令和２年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 令和２年２月 25 日

1 以下の問いに答えよ。

(1) x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかであることを示せ。

(2) 自然数 x，y，z が $x^2 + 5y = 2z^2$ を満たすとき，x，y，z はすべて 5 の倍数であることを示せ。

(3) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

2 α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C($|\alpha|^2$)，D($\overline{\alpha}\beta$) を考える．3 点 O，A，B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$OAB の面積を S_1，$\triangle$OCD の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2) $\triangle$OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(3) 実数 a，b に対し，複素数 z を $z = a + bi$ で定める。$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$ のとき，3 点 O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle$OPQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

3 $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，曲線 $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq V(b) - V(a) \leqq \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ。

(2) (1) の不等式を用いて，$\dfrac{d}{dt}V(t) = 2\pi t\dfrac{1}{\cos^2 t}$ を示せ。

(3) $V\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{F}(t,\ 0)$，$\mathrm{F}'(3t,\ 0)$ からの距離の和が $2\sqrt{2}t$ であるような点 P の軌跡を C とする。直線 $y = x - 1$ を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつような t の範囲を求めよ。

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，C と ℓ の 2 つの共有点および原点 O を頂点とする三角形の面積の最大値を求めよ。

解答例

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) 法 5 について

$$\begin{array}{lll} x \equiv 0 \text{ のとき} & x^2 \equiv 0 & \pmod 5 \\ x \equiv 1 \text{ のとき} & x^2 \equiv 1 & \pmod 5 \\ x \equiv 2 \text{ のとき} & x^2 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 3 \text{ のとき} & x^2 \equiv 9 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 4 \text{ のとき} & x^2 \equiv 16 \equiv 1 & \pmod 5 \end{array}$$

よって，題意は成立する．

(2) $x^2+5y=2z^2$ より，法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x=5x',\ z=5z'$ ($x',\ z'$は整数) を $x^2+5y=2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2+5y=2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y=5(2z'^2-x'^2)$$

$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，x，y，z はすべて 5 の倍数である．

(3) $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x，y，z が存在し，これら 3 数の最大公約数が 1 であるものを仮定する．
$x^2+5y^2=2z^2$ より，法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

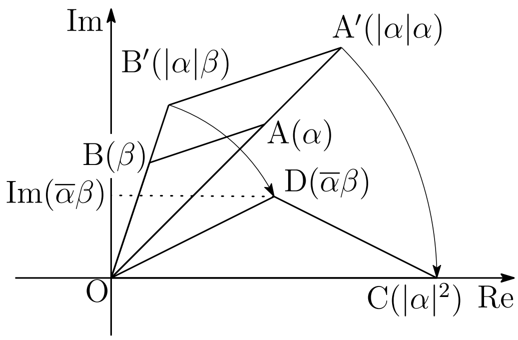
(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x=5x',\ z=5z'$ ($x',\ z'$は整数) を $x^2+5y^2=2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2+5y^2=2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2=5(2z'^2-x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod 5$ より，$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，$x,\ y,\ z$ が 5 を共通因数にもつことになり，仮定に反する．よって，題意は証明された．

2 (1) 2点C($|\alpha|^2$)，D($\overline{\alpha}\beta$) は，それぞれ2点A(α)，B(β) を原点を中心に $|\alpha|$ 倍の相似拡大，さらに原点を中心に $\arg\overline{\alpha}$ だけ回転 ($\times\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}$) したものであるから

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\triangle\mathrm{OCD}}{\triangle\mathrm{OAB}} = \boldsymbol{|\alpha|^2}$$



(2) △OCD の底辺を $|\alpha|^2$，高さを $|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ とみると　$S_2 = \dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(1) の結果から　$S_1 = \dfrac{1}{|\alpha|^2}S_2$　よって　$S_1 = \dfrac{1}{|\alpha|^2}\cdot\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)| = \dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

別解 $\theta = \angle\alpha 0\beta$ とすると　$\cos\theta + i\sin\theta = \dfrac{\frac{\beta}{|\beta|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|}} = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}} = \dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから　$S_1 = \dfrac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta| = \dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(3) (2) の結果から，3点O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{z}\cdot\frac{1}{z}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|$$

