

平成26年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 薬, 工, 医保健(放射線, 検査))平成26年2月25日

1 空間内の1辺の長さ1の正四面体OABCにおいて, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。また, 点Dを $\overrightarrow{OD} = \vec{b} - \vec{a}$ を満たす点, 点Eを $\overrightarrow{OE} = \vec{c} - \vec{a}$ を満たす点とし, 点PをOAの中点とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < t < 1$ に対し, BDを $t : (1-t)$ に内分する点をRとし, CEを $(1-t) : t$ に内分する点をSとする。また, OBとPRの交点をMとし, OCとPSの交点をNとする。このとき, \overrightarrow{OM} と \overrightarrow{ON} を, それぞれ t, \vec{b}, \vec{c} を用いて表せ。
- (2) $\triangle OMN$ の面積を t を用いて表せ。
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき, $\triangle OMN$ の面積の最小値を求めよ。

2 a を正の定数とする。条件

$$\cos \theta - \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi$$

を満たす θ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) 条件を満たす θ は, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で, ただ1つ存在することを示せ。
- (2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。

3 r を $r > 1$ である実数とし, 数列 $\{a_n\}$ を次で定める。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + r^2}{a_n + 1}$$

以下の問いに答えよ。

- (1) n が奇数のとき $a_n < r$, n が偶数のとき $a_n > r$ であることを示せ。
- (2) 任意の自然数 n について, $a_{n+2} - r$ を a_n と r を用いて表せ。
- (3) 任意の自然数 n について, 次の不等式を示せ。

$$\frac{a_{2n+2} - r}{a_{2n} - r} < \left(\frac{r - 1}{r + 1} \right)^2$$

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$ を求めよ。

4 a を正の実数とする。 xy 平面上の曲線 $C : y = e^{ax}$ の接線で, 原点を通るものを l とし, C と l および y 軸で囲まれた領域を S とする。以下の問いに答えよ。

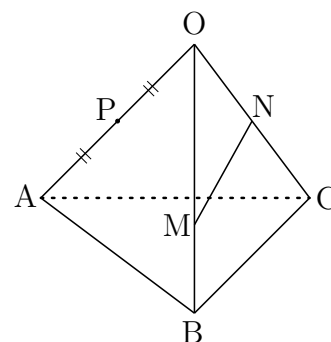
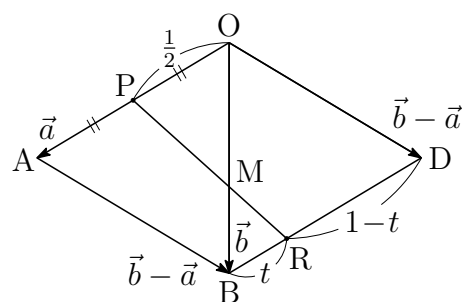
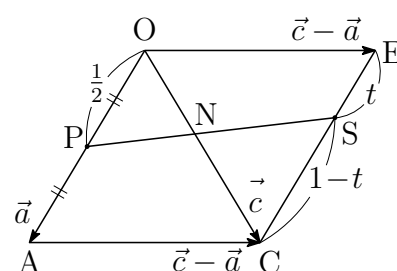
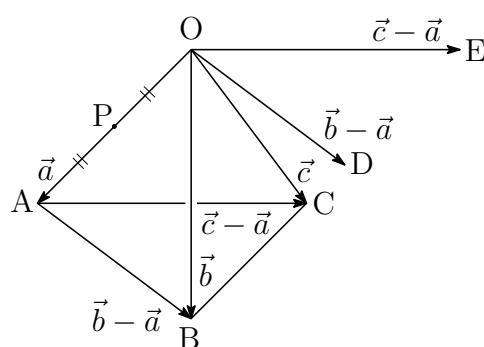
- (1) S を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_1 を求めよ。
- (2) S を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_2 を求めよ。
- (3) $V_1 = V_2$ となるときの a の値を求めよ。

解答例

- 1 (1) $\triangle OPM \sim \triangle BRM$, $\triangle OPN \sim \triangle CSN$ であるから,
これらの相似比から

$$OM : MB = \frac{1}{2} : t, \quad ON : NC = \frac{1}{2} : (1-t)$$

$$\text{よって } \vec{OM} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + t} \vec{OB} = \frac{1}{1 + 2t} \vec{b}, \quad \vec{ON} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + (1-t)} \vec{OC} = \frac{1}{3 - 2t} \vec{c}$$



