平成 27 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 平成 27 年 2 月 25 日

1 $f(x)$ は x の 3 次多項式とし，x^3 の係数は 1，定数項は 0 とする。2 つの異なる実数 α，β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α，β を用いて表せ。

(2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ。

2 p，q，r を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1, -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) q，r を p を用いて表せ。

(3) p'，q'，r' を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1, -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，p'，q'，r' を p を用いて表せ。

(4) (3) における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。

3 $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{B}$ と $\angle\mathrm{C}$ は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1 = 1$，$\mathrm{CX}_1 = 8$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う。

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を求めよ。

(2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。

(3) $l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) x の 3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数が 1，$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ であるから

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta) = 3x^2 - 3(\alpha+\beta)x + 3\alpha\beta$$

また，$f(x)$ の定数項は 0 であるから

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2 + 3\alpha\beta x$$

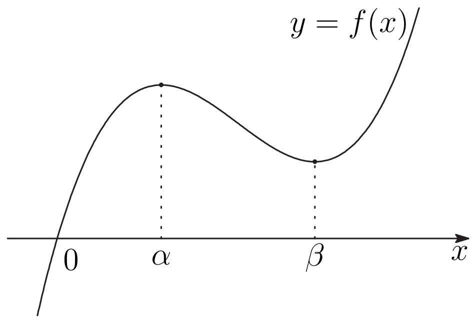
したがって

$$f(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2 + 3\alpha^2\beta = \boldsymbol{\frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)}{2}}$$
$$f(\beta) = \beta^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2 + 3\alpha\beta^2 = \boldsymbol{\frac{\beta^2(3\alpha-\beta)}{2}}$$

(2) $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

$\alpha < \beta < 3\alpha$ より，$0 < \alpha < \beta$，$3\alpha - \beta > 0$ であるから，$f(\beta) > 0$
したがって，$y = f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



よって，$y = f(x)$ および $y = -1$ のグラフから，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数は **1 個**.

解説

3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数を a とし，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ を満たすとすると $(\alpha<\beta)$

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=3a(x-\alpha)(x-\beta)=3a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\
f''(x)&=3a\{2x-(\alpha+\beta)\}\\
f'''(x)&=6a
\end{aligned}
$$

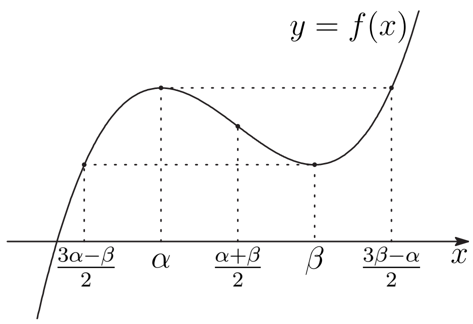
$f(x)$ を $x=\alpha$ を極として，テイラー展開[1]を行うと

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x-\alpha)^3$$

したがって
$$
\begin{aligned}
f(x)-f(\alpha)&=\frac{3a}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+a(x-\alpha)^3\\
&=a(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$

同様にして
$$f(x)-f(\beta)=a(x-\beta)^2\left(x-\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)$$

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



とくに，数列 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$，α，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，β，$\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ は，等差数列をなす．

本題において，$f(0)=0$，$\alpha<\beta<3\alpha$ より，$0<\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$ であるから

$$f\left(\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)>0$$

よって，$y=f(x)$ および $y=-1$ のグラフから，3 次方程式 $f(x)=-1$ の実数解の個数は 1 個．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf を参照．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1, -1,\ r)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1-q,\ p-1, -1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ p+1, -r),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-q-1, -2,\ r-1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (q+1,\ 2,\ 1-r)$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあるから，$p=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{0}$ となり，2 点 A，B が一致する．これら 2 点の z 座標は異なるので，不適．
また，$p=-1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0}$ となり，2 点 C，A が一致する．これら 2 点の x 座標は異なるので，不適．
よって，$p \neq \pm 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ であるから，これらの x 成分，y 成分により

$$2 \cdot 2 - (p+1)(q+1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = \frac{3-p}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，これらの y 成分，z 成分により

$$(p-1)(r-1) - (-1)(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r = \frac{p+1}{p-1}}$$

