令和４年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 令和４年２月25日

問題 1 2 3 4

1 a を実数とし，座標空間の点 $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ を考える。$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ をそれぞれ $\triangle \mathrm{P_1QR}$，$\triangle \mathrm{P_2QR}$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を通る直線と，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行であることを示せ。

(2) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を求めよ。

(3) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ を底面とする四角錐 $\mathrm{Q\text{-}P_1P_2G_2G_1}$ の体積を求めよ。

2 袋の中に赤玉２個と白玉２個の合計４個の玉が入っている。A と B の２人で次のルールに従ってゲームをする。

- A，B の順で繰り返しプレイヤーになる。
- プレイヤーは袋から玉を同時に２個取り出す。取り出した玉の色が同じならば，プレイヤーの勝利とする。取り出した玉の色が異なるならば，それらを袋に戻してよくかき混ぜ，プレイヤーを交替する。
- A が勝利するか，A が勝利せずに A の後に B がプレイヤーになり，B が勝利するか，B が勝利せずにプレイヤーを交替することによって１巡が終了する。
- 勝者が決まるとゲームは終了する。

以下の問いに答えよ。

(1) B が１巡目で勝者になる確率を求めよ。

(2) N を自然数とし，N 巡目以内に B が勝者になる確率を p_N とする。$p_N > 0.396$ となる N の最小値を求めよ。ただし，$\log_2 3 = 1.585$，$\log_2 5 = 2.322$ とする。

(3) N を自然数とする。N 巡目以内に勝者になる確率は，A と B のどちらが大きいか。

$\boxed{\mathbf{3}}$ x，y を実数とし，$f(p) = p^2 + xp + y$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) p の 2 次方程式 $f(p) = 0$ が実数解を持つような点 $(x,\ y)$ 全体の集合を D とおく。D を xy 平面上に図示せよ。

(2) p の 2 次方程式 $f(p) = 0$ は実数解を持つとする。$f(p) = 0$ の実数解がすべて 1 以下で，少なくとも 1 つの実数解は 0 以上となるような点 $(x,\ y)$ 全体の集合を E とおく。E を xy 平面上に図示せよ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が (2) の集合 E 全体を動くとき，$x^2 + y^2 - 4y + 4$ の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 \dfrac{\pi x}{2}}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最小値と最大値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$\sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2}$ となることを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^1 \{f(x)\}^n \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$ を用いてよい。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$ より $\qquad \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(1,\ 0,\ 0)$

$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$．$\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ のそれぞれの重心 $\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ は

$$\mathrm{G_1}\left(\frac{a}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right),\quad \mathrm{G_2}\left(\frac{a+1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$$

したがって $\qquad \overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$

よって，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を通る直線と，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行である．

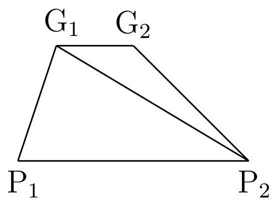
(2) $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}=\left(-\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|^2=1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}|^2=\frac{4a^2}{9}+\frac{10}{9},\quad \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}=-\frac{2a}{3}$$

したがって
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1\left(\frac{4a^2}{9}+\frac{10}{9}\right)-\left(-\frac{2a}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{6}\end{aligned}$$

求める四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}+\triangle\mathrm{G_1G_2P_2}\\&=\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}\\&=\frac{4}{3}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{6}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{9}}\end{aligned}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{P_1R}}=(-a,\ 0,\ 3)$．$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{10}}(0,-3,\ 1)$$

とする．点 R から四角形 $\mathrm{P_1P_2G_1G_2}$ に引いた垂線の長さ h は

$$h=|\overrightarrow{\mathrm{P_1R}}\cdot\vec{n}|=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって，求める立体の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 違う色の玉を取り出す確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \dfrac{2 \times 2}{6} = \dfrac{2}{3}$

同じ色の玉を取り出す確率は，上の余事象の確率であるから $1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

よって，B が 1 巡目で勝者になる確率は $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

(2) N 巡目で B が勝者になる確率は $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^{N-1} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{N-1}$

よって，N 巡目以内に B が勝者になる確率 p_N は

$$p_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{2}{9} \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^N}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^N\right\}$$

$p_N > 0.396$ となるとき $\dfrac{2}{5}\left\{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^N\right\} > 0.396$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^N < \frac{1}{100} \quad ゆえに \quad \left(\frac{3}{2}\right)^N > 10$$

上の第 2 式について 2 を底とする対数をとると

$$N(\log_2 3 - 1) > 1 + \log_2 5 \quad ゆえに \quad 0.585N > 3.322$$

したがって $N > \dfrac{3322}{585} = 5.6\cdots$ よって N の最小値は **6**

(3) N 巡目で A が勝者になる確率は $\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^{N-1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{N-1}$