- (2) $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であるから, (1) の結果から $OM = \frac{1}{1 + 2t}$, $ON = \frac{1}{3 - 2t}$

$$\begin{aligned} \text{よって } \triangle OMN &= \frac{1}{2} OM \cdot ON \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + 2t} \times \frac{1}{3 - 2t} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4(1 + 2t)(3 - 2t)} \end{aligned}$$

- (3) $f(t) = (1 + 2t)(3 - 2t)$ とおくと ($0 < t < 1$)

$$f(t) = -4 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + 4 \quad \text{ゆえに } 3 < f(t) \leq 4$$

$$\triangle OMN = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{f(t)} \quad \text{であるから, } \triangle OMN \text{ の面積の最小値は}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad \cos \theta - \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta \quad (0 < \theta < \pi) \quad \dots (*)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta \neq 0$ であるから $a = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta}$

$f(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta}$ とおくと

$$f'(\theta) = -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において, $f'(\theta) < 0$ であるから, $f(\theta)$ は単調減少.

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = -\infty$$

よって, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において, $f(\theta) = a$ をみたす θ はただ 1 つ存在する.

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ は, (*) の解ではない. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -\frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = -\frac{(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= -\frac{\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$f(\theta)$ の増減表は次のようになる.

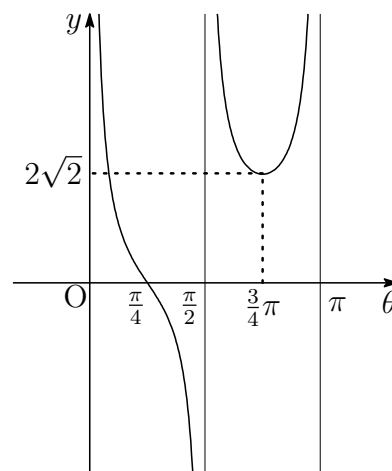
θ	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$	\dots	$\frac{3}{4}\pi$	\dots	(π)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		\searrow	$2\sqrt{2}$	\nearrow	

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi-0} f(\theta) = \infty$$

(1) および上の結果から, $y = f(\theta)$ のグラフは右のようになる.

$y = f(\theta)$ と $y = a$ の共有点の個数が, (*) の解の個数であるから

$$\begin{cases} 0 < a < 2\sqrt{2} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = 2\sqrt{2} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 2\sqrt{2} < a \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$



$$\boxed{3} \quad (1) \quad a_{n+1} = \frac{a_n + r^2}{a_n + 1} \quad \dots (*)$$

$a_1 = 1$ および上式より, すべての自然数 n に対して $a_n > 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$$(*) \text{ から} \quad a_{n+1} - r = (1 - r) \times \frac{a_n - r}{a_n + 1} \quad \dots (**)$$

$$a_{n+1} + r = (1 + r) \times \frac{a_n + r}{a_n + 1}$$

$$\text{上の2式より} \quad \frac{a_{n+1} - r}{a_{n+1} + r} = \frac{1 - r}{1 + r} \times \frac{a_n - r}{a_n + r}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{a_n - r}{a_n + r} = \left(\frac{1 - r}{1 + r} \right)^{n-1} \times \frac{a_1 - r}{a_1 + r} = \left(\frac{1 - r}{1 + r} \right)^n \quad \dots \textcircled{2}$$

$$r > 1 \text{ より} \quad \frac{1 - r}{1 + r} < 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ から

n が偶数のとき $a_n - r > 0$ すなわち $a_n > r$

n が奇数のとき $a_n - r < 0$ すなわち $a_n < r$

(2) (*), (**) より

$$\begin{aligned} a_{n+2} - r &= (1 - r) \times \frac{a_{n+1} - r}{a_{n+1} + 1} \\ &= (1 - r) \times \frac{(1 - r) \times \frac{a_n - r}{a_n + 1}}{\frac{a_n + r^2}{a_n + 1} + 1} = \frac{(1 - r)^2 (a_n - r)}{2a_n + r^2 + 1} \end{aligned}$$

