AQ}\cdot 2\sqrt{3}\mathrm{AQ}=\sqrt{3}\mathrm{AQ}^2$$
$$=\sqrt{3}\left(2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\mathbf{16}+\frac{\mathbf{28}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$



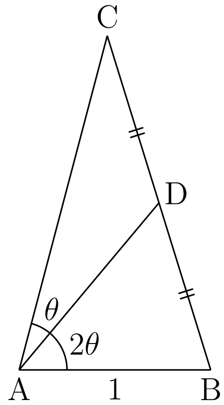
補足 $\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\dfrac{2}{2\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$ より，$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$

$\angle\mathrm{BOQ}=30^\circ$ であるから

$$\mathrm{OQ}=\frac{\mathrm{OB}}{\cos 30^\circ}=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{BD}=\mathrm{CD}$ より，$\triangle\mathrm{ABD}=\triangle\mathrm{ACD}$ であるから



$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta$$

したがって　　$\mathrm{AB}\sin 2\theta=\mathrm{AC}\sin\theta$

$\mathrm{AB}=1$ より

$$\mathrm{AC}=\frac{\mathrm{AB}\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos 3\theta\\&=1^2+(2\cos\theta)^2-2\cdot1\cdot2\cos\theta\cdot(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\\&=-16\cos^4\theta+16\cos^2\theta+1\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{BC}=\sqrt{-16\cos^4\theta+16\cos^2\theta+1}}$

(3) (2) の結果から

$$\mathrm{BC}^2=-16\left(\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)^2+5$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ に注意して

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}\ \text{のとき，最大値}\ \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_m < 0$ となる $m \geqq 2$ が存在すると仮定すると

$$a_m = \log_3 a_{m-1} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{m-1} < 1$$

したがって，$a_m = 3^{m-2} > 0$ となり，矛盾を生じる．

よって，2 以上の自然数 n に対して $a_n \geqq 0$ である．

(2) (1) の結論から　$a_4 \geqq 0$，$a_5 \geqq 0$

$a_4 + a_5 = 1$ であるから

$$a_4 = 1 - a_5 \geqq 0, \quad a_5 = 1 - a_4 \geqq 0$$

したがって　$0 \leqq a_4 \leqq 1, \quad 0 \leqq a_5 \leqq 1 \quad \cdots (*)$

$a_4 < 1$ とすると，$a_5 = 3^3$ となり，$(*)$ に反する．

したがって　$a_4 = 1, \quad a_5 = \log a_4 = 0$

$a_3 < 1$ とすると，$a_4 = 3^2 = 9$ となり，不適．

$a_3 \geqq 1$ であるから　$a_4 = \log_3 a_3 = 1$　ゆえに　$a_3 = 3$

よって　$\boldsymbol{a_3 = 3, \ a_4 = 1, \ a_5 = 0}$

(3) $0 \leqq a_2 < 1$ のとき，$a_3 = 3^1 = 3$ となり，(2) の結果を満たす．

$a_2 \geqq 1$ のとき，$a_3 = \log_3 a_2 = 3$　ゆえに　$a_2 = 27$

したがって，a_2 の取り得る値の範囲は

$$0 \leqq a_2 < 1, \ a_2 = 27 \qquad \text{(A)}$$

$a_1 < 1$ とすると，$a_2 = 3^0 = 1$ となり，(A) に反するので，不適．

$a_1 \geqq 1$ とすると，$a_2 = \log_3 a_1$ より

$$0 \leqq \log_3 a_1 < 1, \ \log_3 a_1 = 27$$

したがって，a_1 の取り得る値の範囲は

$$1 \leqq a_1 < 3, \ a_1 = 3^{27} \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) より　$m_1 = 1, \ M_1 = 3^{27}, \ m_2 = 0, \ M_2 = 27$

よって　$m_1 + m_2 + \log_3 M_1 M_2 = 1 + 0 + \log_3 3^{27} \cdot 27 = \mathbf{31}$ ■