平成26年度　熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，薬，工，医保健(放射線，検査)) 平成26年2月25日

問題 1 2 3 4

1 空間内の1辺の長さ1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする。また，点Dを$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{b}-\vec{a}$を満たす点，点Eを$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{c}-\vec{a}$を満たす点とし，点PをOAの中点とする。以下の問いに答えよ。

(1) $0<t<1$に対し，BDを$t:(1-t)$に内分する点をRとし，CEを$(1-t):t$に内分する点をSとする．また，OBとPRの交点をMとし，OCとPSの交点をNとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$と$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$を，それぞれ$t$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) △OMNの面積をtを用いて表せ。

(3) tが$0<t<1$の範囲を動くとき，△OMNの面積の最小値を求めよ。

2 aを正の定数とする。条件

$$\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta,\qquad 0<\theta<\pi$$

を満たすθについて，以下の問いに答えよ。

(1) 条件を満たすθは，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$の範囲で，ただ1つ存在することを示せ。

(2) 条件を満たすθの個数を求めよ。

3 r を $r > 1$ である実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定める。

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + r^2}{a_n + 1}$$

以下の問いに答えよ。

(1) n が奇数のとき $a_n < r$，n が偶数のとき $a_n > r$ であることを示せ。

(2) 任意の自然数 n について，$a_{n+2} - r$ を a_n と r を用いて表せ。

(3) 任意の自然数 n について，次の不等式を示せ。

$$\frac{a_{2n+2} - r}{a_{2n} - r} < \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ を求めよ。

4 a を正の実数とする。xy 平面上の曲線 $C : y = e^{ax}$ の接線で，原点を通るものを l とし，C と l および y 軸で囲まれた領域を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) S を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_1 を求めよ。

(2) S を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_2 を求めよ。

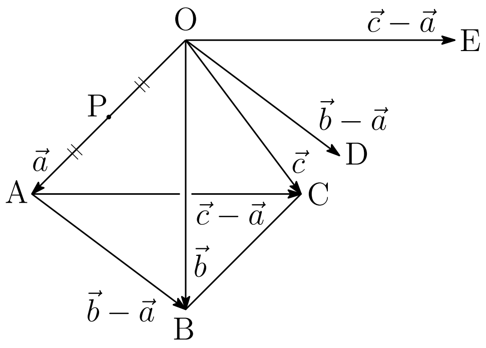
(3) $V_1 = V_2$ となるときの a の値を求めよ。

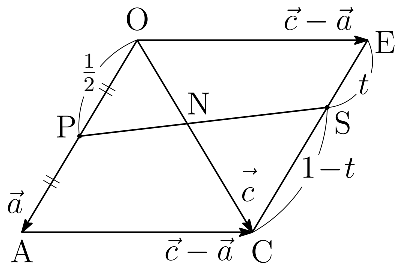
解答例

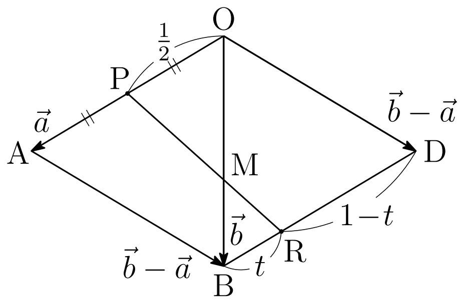
$\boxed{1}$ (1) $\triangle\mathrm{OPM} \backsim \triangle\mathrm{BRM}$，$\triangle\mathrm{OPN} \backsim \triangle\mathrm{CSN}$ であるから，
これらの相似比から

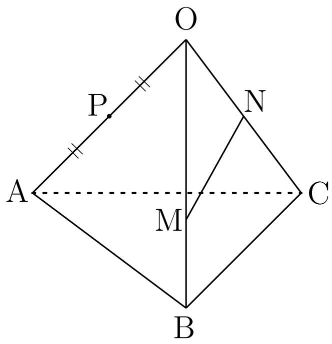
$$\mathrm{OM} : \mathrm{MB} = \frac{1}{2} : t, \quad \mathrm{ON} : \mathrm{NC} = \frac{1}{2} : (1-t)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{1+2t}\vec{b}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}}$









