平成29年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，薬，工，医保健(放射線，検査))平成29年2月25日

$\boxed{1}$ 原点をOとする座標空間内に3点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$がある。ただし，$a>0$，$b>0$，$c>0$とする。$\angle\mathrm{BAC}=\theta$とし，$\triangle\mathrm{ABC}$の面積を$S$とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$，$\sin\theta$をa，b，cを用いて表せ。

(2) 点Oを中心とする半径1の球面上の点をHとする。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$がいずれもベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$に垂直であるとき，

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2)の条件のもとで$a=3$としたとき，面積Sの最小値とそのときのb，cの値を求めよ。

$\boxed{2}$ $s>0$，$t>0$とする。原点をOとする複素数平面において，$\alpha=2-i$，$\beta=s+ti$を表す点をそれぞれA，Bとする。さらに，点Cを直線OBに関して点Aと反対側にとり，$\triangle\mathrm{OBC}$が正三角形になるようにする。点Cを表す複素数をzとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) zをs，tを用いて表せ。

(2) α，βが等式$4\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0$を満たすとき，$\beta$と$z$をそれぞれ求めよ。

(3) (2)で求めたβとzに対して，直線ACと直線OBの交点をDとし，$\angle\mathrm{CDB}=\theta$とする。このとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数$f(x)=\log_2 x-x+1\ (x>0)$について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の極値を求めよ.

(2) 方程式$f(x)=0$の解をすべて求めよ。なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$を用いてもよい。

(3) 座標平面上の曲線$y=f(x)$とx軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = x^2 + x$ とし，j は自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

> $a_1 = 2$ とする。a_n $(n \geqq 1)$ に対して，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $({a_n}^j,\ f({a_n}^j))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし，${a_n}^j$ は a_n の j 乗を表す。

以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a,\ b,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-a,\ 0,\ c)$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角が θ であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} = \boldsymbol{\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}}$$

また，$\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}}$$

(2) $\mathrm{H}(x,\ y,\ z)$ とおくと，H は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{HA}} = (a-x, -y, -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = (-x,\ b-y, -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}} = (-x, -y,\ c-z)$ がいずれも $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (x,\ y,\ z)$ に垂直であるから

$$\begin{aligned}(a-x)x-y^2-z^2 &= 0\\ -x^2+(b-y)y-z^2 &= 0\\ -x^2-y^2+(c-z)z &= 0\end{aligned}$$

$(*)$ に注意してこれらを整理すると　$ax = 1,\quad by = 1,\quad cz = 1$

上の 3 式から，$x = \dfrac{1}{a}$，$y = \dfrac{1}{b}$，$z = \dfrac{1}{c}$ を ① に代入して　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} = 1$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\times\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\end{aligned}$$

上式および (2) の結果により

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)} = \frac{1}{2}abc \quad \cdots(**)$$

(2) の結果および (∗∗) に $a = 3$ を代入することにより

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9} \quad \cdots ①$$
$$S = \frac{3}{2}bc$$

2 数 $\frac{1}{b^2}$，$\frac{1}{c^2} > 0$ について相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{8}{9} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}} = \frac{2}{bc} \quad \text{すなわち} \quad bc \geqq \frac{9}{4}$$

したがって　　$S = \frac{3}{2}bc \geqq \frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4} = \frac{27}{8}$

上式において，等号が成立するのは，$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ のときであるから，① より $\boldsymbol{b = c = \frac{3}{2}}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\frac{27}{8}}$ をとる．

補足 b^2 と c^2 の相乗平均・調和平均の関係により

$$\sqrt{b^2\cdot c^2} \geqq \frac{2}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad \text{(等号が成立するのは} \; b = c \; \text{のとき)}$$

これに $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9}$ を代入すると　$bc \geqq \frac{9}{4}$

解説 n 個の正数 x_1，$x_2, \cdots, x_n$ の相加平均 A，相乗平均 G，調和平均 H は

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$
$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$A \geqq G$ が成り立つから [1]，n 個の整数 $\frac{1}{x_1}$，$\frac{1}{x_2}$，$\cdots$，$\frac{1}{x_n}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq \sqrt{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geqq \frac{1}{G}$$

したがって　　$A \geqq G \geqq H$

なお，等号が成立するのは，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限る．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{3}$ を参照

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点Cは直線OBに関して点Aと反対側にあり，△OBCが正三角形であるから

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\beta = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(s+ti)$$
$$= \boldsymbol{\frac{s-\sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}s+t}{2}i}$$

(2) $4\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$ より $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) + 4 = 0$

