

令和3年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 薬, 工, 医保健(放射線, 検査)) 令和3年2月25日

問題 1 2 3 4

- 1 空間の点 O を通らない平面 α をとる。 α 上の3点 A, B, C は三角形をなすとし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。直線 l は媒介変数 t を用いて

$$\frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

と表されたとする。

- (1) l は平面 α 上にあることを示せ。
 - (2) $\triangle ABC$ の各辺と直線 l との交点の個数をそれぞれ求めよ。また, 交点がある場合, 各交点 X について, \overrightarrow{OX} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。
 - (3) A, B の中点を D とし, $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OD}$ となる点 E を考える。点 O と l 上の点 Y を通る直線は2点 E, C を通る直線と交点をもつとし, その交点を F とする。このとき, \overrightarrow{OF} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- 2 曲線 $C: y = x^3 - 2x^2 + x$ 上に点 $P_1(2, 2)$ がある。自然数 $n (n = 1, 2, 3, \dots)$ に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

点 P_n を接点とする C の接線を l_n とし, C と l_n の共有点のうち, P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

- (1) P_2 の座標を求めよ。
- (2) 接線 l_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3 複素数 w は実部, 虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α, β, γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

を満たすとする。 α, β, γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。

- (1) $\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2$ を w を用いて表せ。
- (2) $\triangle ABC$ が正三角形であるときの w の値を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ が正三角形であるとする。 $w = \alpha$ かつ $\triangle ABC$ の重心が点 $\frac{w^2}{2}$ であるとき, β と γ の値を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq x \leq \pi$ のとき, $\sin x = \sin 2x$ の解を求めよ。
- (2) $\int_0^{2\pi} |\sin x - \sin 2x| dx$ を求めよ。
- (3) n を正の整数とするととき, 定積分 $\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。
- (4) c を正の数とするととき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。

解答例

- 1 (1) l 上の点 X について

$$\vec{OX} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

このとき, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の係数の和は

$$\frac{2t}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right) = 1$$

よって, l は平面 α 上の点である.

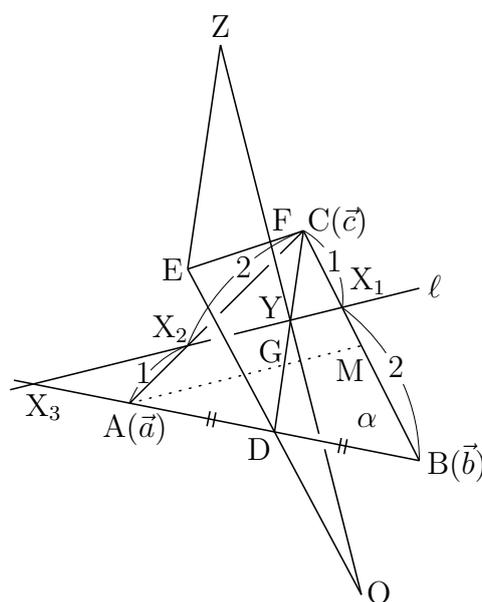
- (2) \vec{OX} の \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の係数が 0 となる点をそれぞれ X_1 , X_2 , X_3 とすると

$$\vec{OX}_1 = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3},$$

$$\vec{OX}_2 = \frac{2\vec{a} + \vec{c}}{3},$$

$$\vec{OX}_3 = \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3}$$

直線 l と $\triangle ABC$ の各辺との交点の個数について, 辺 BC 上は X_1 の 1 個, 辺 CA 上は X_2 の 1 個, 辺 AB 上は 0 個.



- (3) Y は CD 上の点であるから $\vec{CY} = s\vec{CD} = \frac{s}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$ (s は実数)

$$\vec{CA} = \frac{3}{2}\vec{CX}_2, \quad \vec{CB} = 3\vec{CX}_1 \quad \text{を代入すると} \quad \vec{CY} = \frac{3s}{4}\vec{CX}_2 + \frac{3s}{2}\vec{CX}_1$$

$$Y \text{ は直線 } X_1X_2 \text{ 上の点であるから} \quad \frac{3s}{4} + \frac{3s}{2} = 1$$

$$\text{これを解いて} \quad s = \frac{4}{9} \quad \text{すなわち} \quad CY : YD = 4 : 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\vec{OZ} = 2\vec{OY}$ となる点 Z をとると, 条件から

$$\triangle OYD \sim \triangle OZE, \quad YD : ZE = 1 : 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② および $\triangle CYF \sim \triangle EZF$ より $CF : FE = CY : ZE = 2 : 5$

