令和３年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 令和３年２月２５日

1 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A，B，C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

と表されるとする。

(1) ℓ は平面 α 上にあることを示せ。

(2) $\triangle$ABC の各辺と直線 ℓ との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 X について，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。

(3) A，B の中点を D とし，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる点 E を考える。点 O と ℓ 上の点 Y を通る直線は 2 点 E，C を通る直線と交点をもつとし，その交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

2 曲線 $C: y=x^3-2x^2+x$ 上に点 $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ がある。自然数 n $(n=1,2,3,\cdots)$ に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

> 点 P_n を接点とする C の接線を ℓ_n とし，C と ℓ_n の共有点のうち，
> P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

(1) P_2 の座標を求めよ。

(2) 接線 ℓ_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 複素数 w は実部，虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α，β，γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

を満たすとする。α，β，γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする。

(1) $\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2$ を w を用いて表せ。

(2) $\triangle$ABC が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) $\triangle$ABC が正三角形であるとする。$w=\alpha$ かつ $\triangle$ABC の重心が点 $\dfrac{w^2}{2}$ であるとき，β と γ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin x=\sin 2x$ の解を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx$ を求めよ。

(3) n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

(4) c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) ℓ 上の点 X について

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}) = \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

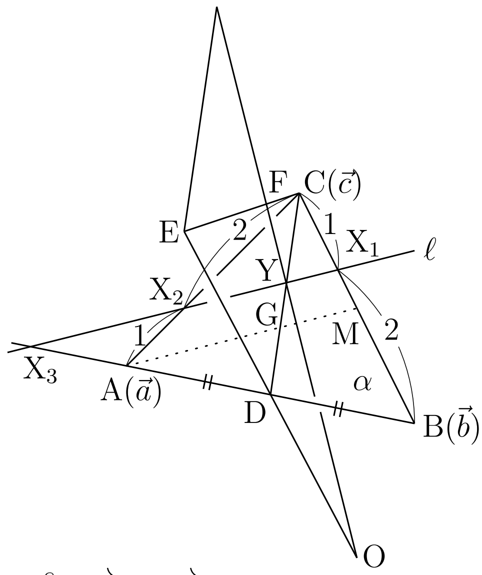
このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right) = 1$$

よって，ℓ は平面 α 上の点である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数が 0 となる点をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とすると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX_1}} = \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}},$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX_2}} = \frac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OX_3}} = \frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$



直線 ℓ と △ABC の各辺との交点の個数について，辺 BC 上は X_1 の **1 個**，辺 CA 上は X_2 の **1 個**，辺 AB 上は **0 個**.

(3) Y は CD 上の点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{CY}} = s\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{s}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$　(s は実数)

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CX_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{CX_1}}$ を代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{CY}} = \dfrac{3s}{4}\overrightarrow{\mathrm{CX_2}} + \dfrac{3s}{2}\overrightarrow{\mathrm{CX_1}}$

Y は直線 $\mathrm{X_1X_2}$ 上の点であるから　$\dfrac{3s}{4} + \dfrac{3s}{2} = 1$

これを解いて　$s = \dfrac{4}{9}$　すなわち　CY : YD = 4 : 5　$\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ となる点 Z をとると，条件から

$$\triangle\mathrm{OYD} \backsim \triangle\mathrm{OZE}, \quad \mathrm{YD} : \mathrm{ZE} = 1 : 2 \quad \cdots②$$

①，② および △CYF ∽ △EZF より　CF : FE = CY : ZE = 2 : 5

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{5\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2+5} = \frac{5\vec{c}+2(\vec{a}+\vec{b})}{7} = \boldsymbol{\frac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})}$$

別解 X_3 は線分 AB を $1:4$ に外分する点，D は AB の中点であるから

$$\mathrm{X_3A : AB} = 1:3 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{X_3A : AD} = 2:3$$

$\triangle$CAD と直線 ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{CX_2}}{\mathrm{X_2A}}\cdot\frac{\mathrm{AX_3}}{\mathrm{X_3D}}\cdot\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{YC}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{YC}} = 1$$

したがって　$\mathrm{CY : YD} = 4:5$　　(以下同様)