N 巡目以内に A が勝者になる確率を q_N とすると

$$q_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^N}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^N\right\}$$

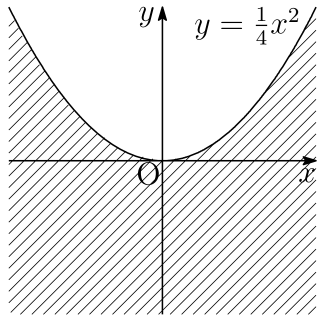
したがって $q_N - p_N = \dfrac{1}{5}\left\{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^N\right\} > 0$

よって，求める確率は，**A の方が大きい**． ■

3 (1) $f(p)=p^2+xp+y$ について，$f(p)=0$ が実数解を持つから係数について

$$x^2-4y \geqq 0 \quad ゆえに \quad y \leqq \frac{1}{4}x^2$$

よって，$D: y \leqq \frac{1}{4}x^2$ の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) $f(p)=\left(p+\frac{x}{2}\right)^2+y-\frac{x^2}{4}$

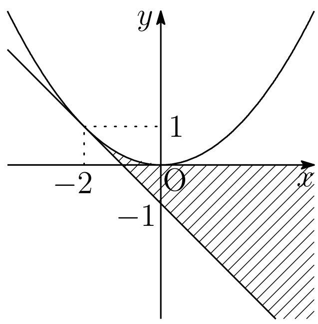
［1］$f(p)=0$ の 2 つの解がともに $0 \leqq p \leqq 1$ にあるとき，
$0 \leqq -\frac{x}{2} \leqq 1$，$y-\frac{x^2}{4} \leqq 0$，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$ より

$$-2 \leqq x \leqq 0, \quad y \leqq \frac{x^2}{4}, \quad y \geqq 0, \quad y \geqq -x-1$$

［2］$f(p)=0$ の 1 つの解が $p \leqq 0$，他の 1 つの解が $0 \leqq p \leqq 1$ にあるとき，
$f(0) \leqq 0$，$f(1) \geqq 0$ より

$$y \leqq 0, \quad y \geqq -x-1$$

E の表す領域は，［1］または［2］を満たす領域で境界線を含む．



(3) $f(x,\ y)=x^2+y^2-4y+4$ とおくと，$f(x,\ y)=x^2+(y-2)^2$ は点 $(x,\ y)$ と点 $(0,\ 2)$ の距離の 2 乗である．これを最小にする E 上の点は

$$y=\frac{1}{4}x^2 \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$$

にあるから，$-2 \leqq x \leqq 0$ における次式の最小値を求めればよい．

$$f\left(x,\ \frac{1}{4}x^2\right)=x^2+\left(\frac{1}{4}x^2-2\right)^2=\frac{1}{16}x^4+4$$

よって，求める最小値は　　$f(0,\ 0)=\mathbf{4}$ ■

4 (1) $f(x)\ (0 \leqq x \leqq 1)$ は単調増加であるから

$$\text{最小値 } f(0) = \mathbf{1}, \quad \text{最大値 } f(1) = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

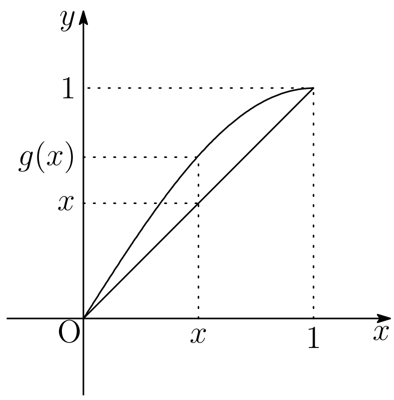
(2) $g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ とおく $(0 \leqq x \leqq 1)$.

曲線 $y = g(x)$ は上に凸であり，2 点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$ を結ぶ線分

$$y = x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

の下側にないから

$$g(x) \geqq x \geqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$



が成り立つ．したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x)^2 - 2x^2 &= 1 + \sin^2\frac{\pi x}{2} - 2x^2 \\ &= 1 - x^2 + g(x)^2 - x^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

$f(x) > 0$ であるから　　$f(x) \geqq \sqrt{2}x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

上式および (1) の結果から　$\sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

(3) (2) の結果から

$$\int_0^1 (\sqrt{2}x)^n\,dx \leqq \int_0^1 \{f(x)\}^n\,dx \leqq \int_0^1 (\sqrt{2})^n\,dx$$

したがって　$\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1} \leqq a_n \leqq (\sqrt{2})^n$　ゆえに　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} \leqq \sqrt[n]{a_n} \leqq \sqrt{2} \quad \cdots(*)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n} = 0$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = 1 \quad \cdots(**)$

$(*)$, $(**)$ から，はさみうちの原理により　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}}$　■