このとき, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OE} = 2\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ であるから

$$\vec{OF} = \frac{5\vec{OC} + 2\vec{OE}}{2+5} = \frac{5\vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{7} = \frac{1}{7}(2\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c})$$

別解 X_3 は線分 AB を $1:4$ に外分する点, D は AB の中点であるから

$$X_3A : AB = 1 : 3 \quad \text{ゆえに} \quad X_3A : AD = 2 : 3$$

$\triangle CAD$ と直線 ℓ について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{CX_2}{X_2A} \cdot \frac{AX_3}{X_3D} \cdot \frac{DY}{YC} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{DY}{YC} = 1$$

したがって $CY : YD = 4 : 5$ (以下同様)

別解 ℓ 上の点 Y について, $\overrightarrow{OY} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CY} &= \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) - \vec{c} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c}) + \frac{t}{3}\{2(\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c})\} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{t}{3}(2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = \frac{2t}{3}\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

\overrightarrow{CY} は $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ と平行であるから

$$\frac{2t}{3} = \frac{1}{3} - \frac{t}{3} \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{1}{3}$$

$\overrightarrow{CY} = \frac{2}{9}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{4}{9}\overrightarrow{CD}$ すなわち $CY : YD = 4 : 5$ (以下同様)

補足 直線 ℓ について

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

BC の中点を M とすると, この直線 ℓ の方向ベクトル $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ は

$$2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = -\{(\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a})\} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AM}$$

したがって, ℓ は中線 AM と平行である.

2つの中線 AM と CD の交点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$CG : GD = 2 : 1$$

$\ell // AM$ であるから $CY : YG = CX_2 : X_2A = 2 : 1$

$$CD : CY = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9 : 4 \quad \text{ゆえに} \quad CY : YD = 4 : 5$$



2 (1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を l とすると

$$y - (t^3 - 2t^2 + t) = (3t^2 - 4t + 1)(x - t)$$

整理すると $l: y = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$

C と l の共有点の x 座標は

$$x^3 - 2x^2 + x = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$$

整理すると $(x - t)^2(x + 2t - 2) = 0$ ゆえに $x = t, -2t + 2$

したがって、 C と l の共有点で点 $(t, f(t))$ と異なる点は

$$(-2t + 2, f(-2t + 2)) \quad (*)$$

点 $P_1(2, f(2))$ のとき

$$P_2(-2, f(-2)) \quad \text{すなわち} \quad P_2(-2, -18)$$

(2) l_n は l の方程式において、 $t = a_n$ とすればよいから

$$l_n: y = (3a_n^2 - 4a_n + 1)x - 2a_n^3 + 2a_n^2$$

よって、 l_n の傾き $3a_n^2 - 4a_n + 1$ 、 y 切片 $-2a_n^3 + 2a_n^2$

(3) $P_1(2, 2)$ および $(*)$ から、 $a_1 = 2$

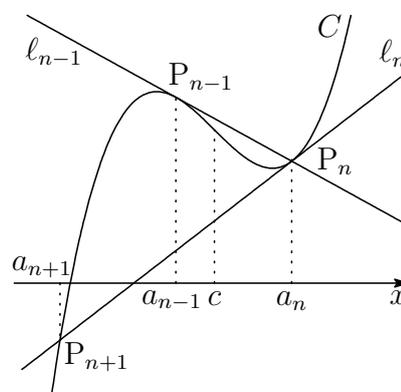
$$a_{n+1} = -2a_n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - \frac{2}{3} = -2 \left(a_n - \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{したがって} \quad a_n - \frac{2}{3} = \left(a_1 - \frac{2}{3} \right) (-2)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{4}{3} (-2)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

補足 3次関数 $C: y = f(x)$ のグラフ上の点 $P_n(a_n, f(a_n))$ における接線 l_n とする。 C と l_n の共有点のうち、 P_n と異なるものを $P_{n+1}(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ とし、 C の変曲点の x 座標を c とすると

$$a_{n+1} - c = -2(a_n - c)$$

が成立する。



$$\boxed{3} \quad (1) \quad \{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

これを w について整理すると

$$\begin{aligned} w^2(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) &= 4(\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2) \\ w^2(\beta - \alpha)^2 &= 4(\gamma - \alpha)^2 \end{aligned}$$

α, β, γ は相異なる複素数であるから

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 = \frac{w^2}{4}$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から } \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \frac{w}{2}$$

w の実部, 虚部はともに正であるから $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$

$$(i) \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{w}{2} \text{ のとき } \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \arg\left(\frac{w}{2}\right) = \arg w$$

$$0 < \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\frac{w}{2} \text{ のとき } \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \arg\left(-\frac{w}{2}\right) = \arg w + \pi$$

$$\pi < \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) < \frac{3}{2}\pi$$

$\triangle ABC$ が正三角形であるとき

$$\left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

$\arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \frac{5}{3}\pi$ は, (i), (ii) ともに満たさない.