$z = a + bi$ $(1 \leqq a \leqq 2,\ 1 \leqq b \leqq 3)$ であるから

$$\frac{\overline{z}}{z} = \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i,$$

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right| = \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$\dfrac{b}{a} = u$，$\triangle\mathrm{OPQ} = S(u)$ とおくと　$S(u) = \dfrac{u}{1+u^2}$　$\left(\dfrac{1}{2} \leqq u \leqq 3\right)$

ゆえに　$S'(u) = \dfrac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$

u	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(u)$		$+$	0	$-$	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{3}{10}$

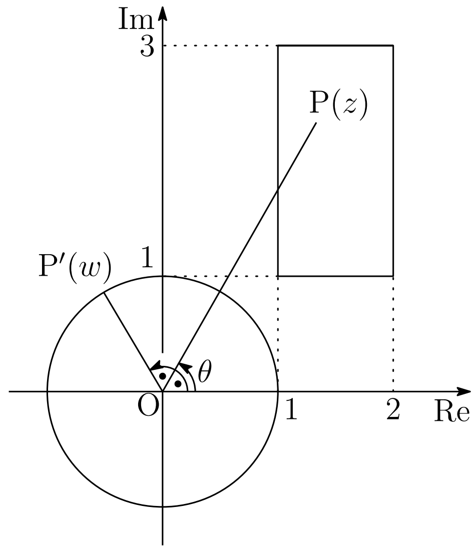
よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

別解 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)$ であるから

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\right|$$

$\theta = \arg(z)$，$w = \dfrac{z}{\overline{z}}$ とすると

$$\begin{aligned} w &= \left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|} = 1, \\ \arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) \\ &= \arg(z) - \arg(\overline{z}) \\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta \end{aligned}$$



点 $\mathrm{P}'(w)$ は，点 $\mathrm{P}(z)$ から単位円周上の点 P' への写像で，その偏角について

$$\arg(w) = 2\arg(z)$$

が成立する．$z = a + bi$ $(1 \leqq a \leqq 2,\ 1 \leqq b \leqq 3)$ より，$\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ とすると，上の図から

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{2},\quad \tan\theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

したがって　　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots(*)$

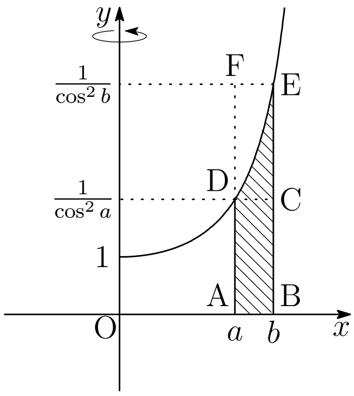
このとき　　$\sin 2\theta_1 = \dfrac{2\tan\theta_1}{1+\tan^2\theta_1} = \dfrac{4}{5},\quad \sin 2\theta_2 = \dfrac{2\tan\theta_2}{1+\tan^2\theta_2} = \dfrac{3}{5}$

$(*)$ より，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$\theta = \theta_2$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 曲線 $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}\ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が x 軸と区間 $a \leqq x \leqq b$ において囲まれた斜線部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は

$$\int_0^b \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^a \frac{dx}{\cos^2 x} = V(b) - V(a)$$

右の図の長方形ABCD，長方形ABEFを y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると



$$V_1 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a}$$
$$V_2 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} = \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

$V_1 \leqq V(b) - V(a) \leqq V_2$ であるから

$$\pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq V(b) - V(a) \leqq \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

(2) (1)の結果から，$0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$\pi(b+a)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq \frac{V(b) - V(a)}{b - a} \leqq \pi(b+a)\frac{1}{\cos^2 b} \quad \cdots (*)$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，$(*)$ より

$0 < t < u < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 t} \leqq \frac{V(u) - V(t)}{u - t} \leqq \pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 u} \quad \cdots ①$$

$0 < u < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 u} \leqq \frac{V(u) - V(t)}{u - t} \leqq \pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 t} \quad \cdots ②$$

