令和５年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，薬，工，医保健(放射線，検査)) 令和５年２月25日

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{8}, \qquad (4n^2-1)(a_n - a_{n+1}) = 8(n^2-1)a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) $a_n \neq 0$ を示せ。

(3) $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$ を n の式で表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる。積が 12 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_2，p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする。出た目の数の積が n 回目にはじめて 12 となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\alpha,\ \beta$ を複素数とし，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α)，B(β) が三角形をなすとする．点 A を点 O を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を P，点 O を点 B を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を Q，点 B を点 A を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を R とする。△POA，△QBO，△RAB の重心をそれぞれ G，H，I とする。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 P，Q，R を表す複素数のそれぞれを $\alpha,\ \beta$ を用いて表せ。

(2) 3 点 G，H，I を表す複素数のそれぞれを $\alpha,\ \beta$ を用いて表せ。

(3) 3 点 G，H，I が三角形をなすとき，△GHI が正三角形かどうか判定せよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ t は正の実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = 2tx^2e^{-tx^2}$ の極値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{t}} 4tx(1-tx^2)e^{-tx^2}\log x\,dx$ の値を t を用いて表せ。

(3) (2) で求めた値を $g(t)$ とおく。$1 < t < 4$ のとき，不等式

$$g(t) > (t^{\frac{5}{2}} - t^2 + 1)e^{-t^2} - e^{-t}$$

が成り立つことを示せ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $(*)$ $(4n^2-1)(a_n-a_{n+1})=8(n^2-1)a_na_{n+1}$

$(*)$ に $n=1,\ 2$ を代入すると

$$3(a_1-a_2)=0,\quad 15(a_2-a_3)=24a_2a_3$$

$a_1=\dfrac{1}{8}$ を上の第 1 式に代入して $\boldsymbol{a_2=\dfrac{1}{8}}$

これを第 2 式に代入すると

$$15\left(\frac{1}{8}-a_3\right)=24\cdot\frac{1}{8}a_3 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{a_3=\frac{5}{48}}$$

(2) (1) の結果に注意して，$k \geqq 3$ に対して，$a_n \neq 0\ (n=1,2,\cdots,k)$，$a_{k+1}=0$ と仮定し，$(*)$ に $n=k$ を代入すると

$$(4k^2-1)a_k=0$$

$4k^2-1\neq 0$ より，$a_k=0$ となり，矛盾．よって $a_n \neq 0$

(3) $(*)$ の両辺を $(4n^2-1)a_na_{n+1}$ で割ると

$$\boldsymbol{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{8(n^2-1)}{4n^2-1}}$$

(4) (3) の結果から $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2-3\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{2-3\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right\}$$
$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=2(n-1)-3\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから，$a_1=\dfrac{1}{8}$ を代入して整理すると

$$\frac{1}{a_n}=2n+3+\frac{3}{2n-1}=\frac{(2n+3)(2n-1)+3}{2n-1}=\frac{4n(n+1)}{2n-1}$$

よって $\boldsymbol{a_n=\dfrac{2n-1}{4n(n+1)}}$ ■

$\boxed{2}$ (1) 2 回投げて出た目の数の積が 12 となるのは，出た目が $\{2,\ 6\}$, $\{3,\ 4\}$ であるから

$$p_2 = \frac{2!}{1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 2 = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

3 回投げて出た目の数の積が 12 となるのは，出た目が $\{1,\ 2,\ 6\}$，$\{1,\ 3,\ 4\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$ であるから

$$p_3 = \frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 2 + \frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{5}{72}}$$

(2) n 回の目の出方で，1 以外の目の出方は $\{2,\ 6\}$, $\{3,\ 4\}$, $\{2,\ 2,\ 3\}$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n!}{1!1!(n-2)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n \times 2 + \frac{n!}{2!1!(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{2n(n-1)}{6^n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2{\cdot}6^n} = \boldsymbol{\frac{n(n-1)(n+2)}{2{\cdot}6^n}} \end{aligned}$$

(3) $n-1$ 回目までの目の積が 12 で，n 回目で 1 の目が出る確率は

$$p_{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}p_{n-1}$$

これと (2) の結果から，求める確率は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{6}p_{n-1} &= \frac{n(n-1)(n+2)}{2{\cdot}6^n} - \frac{1}{6}{\cdot}\frac{(n-1)(n-2)(n+1)}{2{\cdot}6^{n-1}} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-1)(3n+2)}{2{\cdot}6^n}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{3}$ (1) $w = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$，$\mathrm{P}(z_p)$，$\mathrm{Q}(z_q)$，$\mathrm{R}(z_r)$ とおくと，条件から

$$\frac{z_p - 0}{\alpha - 0} = w, \quad \frac{z_q - \beta}{0 - \beta} = w, \quad \frac{z_r - \alpha}{\beta - \alpha} = w$$

