平成 31 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 平成 31 年 2 月 25 日

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $a_n > \dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

2 1 個のさいころを投げて，出た目の数を a とする。a が偶数のときは $b = \dfrac{1}{2}a$，a が奇数のときは $b = \dfrac{1}{2}(a+3)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a > b$ となる確率を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$ および $\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$ を示せ。

(3) $S = \cos\dfrac{\pi}{a} + \sin\dfrac{\pi}{b}$ とおく。$a > b$ であるとき，$S < 1.7$ となる条件付き確率を求めよ。

3 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(2) (1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

4 座標平面上の曲線 $y = x\sin 3x + 3x^2 \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_1 \neq 2$ であるから，第 $m+1$ 項で初めて $a_{m+1}=2$ になると仮定すると，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n}+1\cdots(*)$ に $n=m$ を代入すると

$$2=\frac{2}{a_m}+1 \quad \text{すなわち} \quad a_m=2$$

第 m 項ですでに $a_m=2$ となり，矛盾を生じる．
よって，すべての自然数 n に対して　$a_n \neq 2$

(2) $b_n=\dfrac{3}{a_n-2}+1\cdots(**)$ より　$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　これと $(*)$ により

$$a_{n+1}+1=\frac{2}{a_n}+2=\frac{2(a_n+1)}{a_n}$$
$$a_{n+1}-2=\frac{2}{a_n}-1=\frac{-(a_n-2)}{a_n}$$

上の2式から　$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-2}=-2\cdot\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　すなわち　$b_{n+1}=-2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-2}=\dfrac{1+1}{1-2}=-2$，公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n=b_1\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{(-2)^n}$$

補足 $\{a_n\}$ の特性方程式 $x=\dfrac{2}{x}+1$ の解が $2,-1$ であるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{a_n-2}\right\}$ は等比数列である．

(3) $(**)$ より　$b_n-1=\dfrac{3}{a_n-2}$　ゆえに　$a_n-2=\dfrac{3}{b_n-1}$

上式および (2) の結果から　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3}{(-2)^n-1}+2}$

(4) (3) の結果を $a_n>\dfrac{5}{2}$ に代入すると

$$\frac{3}{(-2)^n-1}+2>\frac{5}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{(-2)^n-1}>\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

したがって　$0<(-2)^n-1<6$　ゆえに　$1<(-2)^n<7$

これを満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n=2}$

分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s-p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって $$\frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s-p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p+s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p+s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p+s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p+s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると $$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{2r}{p+s}$$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，大分大学 2001 年の漸化式[1]

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{2a_n}{3a_n+5}$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0,-1$ であるから

$$a_{n+1}+1=\frac{5(a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって $\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$ ゆえに $\dfrac{a_n}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

よって $$a_n=\frac{3\cdot2^{n-1}}{4\cdot5^{n-1}-3\cdot2^{n-1}}$$

次に，宮崎大学 2003 年の漸化式[2]

$$a_1=\frac{q}{p}\ (p>q>0),\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

の特性方程式 $x=\dfrac{1}{2-x}$，すなわち $x^2-2x+1=0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

ゆえに $\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{\frac{q}{p}-1}-(n-1)$ よって $a_n=\dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2001.pdf $\boxed{1}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2003.pdf $\boxed{12}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) a に対する b の値は，次のようになる．

a	1	2	3	4	5	6
b	2	1	3	2	4	3

このとき，$a > b$ となるのは，次の 4 通り

a	2	4	5	6
b	1	2	4	3

よって，求める確率は $\dfrac{4}{6} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ より $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$

$\cos\dfrac{\pi}{5} < \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} < \sqrt{0.81} = 0.9$ ゆえに $\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0.5}$, $\sqrt{0.49} < \sqrt{0.5} < \sqrt{0.64}$ より

$$0.7 < \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} < 0.8$$

(2) および上の結果に注意すると，$a < b$ となる $(a,\ b)$ について

$(a,\ b) = (2,\ 1)$ のとき $S = \cos\dfrac{\pi}{2} + \sin\pi = 0 < 1.7$

$(a,\ b) = (4,\ 2)$ のとき $S = \cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{2} > 0.7 + 1 = 1.7$