$\displaystyle\lim_{u \to t} \pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 u} = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t} \cdots ③$，$\displaystyle\lim_{u \to t} \pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 t} = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t} \cdots ④$

①〜④から，$\dfrac{d}{dt}V(t) = \displaystyle\lim_{u \to t} \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$ は，はさみうちの原理により

$$\frac{d}{dt}V(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$$

(3) (2) の結果を利用すると

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)'\,dx \\
&= 2\pi\Big[\, x\tan x + \log\cos x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \boldsymbol{2\pi\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2\right)}
\end{aligned}
$$

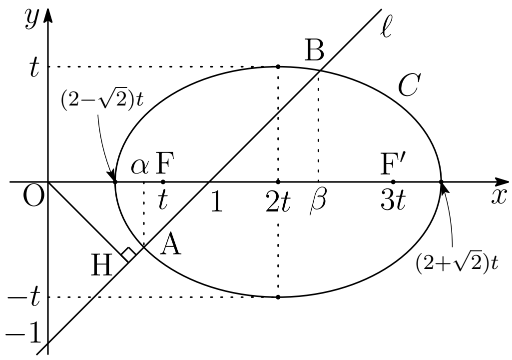
バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

補足 バウムクーヘン型求積法は，教科書では扱っていないが，問題集・参考書では重要公式として扱われている．熊大ではバウムクーヘン型求積法を用いる出題が目立ち，近年だけでも 2014 年 (理系)，2016 年 (理系・医医) で出題されている．2016 年では理系・医医の共通問題として出題され，理系の 5 割，医医の 7 割の受験生がバウムクーヘン型求積法を用いて解答したそうである (熊大入試連絡会)．本題 (3) は多くの受験生が，(1)，(2) の出来と関係なく独立して解答できたものと予想される．勿論，教科書にない公式 (バウムクーヘン型求積法) であるからということで減点されることはなかったそうである．熊大は発展的な解法に対しても寛大である．2018 年の空間のベクトルで四面体の体積をベクトル積 (外積) を用いた解答についても間違っていなかったため，正解として減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会)．2020 年文系でも外積を用いることができる問題が出題された．2020 年文系 4 番の解答にベクトル積 (外積) に関する解説を行っている．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2 点 $\mathrm{F}(t,\ 0)$，$\mathrm{F}'(3t,\ 0)$ からの距離の和が一定である点 P の描く軌跡 C は楕円で，その中心は $(2t,\ 0)$ である．楕円 C の直軸の長さを $2a$，短軸の長さを $2b$ とすると $(a > b > 0)$



$$2a = 2\sqrt{2}t, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\mathrm{FF}' = t$$

これを解いて　$a = \sqrt{2}t$，$b = t$

したがって，楕円 C の方程式は　$\dfrac{(x-2t)^2}{2t^2} + \dfrac{y^2}{t^2} = 1$

これと直線 $\ell : y = x - 1$ の方程式から y を消去すると

$$\frac{(x-2t)^2}{2t^2} + \frac{(x-1)^2}{t^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3x^2 - 4(t+1)x + 2(t^2+1) = 0 \quad \cdots (*)$$

C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつとき，$(*)$ の係数について

$$D/4 = \{-2(t+1)\}^2 - 3\cdot 2(t^2+1) = -2(t^2 - 4t + 1) > 0$$

これを解いて　$\mathbf{2 - \sqrt{3} < t < 2 + \sqrt{3}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{2(t+1) + \sqrt{D/4}}{3} - \frac{2(t+1) - \sqrt{D/4}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{D/4}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)} \end{aligned}$$

C と ℓ の 2 つの交点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha - 1)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta - 1)$ を結ぶ線分の長さは

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2}(\beta - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)}$$

原点 O から直線 $\ell : x - y - 1 = 0$ に垂線 OH を引くと

$$\mathrm{OH} = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OH} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)} = \frac{1}{3}\sqrt{-2(t-2)^2 + 6} \end{aligned}$$

(1) の結果に注意して，$t = 2$ のとき，最大値 $\dfrac{\mathbf{\sqrt{6}}}{\mathbf{3}}$ をとる．