(3) (1) の結果から, $a_{2n} > r$. これと (2) の結果から

$$a_{2n+2} - r = \frac{(1 - r)^2 (a_{2n} - r)}{2a_{2n} + r^2 + 1} < \frac{(1 - r)^2 (a_{2n} - r)}{2r + r^2 + 1} = \left(\frac{r - 1}{r + 1} \right)^2 \times (a_{2n} - r)$$

$$\text{よって} \quad \frac{a_{2n+2} - r}{a_{2n} - r} < \left(\frac{r - 1}{r + 1} \right)^2$$

(4) (3)の結果から, $\lambda = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$ とおくと

$$0 < \frac{a_4 - r}{a_2 - r} < \lambda, \quad 0 < \frac{a_6 - r}{a_4 - r} < \lambda, \quad \dots, \quad 0 < \frac{a_{2n} - r}{a_{2n-2} - r} < \lambda$$

これらの辺々をかけると

$$0 < \frac{a_{2n} - r}{a_2 - r} < \lambda^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a_{2n} - r < (a_2 - r)\lambda^{n-1}$$

$r > 1$ より, $0 < \lambda < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_2 - r)\lambda^{n-1} = 0$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - r) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = r$$

これと(*)により $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n} + r^2}{a_{2n} + 1} = \frac{r + r^2}{r + 1} = r$

解説 $r > 1$ であるから, ②より

$$\left| \frac{a_n - r}{a_n + r} \right| = \left| \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right| = \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^n$$

$0 < \frac{r-1}{r+1} < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^n = 0$

はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - r}{a_n + r} = 0$ よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$

また, ②より, 一般項は

$$a_n = \frac{r \left\{ 1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right\}}{1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n}$$

であるから, $-1 < \frac{1-r}{1+r} < 0$ より, 直接 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めることもできる.

また, 一般項から
$$a_n - r = \frac{2r \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n}{1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n}$$

ゆえに n が偶数のとき $a_n - r > 0$ すなわち $a_n > r$

n が奇数のとき $a_n - r < 0$ すなわち $a_n < r$

4 (1) $y = e^{ax}$ より $y' = ae^{ax}$

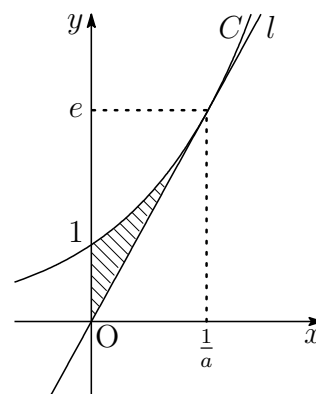
C 上の点 (t, e^{at}) における接線の方程式は

$$y - e^{at} = ae^{at}(x - t)$$

ゆえに $y = ae^{at}x + (1 - at)e^{at}$

これが原点を通るから

$$1 - at = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{a}$$



l の方程式は $y = aex$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad V_1 &= \pi \int_0^{\frac{1}{a}} (e^{ax})^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi e^2 \cdot \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2a} \left[e^{2ax} \right]_0^{\frac{1}{a}} - \frac{\pi e^2}{3a} \\ &= \frac{\pi(e^2 - 1)}{2a} - \frac{\pi e^2}{3a} = \frac{\pi(e^2 - 3)}{6a} \end{aligned}$$

(2) $y = e^{ax}$ より $x = \frac{1}{a} \log y$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad V_2 &= \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{1}{a} \right)^2 e - \frac{\pi}{a^2} \int_1^e (\log y)^2 dy \\ &= \frac{\pi e}{3a^2} - \frac{\pi}{a^2} \left[y \{ (\log y)^2 - 2 \log y + 2 \} \right]_1^e \\ &= \frac{\pi e}{3a^2} - \frac{\pi(e-2)}{a^2} = \frac{2\pi(3-e)}{3a^2} \end{aligned}$$

別解 $V_2 = 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} x(e^{ax} - aex) dx = 2\pi \left[e^{ax} \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{ae}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{a}} = \frac{2\pi(3-e)}{3a^2}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

(3) (1), (2) の結果を $V_1 = V_2$ に代入して

$$\frac{\pi(e^2 - 3)}{6a} = \frac{2\pi(3 - e)}{3a^2} \quad \text{よって} \quad a = \frac{4(3 - e)}{e^2 - 3}$$