2点A，Bの位置関係に注意してこれを解くと

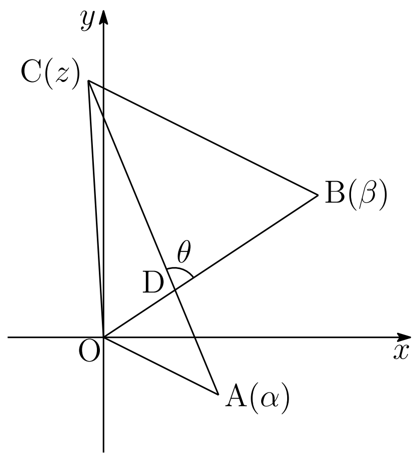
$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$w = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$\dfrac{\beta}{\alpha} = 2w$，$\dfrac{z}{\beta} = w$ より

$$\beta = 2w\alpha = (1+\sqrt{3}i)(2-i) = \boldsymbol{2+\sqrt{3}+(-1+2\sqrt{3})i}$$
$$z = 2w^2\alpha = (-1+\sqrt{3}i)(2-i) = \boldsymbol{-2+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{z-\alpha}{\beta} = \frac{2w^2\alpha - \alpha}{2w\alpha}$$
$$= \frac{2w^2-1}{2w} = \frac{1}{2}\left(2w - \frac{1}{w}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3}i)$$



上の図から，$\theta = \arg\dfrac{z-\alpha}{\beta}$ であるから

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{14}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\log_2 x - x + 1$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{x\log 2}-1=\frac{1}{\log 2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log_2 e}\right)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\log_2 e$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

極大値　$f(\log_2 e)=\log_2(\log_2 e)-\log_2 e+1=\boldsymbol{\log_2\left(\dfrac{2\log_2 e}{e}\right)}$

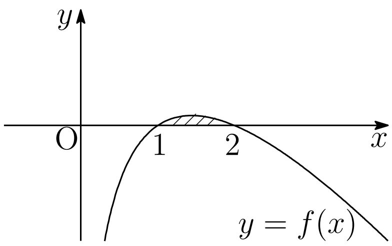
(2) (1) で示した増減表により，$f(x)=0$ の解の個数は高々2個.

$$f(1)=0,\quad f(2)=0$$

よって，求める解は　　$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

補足 $\log_2 x - x + 1 = 0$ の解は，$y=\log_2 x$ と $y=x-1$ の交点の x 座標.
凸関数のグラフと直線の共有点は高々2個.

(3) (1),(2) の結果から，求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(\frac{\log x}{\log 2}-x+1\right)dx \\ &= \left[\frac{x(\log x-1)}{\log 2}-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_1^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}-\frac{1}{\log 2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=x^2+x$ を微分すると　$f'(x)=2x+1$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$$

すなわち　$y=(2t+1)x-t^2$

これと直線 $y=x$ の方程式から y を消去すると

$$(2t+1)x-t^2=x \quad \text{ゆえに} \quad 2t\left(x-\frac{1}{2}t\right)=0$$

$t={a_n}^j$ とすると，$a_n>0$ のとき，$t\neq 0$ であるから

$$x=\frac{1}{2}t \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}{a_n}^j>0$$

$a_1=2>0$ により，すべての自然数 n に対して　$a_n>0$

(2) $a_n>0$ より $(n\geqq 1)$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}{a_n}^j$ の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2\frac{1}{2}{a_n}^j \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1}=j\log_2 a_n-1$$

$b_n=\log_2 a_n\cdots$① であるから　$\boldsymbol{b_{n+1}=jb_n-1}$

(3) $b_1=\log_2 a_1=\log_2 2=1$，① から　$a_n=2^{b_n}$　$\cdots$②

(i) $j=1$ のとき，(2) の結果から　$b_{n+1}=b_n-1$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公差 -1 の等差数列であるから

$$b_n=1+(-1)(n-1) \quad \text{すなわち} \quad b_n=2-n$$

② から　$\boldsymbol{a_n=2^{2-n}}$

(ii) $j\geqq 2$ のとき，(2) の結果から　$b_{n+1}-\dfrac{1}{j-1}=j\left(b_n-\dfrac{1}{j-1}\right)$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{j-1}\right\}$ は，初項 $b_1-\dfrac{1}{j-1}$，公比 j の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{j-1}=\left(b_1-\frac{1}{j-1}\right)j^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n=\frac{(j-2)j^{n-1}+1}{j-1}$$

② から　$\boldsymbol{a_n=2^{\frac{(j-2)j^{n-1}+1}{j-1}}}$