別解 ℓ 上の点 Y について，$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \dfrac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \dfrac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CY}} = \overrightarrow{\mathrm{OY}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}) - \vec{c}\\ &= \frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{c}) + \frac{t}{3}\{2(\vec{a}-\vec{c}) - (\vec{b}-\vec{c})\}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \frac{t}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{CA}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}}) = \frac{2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{CB}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CY}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})$ と平行であるから

$$\frac{2t}{3} = \frac{1}{3} - \frac{t}{3} \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{1}{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CY}} = \dfrac{2}{9}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}) = \dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　　すなわち　$\mathrm{CY : YD} = 4:5$　(以下同様)

補足 直線 ℓ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

BC の中点を M とすると，この直線の方向ベクトル $2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ は

$$2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c} = -\{(\vec{b}-\vec{a}) + (\vec{c}-\vec{a})\} = -(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = -2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

したがって，ℓ は中線 AM と平行である．
2 つの中線 AM と CD の交点 G は $\triangle$ABC の重心であるから

$$\mathrm{CG : GD} = 2:1$$

$\ell /\!/ \mathrm{AM}$ であるから　$\mathrm{CY : YG} = \mathrm{CX_2 : X_2A} = 2:1$

$$\mathrm{CD : CY} = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9:4 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CY : YD} = 4:5$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=x^3-2x^2+x$ とおくと　$f'(x)=3x^2-4x+1$

曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とすると

$$y-(t^3-2t^2+t)=(3t^2-4t+1)(x-t)$$

整理すると　$\ell: y=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x^3-2x^2+x=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2$$

整理すると　$(x-t)^2(x+2t-2)=0$　ゆえに　$x=t, -2t+2$

したがって，C と ℓ の共有点で点 $(t,\ f(f))$ と異なる点は

$$(-2t+2,\ f(-2t+2)) \qquad (*)$$

点 $\mathrm{P}_1(2,\ f(2))$ のとき

$$\mathrm{P}_2(-2,\ f(-2))\quad \text{すなわち}\quad \mathbf{P_2(-2,-18)}$$

(2) ℓ_n は ℓ の方程式において，$t=a_n$ とすればよいから

$$\ell_n: y=(3{a_n}^2-4a_n+1)x-2{a_n}^3+2{a_n}^2$$

よって，ℓ_n の傾き $\boldsymbol{3{a_n}^2-4a_n+1}$，$y$ 切片 $\boldsymbol{-2{a_n}^3+2{a_n}^2}$

(3) $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ および $(*)$ から，$a_1=2$

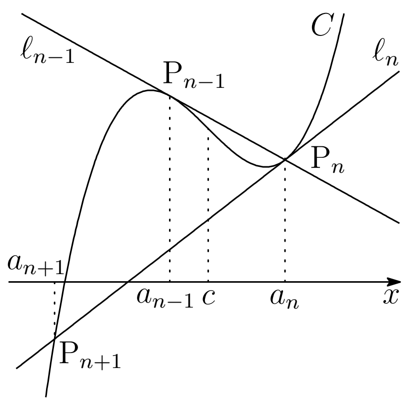
$$a_{n+1}=-2a_n+2 \quad \text{ゆえに}\quad a_{n+1}-\frac{2}{3}=-2\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

したがって　$a_n-\dfrac{2}{3}=\left(a_1-\dfrac{2}{3}\right)(-2)^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{4}{3}(-2)^{n-1}+\dfrac{2}{3}}$

補足 3 次関数 $C: y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ f(a_n))$ における接線 ℓ_n とする．C と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なるものを $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$ とし，C の変曲点の x 座標を c とすると

$$a_{n+1}-c=-2(a_n-c)$$

が成立する．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$

これを w について整理すると

$$w^2(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=4(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)$$
$$w^2(\beta-\alpha)^2=4(\gamma-\alpha)^2$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は相異なる複素数であるから

$$\boldsymbol{\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=\frac{w^2}{4}}$$

