

平成29年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分  
理系(理, 薬, 工, 医保健(放射線, 検査))平成29年2月25日

問題 1 2 3 4

1 原点を  $O$  とする座標空間内に3点  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$  がある。ただし,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  とする。 $\angle BAC = \theta$  とし,  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1)  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  を  $a$ ,  $b$ ,  $c$  を用いて表せ。

(2) 点  $O$  を中心とする半径1の球面上の点を  $H$  とする。ベクトル  $\overrightarrow{HA}$ ,  $\overrightarrow{HB}$ ,  $\overrightarrow{HC}$  がいずれもベクトル  $\overrightarrow{OH}$  に垂直であるとき,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2) の条件のもとで  $a = 3$  としたとき, 面積  $S$  の最小値とそのときの  $b$ ,  $c$  の値を求めよ。

2  $s > 0$ ,  $t > 0$  とする。原点を  $O$  とする複素数平面において,  $\alpha = 2 - i$ ,  $\beta = s + ti$  を表す点をそれぞれ  $A$ ,  $B$  とする。さらに, 点  $C$  を直線  $OB$  に関して点  $A$  と反対側にとり,  $\triangle OBC$  が正三角形になるようにする。点  $C$  を表す複素数を  $z$  とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1)  $z$  を  $s$ ,  $t$  を用いて表せ。

(2)  $\alpha$ ,  $\beta$  が等式  $4\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$  を満たすとき,  $\beta$  と  $z$  をそれぞれ求めよ。

(3) (2) で求めた  $\beta$  と  $z$  に対して, 直線  $AC$  と直線  $OB$  の交点を  $D$  とし,  $\angle CDB = \theta$  とする。このとき,  $\cos \theta$  の値を求めよ。

3 関数  $f(x) = \log_2 x - x + 1$  ( $x > 0$ ) について, 以下の問いに答えよ。

(1)  $f(x)$  の極値を求めよ。

(2) 方程式  $f(x) = 0$  の解をすべて求めよ。なお,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  を用いてもよい。

(3) 座標平面上の曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

4  $f(x) = x^2 + x$  とし,  $j$  は自然数とする。数列  $\{a_n\}$  を次のように定める。

$a_1 = 2$  とする。  $a_n$  ( $n \geq 1$ ) に対して, 座標平面上の曲線  $y = f(x)$  上の点  $(a_n^j, f(a_n^j))$  における接線と直線  $y = x$  との交点の  $x$  座標を  $a_{n+1}$  とする。ただし,  $a_n^j$  は  $a_n$  の  $j$  乗を表す。

以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数  $n$  に対し,  $a_n > 0$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $b_n = \log_2 a_n$  とおくとき,  $b_{n+1}$  を  $b_n$  を用いて表せ。
- (3) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

## 解答例

- 1 (1)  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$  より

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$

2つのベクトル  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  のなす角が  $\theta$  であるから

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}$$

また,  $\sin \theta > 0$  であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}$$

- (2)  $H(x, y, z)$  とおくと,  $H$  は原点  $O$  を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \dots (*)$$

$\overrightarrow{HA} = (a - x, -y, -z)$ ,  $\overrightarrow{HB} = (-x, b - y, -z)$ ,  $\overrightarrow{HC} = (-x, -y, c - z)$  がいずれも  $\overrightarrow{OH} = (x, y, z)$  に垂直であるから

$$(a - x)x - y^2 - z^2 = 0$$

$$-x^2 + (b - y)y - z^2 = 0$$

$$-x^2 - y^2 + (c - z)z = 0$$

(\*) に注意してこれらを整理すると  $ax = 1$ ,  $by = 1$ ,  $cz = 1$

上の 3 式から,  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$ ,  $z = \frac{1}{c}$  を (\*) に代入して  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$

- (3) (1) の結果から  $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \times \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \end{aligned}$$

上式および (2) の結果により

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 c^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)} = \frac{1}{2} abc \quad \dots (**)$$

$a = 3$  を (2) の結果と (\*\*) に代入すると

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$S = \frac{3}{2}bc$$

2数  $\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2} > 0$  について相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{8}{9} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} = \frac{2}{bc} \quad \text{すなわち} \quad bc \geq \frac{9}{4}$$

$$\text{したがって} \quad S = \frac{3}{2}bc \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$$

上式において、等号が成立するのは、 $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$  のときであるから、 $\textcircled{1}$  より

$b = c = \frac{3}{2}$  のとき、 $S$  は最小値  $\frac{27}{8}$  をとる.

補足  $b^2$  と  $c^2$  の相乗平均・調和平均の関係により

$$\sqrt{b^2 \cdot c^2} \geq \frac{2}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad (\text{等号が成立するのは } b = c \text{ のとき})$$

これに  $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9}$  を代入すると  $bc \geq \frac{9}{4}$

解説  $n$  個の正数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の相加平均  $A$ , 相乗平均  $G$ , 調和平均  $H$  は

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right)$$

$A \geq G$  が成り立つから<sup>1</sup>,  $n$  個の整数  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$  の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$$

したがって  $A \geq G \geq H$

なお、等号が成立するのは、 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$  のときに限る. ■

<sup>1</sup><http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri.2002.pdf> [3] を参照

