平成 28 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 平成 28 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC を考える。$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に対し OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P とし，$0 < t < 1$ に対し OC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{BPQ} = 90^\circ$ であるとき，t を s を用いて表せ。

(3) (2) の条件の下で，t の最大値とそのときの s の値を求めよ。

(4) (3) で求めた s，t に対して，PQ^2 を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 自然数 a に対して

$$S(a) = \sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 和 $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$$

とする。一般項 a_n を求めよ。

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ について，a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ。

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

3 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位である。$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$ となる最小の n を求めよ。

(3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。

4 $x\geqq 1$ で定義された関数

$$f(x)=\frac{\log x}{x^2}$$

について，以下の問いに答えよ。

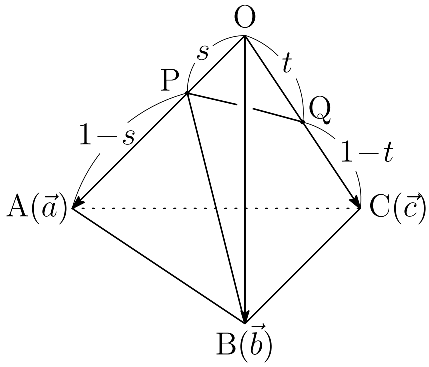
(1) $x\geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{c}$ であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\boldsymbol{\vec{b}-s\vec{a}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\boldsymbol{t\vec{c}-s\vec{a}}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BPQ}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であるから，(1) の結果から

$$(\vec{b}-s\vec{a})\cdot(t\vec{c}-s\vec{a})=0 \quad 整理すると \quad t\vec{b}\cdot\vec{c}-s\vec{a}\cdot\vec{b}-st\vec{c}\cdot\vec{a}+s^2|\vec{a}|^2=0$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{a}|=1$ であるから

$$\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}st+s^2\cdot1^2=0 \quad ゆえに \quad (1-s)t=s(1-2s)$$

このとき，$0<s<\dfrac{1}{2}$ に注意して　　$\boldsymbol{t=\dfrac{s(1-2s)}{1-s}}$

(3) (2) の結果から

$$t=\frac{s(1-2s)}{1-s}=2s+1-\frac{1}{1-s}=3-\left\{2(1-s)+\frac{1}{1-s}\right\} \quad \cdots①$$

$0<s<\dfrac{1}{2}$ より $1-s>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$2(1-s)+\frac{1}{1-s}\geqq2\sqrt{2(1-s)\cdot\frac{1}{1-s}}=2\sqrt{2} \quad \cdots②$$

上式で等号が成立するとき，$0<s<\dfrac{1}{2}$ に注意して

$$2(1-s)=\frac{1}{1-s} \quad すなわち \quad s=1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

このとき，①，② より t の最大値は　　$\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}$

(4) (1)，(3) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = |t\vec{c} - s\vec{a}|^2 = t^2|\vec{c}|^2 - 2st\vec{c}\cdot\vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 \\ &= s^2 - st + t^2 \\ &= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right) + \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{27-19\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{a}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \boldsymbol{\sqrt{a+1}-1}$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geqq 1$ に等しいとき，(1) の結果から

$$\sqrt{a+1}-1 = n \quad ゆえに \quad a = n(n+2)$$

よって，求める数列の一般項は　　$\boldsymbol{a_n = n(n+2)}$

(3) $n = 2m-1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned}a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\} = (2m-1)(2m+1) \\ &= 4m^2 - 1 = 4(m^2-1) + 3\end{aligned}$$

$n = 2m$ のとき (m は整数)

$$a_n = 2m(2m+2) = 4m(m+1)$$

よって，a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である．

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned} z_n &= \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n - 2\{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{n-1} \\ &= 2^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) - 2^n\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\} \\ &= 2^n\{\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\} + 2^n i\{\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\} \\ &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} z_n &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} \\ &= -2^n\sin\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2^n i\cos\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

補足 $z_n = -2^n\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi + 2^n i\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi = 2^n i\left(\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi + i\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi\right)$

$$\begin{aligned} &= 2^n\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2n-1}{6}\pi + i\sin\frac{2n-1}{6}\pi\right) \\ &= 2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

別解 $z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha - 2) \quad \cdots ①$

$$\begin{aligned} \alpha - 2 &= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - 2 = 2(\cos\theta - 1 + i\sin\theta) \\ &= 4\left(-\sin^2\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 4i\sin\frac{\theta}{2}\left(i\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

上式および ① から

$$\begin{aligned} z_n &= 2^{n-1}\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\}\cdot 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right) \\ &= 2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

これに $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を代入すると $\quad z_n = 2^n\left(\cos\dfrac{n+1}{3}\pi + i\sin\dfrac{n+1}{3}\pi\right)$

(2) (1) の結果より，$|z_k| = 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(2^n-1)}{2-1} = 2(2^n-1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ のとき　$2(2^n-1) > 500$　ゆえに　$2^n > 251$

これを満たす最小の整数 n は　　**8**

(3) $(*)$ より　$z_{1000} = -2^{1001} \sin \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2} + 2^{1001} i \cos \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2}$

z_{1000} が実数であるとき，自然数 j を用いて

$$\frac{1999}{2}\theta = \frac{2j-1}{2}\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{2j-1}{1999}\pi$$

このとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$1 \leqq j \leqq 500$

よって，求める θ の個数は　　**500** (個)

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると

$$f'(x)=(\log x)'\frac{1}{x^2}+\log x\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}+\log x\left(-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\sqrt{e}$

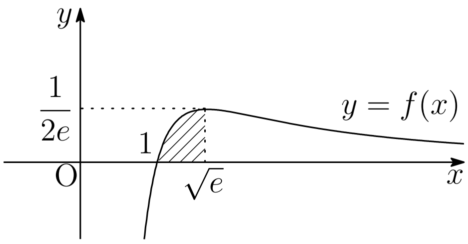
$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x\geqq 1)$ の増減表は，次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}}$

(2) 求める面積を S とすると，(1) の結果から

$$\begin{aligned}S&=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}\,dx=-\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx\\&=-\left[\ \frac{1}{x}\log x\ \right]_1^{\sqrt{e}}+\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\&=-\left[\ \frac{1}{x}(\log x+1)\ \right]_1^{\sqrt{e}}=\boldsymbol{1-\frac{3}{2\sqrt{e}}}\end{aligned}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)(\log x)'\,dx=\pi\Big[\ (\log x)^2\ \Big]_1^{\sqrt{e}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$