ゆえに　$z_p = w\alpha$,　$z_q = (1-w)\beta$,　$z_r = (1-w)\alpha + w\beta$

$w = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ より

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha}\right),\ \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\beta}\right),\ \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\beta}\right)$$

(2) G(z_1)，H(z_2)，I(z_3) とおくと，条件から

$$(*)\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{3}(w\alpha + 0 + \alpha) = \dfrac{1+w}{3}\alpha \\ z_2 = \dfrac{1}{3}\{(1-w)\beta + \beta + 0\} = \dfrac{2-w}{3}\beta \\ z_3 = \dfrac{1}{3}\{(1-w)\alpha + w\beta + \alpha + \beta\} = \dfrac{2-w}{3}\alpha + \dfrac{1+w}{3}\beta \end{cases}$$

$w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ より

$$\mathbf{G}\left(\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}i}{6}\alpha}\right),\ \mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\beta}\right),\ \mathbf{I}\left(\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\alpha + \frac{3+\sqrt{3}i}{6}\beta}\right)$$

(3) (∗) より

$$z_2 - z_1 = \frac{1}{3}\{-(1+w)\alpha + (2-w)\beta\}$$
$$z_3 - z_1 = \frac{1}{3}\{(1-2w)\alpha + (1+w)\beta\}$$

ここで，$w^3 = -1$ より $(w \neq -1)$，$(w+1)(w^2 - w + 1) = 0$ であるから

$$w^2 - w + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad w^2 = w - 1 \quad \cdots ①$$

① に注意して

$$\begin{aligned} w(z_2 - z_1) &= \frac{1}{3}\{-(w+w^2)\alpha + (2w - w^2)\beta\} \\ &= \frac{1}{3}\{-(w+w-1)\alpha + (2w-w+1)\beta\} \qquad (**) \\ &= \frac{1}{3}\{(1-2w)\alpha + (1+w)\beta\} = z_3 - z_1 \end{aligned}$$

(∗∗) について，$z_2 - z_1 = 0$ のとき　$-(1+w)\alpha + (2-w)\beta = 0$

このとき，① により　$\beta = \dfrac{1+w}{2-w}\alpha = \dfrac{2w-w^2}{2-w}\alpha = w\alpha$

したがって，$\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha$ のとき，3 点 G，H，I は一致する．

よって　　$\boldsymbol{\beta \neq \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha}$ **のとき，△GHI は正三角形である．**

$\boldsymbol{\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha}$ **のとき，△GHI は正三角形でない．** ■

4 (1) $f(x)=2tx^2e^{-tx^2}$ を微分すると

$$f'(x)=2t\{2xe^{-tx^2}+x^2\cdot(-2tx)e^{-tx^2}\}$$
$$=4tx(1-tx^2)e^{-tx^2} \qquad (*)$$

$f'(x)=0$ とすると，$t>0$ より　$x=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

よって，$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ のとき，極大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{e}}$，$x=0$ のとき，極小値 $\mathbf{0}$

(2) $(*)$ より

$$与式=\int_1^{\sqrt{t}} f'(x)\log x\,dx=\Big[\,f(x)\log x\,\Big]_1^{\sqrt{t}}-\int_1^{\sqrt{t}} f(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=f(\sqrt{t})\log\sqrt{t}-\int_1^{\sqrt{t}} 2txe^{-tx^2}\,dx=2t^2e^{-t^2}\log\sqrt{t}+\Big[\,e^{-tx^2}\,\Big]_1^{\sqrt{t}}$$
$$=\boldsymbol{(t^2\log t+1)e^{-t^2}-e^{-t}}$$

(3) (2) の結果から　$g(t)=(t^2\log t+1)e^{-t^2}-e^{-t}$

$h(t)=(t^{\frac{5}{2}}-t^2+1)e^{-t^2}-e^{-t}$ とおくと

$$g(t)-h(t)=(t^2\log t-t^{\frac{5}{2}}+t^2)e^{-t^2}$$
$$=t^2(\log t-\sqrt{t}+1)e^{-t^2}$$

$\varphi(t)=\log t-\sqrt{t}+1$ とおくと $(1\leqq t\leqq 4)$

$$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{2-\sqrt{t}}{2t}$$

$\varphi(1)=0$，$1<t<4$ において，$\varphi'(t)>0$ であるから

$$1<t<4 \text{ において}\quad \varphi(t)>0$$

$1<t<4$ において，$g(t)-h(t)=t^2e^{-t^2}\varphi(t)>0$ であるから

$$1<t<4 \text{ において}\quad g(t)>(t^{\frac{5}{2}}-t^2+1)e^{-t^2}-e^{-t}$$

■