(2) (1) の結果から $\quad \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\dfrac{w}{2}$

w の実部，虚部はともに正であるから $\quad 0<\arg w<\dfrac{\pi}{2}$

(i) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{w}{2}$ のとき $\quad \arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(\dfrac{w}{2}\right)=\arg w$

$$0<\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)<\frac{\pi}{2}$$

(ii) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\dfrac{w}{2}$ のとき $\quad \arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(-\dfrac{w}{2}\right)=\arg w+\pi$

$$\pi<\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)<\frac{3}{2}\pi$$

$\triangle$ABC が正三角形であるとき

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

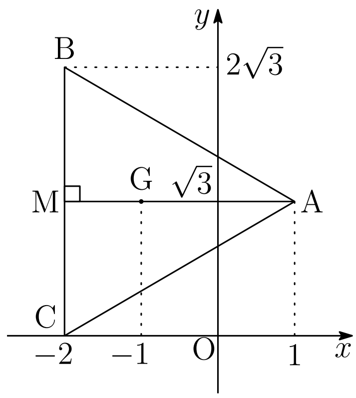
$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\dfrac{5}{3}\pi$ は，(i)，(ii) ともに満たさない．

$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ は (i) を満たし，このとき

$$\left|\frac{w}{2}\right|=\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{w}{2}\right)=\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\frac{\pi}{3}$$

したがって $\quad (*)\ \dfrac{w}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{w=1+\sqrt{3}i}$

(3) $(*)$ より



$$\begin{aligned}\alpha &= 2\cdot\frac{w}{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 1+\sqrt{3}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{w^2}{2} &= 2\left(\frac{w}{2}\right)^2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -1+\sqrt{3}i\end{aligned}$$

BC の中点を M とすると　$\mathrm{M}(-2+\sqrt{3}i)$

$\mathrm{AM}=3$ より　$\mathrm{BM}=\mathrm{CM}=\sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{\beta=-2+2\sqrt{3}i,\ \gamma=-2}$

$\boxed{4}$ (1) $\sin x=\sin 2x$ より

$$\sin x = 2\sin x\cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x(1-2\cos x)=0$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，これを解くと　$\boldsymbol{x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi}$

(2) $f(x)=\sin x-\sin 2x$ とし，$I=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$ とおくと

$$I=\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|\,dx$$

$\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|\,dx$ について，$x=2\pi-u$ とおくと

$$\frac{dx}{du}=-1$$

x	$\pi \longrightarrow 2\pi$
u	$\pi \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}f(2\pi-x) &= \sin(2\pi-x)-\sin 2(2\pi-x)\\ &= -\sin x+\sin 2x=-f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|\,dx &= \int_{\pi}^{0}|f(2\pi-u)|\,(-1)du\\ &= \int_0^{\pi}|f(u)|\,du=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx\end{aligned}$$

したがって

$$I=2\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$$

$f(x) = \sin x(1 - 2\cos x)$ より　$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}) \\ f(x) & (\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f(x)\,dx = -\Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} + \Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + F(\pi) = -\frac{1}{2} - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

よって　　$I = 2 \times \dfrac{5}{2} = \mathbf{5}$

(3) $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx|\,dx$ とおく．

$t = nx$ とすると　$\dfrac{dt}{dx} = n$

x	$0 \longrightarrow\ 2\pi$
t	$0 \longrightarrow 2n\pi$

$$I_n = \int_0^{2n\pi} |\sin t - \sin 2t|\,\frac{1}{n}dt = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} |\sin x - \sin 2x|\,dx \qquad (*)$$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから，(2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} |f(x)|\,dx = \frac{1}{n}\cdot n\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = I = \mathbf{5} \end{aligned}$$

(4) $J_n = \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx|$ とおく．

$t = nx$ とすると $\quad \dfrac{dt}{dx} = n$

x	$0 \longrightarrow c$
t	$0 \longrightarrow nc$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(t)|\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(x)|\,dx$$

$\dfrac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**) \quad N \leqq \frac{nc}{2\pi} < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leqq nc < 2(N+1)\pi$$

$(*)$ および (2) の結果により，$I_N = \dfrac{1}{N}\displaystyle\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx = 5$ であるから

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx = 5N$$

したがって

$$\frac{1}{n}\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx \leqq \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(x)|\,dx < \frac{1}{n}\int_0^{2(N+1)\pi} |f(x)|\,dx$$

$$\frac{1}{n}\cdot 5N \leqq J_n < \frac{1}{n}\cdot 5(N+1)$$

$(**)$ より $\quad \dfrac{nc}{2\pi} - 1 < N$，$N+1 \leqq \dfrac{nc}{2\pi} + 1$ であるから

$$\frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} - 1\right) < J_n < \frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} + 1\right)$$

$$\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} < J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}$$

このとき $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}$

よって，はさみうちの原理により $\quad \boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}}$