$(a,\ b) = (5,\ 4)$ のとき $S = \cos\dfrac{\pi}{5} + \sin\dfrac{\pi}{4} < 0.9 + 0.8 = 1.7$

$(a,\ b) = (6,\ 3)$ のとき $S = \cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} > \sqrt{1.7^2} = 1.7$

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{2}{4} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

補足 $a < b$ である事象を X，$S < 1.7$ である事象を Y とすると

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}$$

$(a,\ b) = (1,\ 2)$ のとき $S = \cos\pi + \sin\dfrac{\pi}{2} = 0 < 1.7$

$(a,\ b) = (3,\ 3)$ のとき $S = \cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1.7$

$P(Y) = \dfrac{4}{6}$ より，$P_X(Y) \neq P(Y)$ であるから，X と Y は独立ではない．

3 (1) $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ と $C_2 : y = x^3 + 1$ から y を消去すると

$$x^3 + 1 = x^2 + 2ax - 2a + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2 - 2a) = 0 \quad \cdots (*)$$

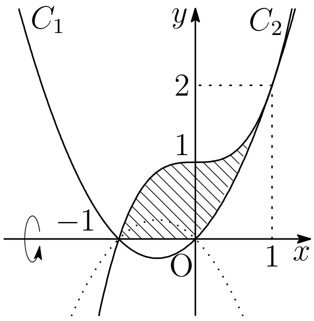
C_1 と C_2 の共有点がちょうど 2 個のとき，方程式 $(*)$ の実数解は 2 個ある．$a \neq 0$ より，$x^2 - 2a = 0$ は重解をもたないから，方程式 $x^2 - 2a = 0$ は $x = 1$ を解にもつ．したがって

$$1^2 - 2a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると　$(x-1)^2(x+1) = 0$

これは，条件を満たすから　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$C_1 : y = x^2 + x$



$$\begin{aligned} &|x^3 + 1|^2 - |x^2 + x|^2 \\ =&(x^3 + 1)^2 - (x^2 + x)^2 \\ =&(x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x + 1) \\ =&(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1) \geqq 0 \end{aligned}$$

したがって　$|x^3 + 1| \geqq |x^2 + x|$

求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させたものであるから，その体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^{1} (x^3+1)^2\,dx - \int_0^1 (x^2+x)^2\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^6 + 2x^3 + 1)\,dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2)\,dx \\ &= 2\int_0^1 (x^6+1)\,dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2)\,dx \\ &= \int_0^1 (2x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 2)\,dx \\ &= \left[\, \frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x \,\right]_0^1 = \frac{263}{210} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{263}{210}\pi}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y = x\sin 3x + 3x^2$ を微分すると　$y' = \sin 3x + 3x\cos 3x + 6x$

C 上の x 座標が a である点における接線の方程式は

$$y - (a\sin 3a + 3a^2) = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)(x - a)$$

すなわち　$y = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)x - 3a^2(1 + \cos 3a)$　$\cdots$①

これが原点を通るから　$-3a^2(1 + \cos 3a) = 0$

$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < 3a < \dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$3a = \pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果を ① に代入することにより　$\ell : y = \pi x$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x\sin 3x + 3x^2 = \pi x \quad \text{すなわち} \quad x(\pi - \sin 3x - 3x) = 0 \quad \cdots(*)$$

$f(x) = \pi - \sin 3x - 3x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = -3\cos 3x - 3 = -3(1 + \cos 3x) \leqq 0$$

したがって，$f(x)$ は単調減少であり，

$$f(0) = \pi > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

であるから，方程式 $(*)$ の解は　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{3}$

よって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi^2}{3}\right)}$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$x(\pi - \sin 3x - 3x) \geqq 0$ であるから，

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\pi - \sin 3x - 3x)\,dx \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left(\frac{\pi}{3} - x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\,dx \\ &= \frac{3}{6}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \left[\ \frac{x}{3}\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{54} - \frac{\pi}{9}} \end{aligned}$$