$\arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \frac{\pi}{3}$ は (i) を満たし, このとき

$$\left|\frac{w}{2}\right| = \left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{w}{2}\right) = \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \frac{\pi}{3}$$

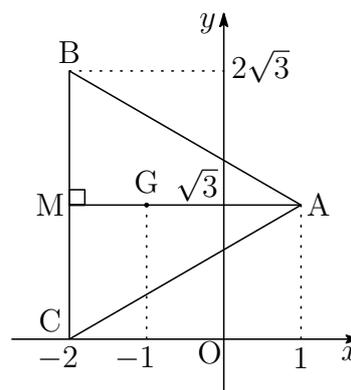
したがって $(*) \quad \frac{w}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{よって} \quad w = 1 + \sqrt{3}i$

(3) (*) より

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 \cdot \frac{w}{2} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 1 + \sqrt{3}i \\ \frac{w^2}{2} &= 2 \left(\frac{w}{2} \right)^2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -1 + \sqrt{3}i\end{aligned}$$

BC の中点を M とすると $M(-2 + \sqrt{3}i)$

AM = 3 より $BM = CM = \sqrt{3}$ よって $\beta = -2 + 2\sqrt{3}i, \gamma = -2$



4 (1) $\sin x = \sin 2x$ より

$$\sin x = 2 \sin x \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x(1 - 2 \cos x) = 0$$

$0 \leq x \leq \pi$ のとき, これを解くと $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi$

(2) $f(x) = \sin x - \sin 2x$ とし, $I = \int_0^\pi |f(x)| dx$ とおくと

$$I = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^\pi |f(x)| dx + \int_\pi^{2\pi} |f(x)| dx$$

$\int_\pi^{2\pi} |f(x)| dx$ について, $x = 2\pi - u$ とおくと

$$\frac{dx}{du} = -1 \quad \begin{array}{c|c} x & \pi \longrightarrow 2\pi \\ \hline u & \pi \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}f(2\pi - x) &= \sin(2\pi - x) - \sin 2(2\pi - x) \\ &= -\sin x + \sin 2x = -f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} |f(x)| dx &= \int_\pi^0 |f(2\pi - u)| (-1) du \\ &= \int_0^\pi |f(u)| du = \int_0^\pi |f(x)| dx\end{aligned}$$

したがって

$$I = 2 \int_0^\pi |f(x)| dx$$

$$f(x) = \sin x(1 - 2 \cos x) \text{ より } |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}) \\ f(x) & (\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f(x) dx = -\left[F(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[F(x) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + F(\pi) = -\frac{1}{2} - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

よって $I = 2 \times \frac{5}{2} = \mathbf{5}$

(3) $I_n = \int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx$ とおく.

$$t = nx \text{ とすると } \frac{dt}{dx} = n \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 2\pi \\ \hline t & 0 \rightarrow 2n\pi \end{array}$$

$$I_n = \int_0^{2n\pi} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{2n\pi} |\sin x - \sin 2x| dx \quad (*)$$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから, (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \int_0^{2n\pi} |f(x)| dx = \frac{1}{n} \cdot n \int_0^{2\pi} |f(x)| dx \\ &= \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = I = \mathbf{5} \end{aligned}$$

$$(4) J_n = \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| \text{ とおく.}$$

$$t = nx \text{ とすると } \frac{dt}{dx} = n \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow c \\ \hline t & 0 \longrightarrow nc \end{array}$$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(t)| dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)| dx$$

$\frac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**) \quad N \leq \frac{nc}{2\pi} < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leq nc < 2(N+1)\pi$$

(*) および (2) の結果により, $I_N = \frac{1}{N} \int_0^{2N\pi} |f(x)| dx = 5$ であるから

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)| dx = 5N$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{2N\pi} |f(x)| dx &\leq \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)| dx < \frac{1}{n} \int_0^{2(N+1)\pi} |f(x)| dx \\ \frac{1}{n} \cdot 5N &\leq J_n < \frac{1}{n} \cdot 5(N+1) \end{aligned}$$

(**) より $\frac{nc}{2\pi} - 1 < N$, $N+1 \leq \frac{nc}{2\pi} + 1$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} - 1 \right) &< J_n < \frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} + 1 \right) \\ \frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} &< J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n} \end{aligned}$$

このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}$

よって, はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}$ ■