(3) (2) の結果より，A$(1,\ p,\ 0)$，B$\left(\dfrac{3-p}{p+1},\ 1,\ 1\right)$ であるから

$$(p+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-2p,\ 1-p^2,\ 1+p)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = (1,\ p',\ 0)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$2 - 2p + p'(1-p^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p' = -\frac{2}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = (q',\ 1,\ 1)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$q'(2-2p) + 1 - p^2 + 1 + p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = (-1, -1',\ r')$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$-(2-2p) - (1-p^2) + r'(1+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}}$$

(4) (3) の結果から　$\mathrm{A}'\left(1, -\dfrac{2}{p+1},\ 0\right)$,

$\mathrm{B}'\left(-\dfrac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)},\ 1,\ 1\right)$,

$\mathrm{C}'\left(-1, -1, -\dfrac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \left(\dfrac{-p^2-p+4}{2(p-1)},\ \dfrac{p+3}{p+1},\ 1\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{A'C'}} = \left(-2,\ \dfrac{-p+1}{p+1}, -\dfrac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ であるとき，これらの x 成分，y 成分から

$$\frac{-p^2-p+4}{2(p-1)}\cdot\frac{-p+1}{p+1} - \frac{p+3}{p+1}\cdot(-2) = 0$$

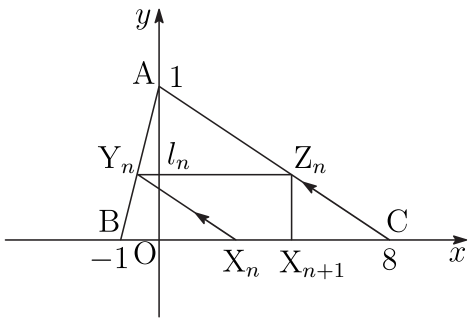
整理すると　$p^2+5p+8=0 \quad \cdots(*)$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4\cdot1\cdot8 = -7 < 0$$

したがって，方程式 $(*)$ は実数解をもたない．
よって，3 点 A'，B'，C' は一直線上にない．

3 (1) 座標平面上に点 A(0, 1)，B(−1, 0)，C(8, 0)，$\mathrm{X}_n(x_n,\ 0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は



$$y=x+1 \quad \cdots ①$$

直線 AC の方程式は

$$y=-\frac{1}{8}x+1 \quad \cdots ②$$

直線 $\mathrm{X}_n\mathrm{Y}_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\frac{1}{8}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{8}(x-x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y_n の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　$l_n=\dfrac{1+x_n}{9} \quad \cdots ④$

このとき，$x_1=0$ であるから　$\boldsymbol{l_1=\dfrac{1}{9}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n=-\frac{x}{8}+1 \quad \text{これを解いて} \quad x=8(1-l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから　$x_{n+1}=8(1-l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{1+x_{n+1}}{9}=\frac{1+8(1-l_n)}{9}=\boldsymbol{-\frac{8}{9}l_n+1}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1$，$l_1=\dfrac{1}{9}$

この漸化式から　$l_n=\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

$l_n>\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$

n は奇数であるから　$(-1)^n\left(\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$　ゆえに　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n<\dfrac{1}{16}$

したがって　$n>\dfrac{4}{\log_2 9-3}$

このとき，$3.169<\log_2 9<3.17$ より

$$23.5\cdots=\frac{4}{3.17-3}<\frac{4}{\log_2 9-3}<\frac{4}{3.169-3}=23.6\cdots$$

よって，求める最小の奇数 n は　$\boldsymbol{n=25}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_{n+1}-a_n=\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$t=x-n\pi$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$,

x	$n\pi \longrightarrow (n+1)\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\int_0^{\pi} e^{-(n\pi+t)}|\sin(t+n\pi)|\,dt\\&=e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt=e^{-n\pi}a_1\\&=e^{-n\pi}\left[-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}}\end{aligned}$$

(2) $a_{n+1}-a_n=e^{-n\pi}a_1$, $a_1=\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi}$$

$$\begin{aligned}a_n&=a_1\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\pi}=a_1\times\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}\\&=\frac{e^{-\pi}+1}{2}\times\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$a_n=\boldsymbol{\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n\pi}=0$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}}$$