- 2 (1) 点Cは直線OBに関して点Aと反対側にあり、 $\triangle OBC$ が正三角形であるから

$$\begin{aligned} z &= \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \beta = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (s + ti) \\ &= \frac{s - \sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t}{2}i \end{aligned}$$

(2)  $4\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$  より  $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + 4 = 0$

2点A, Bの位置関係に注意してこれを解くと

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

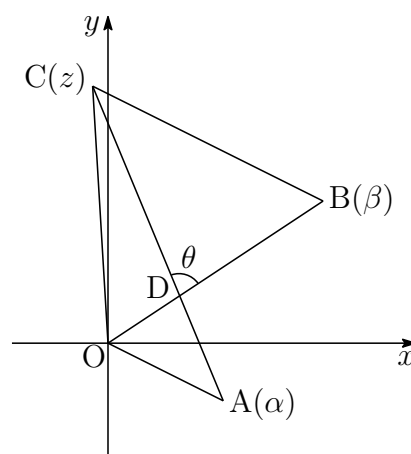
$w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$  とおくと,  $\frac{\beta}{\alpha} = 2w$ ,  $\frac{z}{\beta} = w$  より

$$\beta = 2w\alpha = (1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = 2 + \sqrt{3} + (-1 + 2\sqrt{3})i$$

$$z = 2w^2\alpha = (-1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = -2 + \sqrt{3} + (1 + 2\sqrt{3})i$$

- (3) (2)の結果から

$$\begin{aligned} \frac{z - \alpha}{\beta} &= \frac{2w^2\alpha - \alpha}{2w\alpha} \\ &= \frac{2w^2 - 1}{2w} = \frac{1}{2} \left( 2w - \frac{1}{w} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3}i) \end{aligned}$$



上の図から,  $\theta = \arg \frac{z - \alpha}{\beta}$  であるから

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

■

- 3** (1)  $f(x) = \log_2 x - x + 1$  を微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{x \log 2} - 1 = \frac{1}{\log 2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\log_2 e} \right)$$

したがって、 $f(x)$  の増減表は

$x$	(0)	...	$\log_2 e$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	極大	↘

極大値  $f(\log_2 e) = \log_2(\log_2 e) - \log_2 e + 1 = \log_2 \left( \frac{2 \log_2 e}{e} \right)$

- (2) (1) で示した増減表により、 $f(x) = 0$  の解の個数は高々2個。

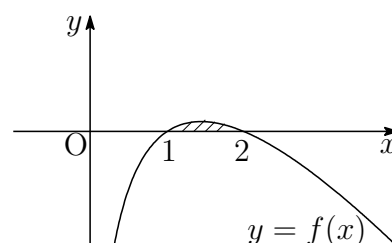
$$f(1) = 0, \quad f(2) = 0$$

よって、求める解は  $x = 1, 2$

補足  $\log_2 x - x + 1 = 0$  の解は、 $y = \log_2 x$  と  $y = x - 1$  の交点の  $x$  座標。  
凸関数のグラフと直線の共有点は高々2個。

- (3) (1),(2) の結果から、求める面積は、右の図の斜線部分で、その面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left( \frac{\log x}{\log 2} - x + 1 \right) dx \\ &= \left[ \frac{x(\log x - 1)}{\log 2} - \frac{1}{2}(x - 1)^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$



■

4 (1)  $f(x) = x^2 + x$  を微分すると  $f'(x) = 2x + 1$

曲線  $y = f(x)$  上の点  $(t, f(t))$  における接線の方程式は

$$y - (t^2 + t) = (2t + 1)(x - t)$$

すなわち 
$$y = (2t + 1)x - t^2$$

これと直線  $y = x$  の方程式から  $y$  を消去すると

$$(2t + 1)x - t^2 = x \quad \text{ゆえに} \quad 2t \left( x - \frac{1}{2}t \right) = 0$$

$t = a_n^j$  とすると,  $a_n > 0$  のとき,  $t \neq 0$  であるから

$$x = \frac{1}{2}t \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^j > 0$$

$a_1 = 2 > 0$  により, すべての自然数  $n$  に対して  $a_n > 0$

(2)  $a_n > 0$  より ( $n \geq 1$ ),  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^j$  の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{1}{2} a_n^j \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = j \log_2 a_n - 1$$

$b_n = \log_2 a_n \cdots \textcircled{1}$  であるから  $b_{n+1} = j b_n - 1$

(3)  $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$ ,  $\textcircled{1}$  から  $a_n = 2^{b_n} \cdots \textcircled{2}$

(i)  $j = 1$  のとき, (2) の結果から  $b_{n+1} = b_n - 1$

数列  $\{b_n\}$  は, 初項 1, 公差  $-1$  の等差数列であるから

$$b_n = 1 + (-1)(n - 1) \quad \text{すなわち} \quad b_n = 2 - n$$

$\textcircled{2}$  から  $a_n = 2^{2-n}$

(ii)  $j \geq 2$  のとき, (2) の結果から  $b_{n+1} - \frac{1}{j-1} = j \left( b_n - \frac{1}{j-1} \right)$

数列  $\left\{ b_n - \frac{1}{j-1} \right\}$  は, 初項  $b_1 - \frac{1}{j-1}$ , 公比  $j$  の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{j-1} = \left( b_1 - \frac{1}{j-1} \right) j^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n = \frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}$$

$\textcircled{2}$  から  $a_n = 2^{\frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}}$  ■