平成30年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，薬，工，医保健(放射線，検査))平成30年2月25日

1 tを実数とする。空間の4点$\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$について，$\angle\mathrm{BAC}$が直角であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) tの値を求めよ。

(2) DからA，B，Cを通る平面に垂線を下ろし，A，B，Cを通る平面との交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{HD}}$を求めよ。

(3) 四面体ABCDの体積を求めよ。

2 初項が1である数列$\{a_n\}$に対して$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$とおく。$\{S_n\}$が

$$S_{n+1}=2S_n+n^2+2n \quad (n \geqq 1)$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3を求めよ。

(2) $n\geqq 2$のとき，a_{n+1}をa_nとnを用いて表せ。

(3) $n\geqq 2$のとき，a_nをnの式で表せ。

3 nを2以上の自然数とする。区間$[0,\ 1]$をn等分して，その両端と分点を順に$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$とする。関数$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0,\ b\geqq 0,\ c>0)$に対して，区間$[x_{k-1},\ x_k]$を底辺とし，高さが$f(x_k)$である長方形の面積をL_kとする。ただし，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$である。すべてのnに対して$L_1+L_n=\dfrac{10}{n}+\dfrac{8}{n^3}$であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a，b，cを求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kL_k$を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2L_k$を求めよ。

4 $-3\leqq x\leqq 0$に対して，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3}\sqrt{3t^2+t^3}\,dt$とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $-3<x<0$に対して，$F'(x)=0$の解を求めよ。

(2) $F(x)$の最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A$(1,\ 5,\ 0)$，B$(4,\ 2,\ 0)$，C$(t,\ 2t,\ t-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1)$$

$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$3(t-1)-3(2t-5)+0(t-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t=4}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1,\ 6,\ 1)-(1,\ 5,\ 0)=(0,\ 1,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(1,\ 1,-2)$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=k\vec{n}$ であるから (k は実数)，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+k\vec{n}$$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k|\vec{n}|^2$

したがって　$-1=6k$　　ゆえに　$k=-\dfrac{1}{6}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{HD}}=-\dfrac{1}{6}\vec{n}=\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{3}\right)}$

別解 (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\vec{e}_1=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$，$\vec{e}_2=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$ とおくと，$\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HD}}&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2\\&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1,\ 6,\ 1)-(1,\ 5,\ 0)=(0,\ 1,\ 1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-3$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=18$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=27$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{HD}}=(0,\ 1,\ 1)+\frac{1}{6}(3,-3,0)-\frac{2}{9}(3,\ 3,\ 3)=\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}\right)$$

(3) よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{HD}}| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{HD}}|$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

別解 D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h，$\vec{e} = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ とおくと

$$h = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|h = \frac{3}{2}$$

補足 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}} \times \boldsymbol{\vec{b}}$ で表す[1]．本題において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3, -3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-9, -9,\ 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,\ 1,\ 1)$ より

$$V = \frac{1}{6}|9| = \frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $S_1 = a_1 = 1$，$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$S_2 = 2S_1 + 1^2 + 2\cdot1 = 5$$
$$S_3 = 2S_2 + 2^2 + 2\cdot2 = 18$$

よって　$a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = \mathbf{4}$,　$a_3 = S_3 - S_2 = 18 - 5 = \mathbf{13}$

(2) $(*)$ より　$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n$

$$S_n = 2S_{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1)$$

上の 2 式の辺々を引くと　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1}$

(3) 1 次関数 $f(n) = pn + q$ が，すべての n について，次式を満たすとき

$$f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 \quad \cdots ①$$

したがって　$p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1$

整理すると　$pn + p + q = (2p + 2)n + 2q + 1$

上式は，n に関する恒等式であるから

$p = 2p + 2,\ \ p + q = 2q + 1$　これを解いて　$p = -2,\ \ q = -3$

ゆえに　$f(n) = -2n - 3 \quad \cdots ②$

(2) の結果と ① の辺々を引くと

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$f(2) = -2\cdot2 - 3 = -7$ であるから，$a_2 - f(2) = 4 - (-7) = 11$ より

$a_n - f(n) = 11\cdot2^{n-2}$　ゆえに　$a_n = 11\cdot2^{n-2} + f(n)$

これに ② を代入して　$\boldsymbol{a_n = 11\cdot2^{n-2} - 2n - 3}$　$(n \geqq 2)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=ax^2+bx+c$, $x_k=\dfrac{k}{n}$, $L_k=\dfrac{1}{n}f(x_k)$ より

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left\{a\left(\frac{1}{n}\right)^2+b\left(\frac{1}{n}\right)+c\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{a}{n^2}+\frac{b}{n}+c\right), \\ L_n &= \frac{1}{n}f(1)=\frac{1}{n}(a+b+c) \end{aligned}$$

したがって　$L_1+L_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a}{n^2}+\dfrac{b}{n}+a+b+2c\right)$

条件式から　$L_1+L_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{8}{n^2}+10\right)$

上の 2 式から　$\boldsymbol{a=8}$, $\boldsymbol{b=0}$, $a+b+2c=10$　ゆえに　$\boldsymbol{c=1}$

(2) $kL_k=k\cdot\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\dfrac{k}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$　$\cdots(*)$

(1) の結果より，$f(x)=8x^2+1$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kL_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 xf(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x(8x^2+1)\,dx=\left[\,2x^4+\frac{x^2}{2}\,\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

(3) $(*)$ に $\dfrac{k}{n}$ を掛けると　$\dfrac{k^2}{n}L_k=\left(\dfrac{k}{n}\right)^2f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2L_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}L_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 x^2f(x)\,dx=\int_0^1 x^2(8x^2+1)\,dx \\ &= \left[\,\frac{8}{5}x^5+\frac{x^3}{3}\,\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{29}{15}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(t)=\sqrt{3t^2+t^3}$ とおくと，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ より $(-3 \leqq x \leqq 0)$

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= f(x+3)-f(x)=\frac{\{f(x+3)\}^2-\{f(x)\}^2}{f(x+3)+f(x)}\\
&=\frac{3(x+3)^2+(x+3)^3-(3x^2+x^3)}{f(x+3)+f(x)}=\frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3)+f(x)}
\end{aligned}
$$

よって，$-3<x<0$ における $F'(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=-2}$

(2) (1) で求めた $F'(x)$ により，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$f(x)=|x|\sqrt{x+3}$，$-3 \leqq x \leqq 0$ に注意して，$F(x)$ を求める．

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^{x+3} f(t)\,dt\\
&= \int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt+\int_0^{x+3} t\sqrt{t+3}\,dt \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

まず
$$
\begin{aligned}
\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt &= \int_0^x \{(t+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{t+3}\}\,dt\\
&=\left[\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}}-2(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x\\
&=\left[\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x\\
&=\frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+\frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

①，② より

$$
F(x)=\frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\}+\frac{24}{5}\sqrt{3}
$$

増減表から，求める最小値は

$$
F(-2)=\frac{2}{5}(-4-4^{\frac{3}{2}})+\frac{24}{5}\sqrt{3}=\boldsymbol{\frac{24}{5}(\sqrt{3}-1)}
$$