(2) $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であるから，(1) の結果から　$\mathrm{OM} = \dfrac{1}{1+2t}$，$\mathrm{ON} = \dfrac{1}{3-2t}$

よって　$\triangle\mathrm{OMN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{ON}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+2t} \times \dfrac{1}{3-2t} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4(1+2t)(3-2t)}}$$

(3) $f(t) = (1+2t)(3-2t)$ とおくと $(0 < t < 1)$

$$f(t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4 \quad \text{ゆえに} \quad 3 < f(t) \leqq 4$$

$\triangle\mathrm{OMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{1}{f(t)}$ であるから，$\triangle\mathrm{OMN}$ の面積の最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{16}}$$

■

2 (1) $\cos\theta - \sin\theta = a\sin\theta\cos\theta \quad (0 < \theta < \pi) \qquad \cdots(*)$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta \neq 0$ であるから　$a = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$

$f(\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと

$$f'(\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(\theta) < 0$ であるから，$f(\theta)$ は単調減少．

$$\lim_{\theta\to+0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = -\infty$$

よって，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(\theta) = a$ をみたす θ はただ 1 つ存在する．

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ は，$(*)$ の解ではない．$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

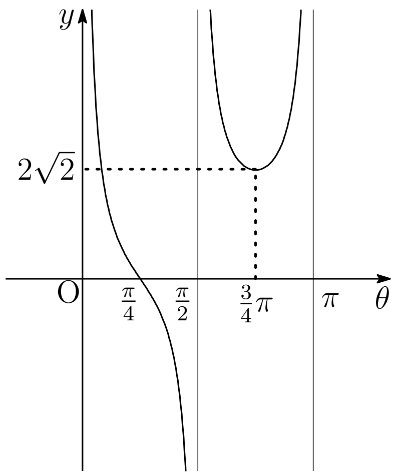
$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -\frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = -\frac{(\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \\ &= -\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \end{aligned}$$

$f(\theta)$ の増減表は次のようなる．

θ	$(\frac{\pi}{2})$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta\to\pi-0} f(\theta) = \infty$$

(1) および上の結果から，$y = f(\theta)$ のグラフは右のようになる．



$y = f(\theta)$ と $y = a$ の共有点の個数が，$(*)$ の解の個数であるから

$$\begin{cases} \mathbf{0 < a < 2\sqrt{2}} \text{ のとき} & \mathbf{1}\ \text{個} \\ \mathbf{a = 2\sqrt{2}} \text{ のとき} & \mathbf{2}\ \text{個} \\ \mathbf{2\sqrt{2} < a} \text{ のとき} & \mathbf{3}\ \text{個} \end{cases}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$a_{n+1}=\frac{a_n+r^2}{a_n+1}\quad\cdots(*)$$

$a_1=1$ および上式より，すべての自然数 n に対して　$a_n>0\quad\cdots①$

$(*)$ から　$$a_{n+1}-r=(1-r)\times\frac{a_n-r}{a_n+1}\quad\cdots(**)$$
$$a_{n+1}+r=(1+r)\times\frac{a_n+r}{a_n+1}$$

上の 2 式より　$$\frac{a_{n+1}-r}{a_{n+1}+r}=\frac{1-r}{1+r}\times\frac{a_n-r}{a_n+r}$$

ゆえに　$$\frac{a_n-r}{a_n+r}=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n-1}\times\frac{a_1-r}{a_1+r}=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n\quad\cdots②$$

$r>1$ より　$$\frac{1-r}{1+r}<0\quad\cdots③$$

①，②，③ から

n が偶数のとき　$a_n-r>0$　すなわち　$a_n>r$
n が奇数のとき　$a_n-r<0$　すなわち　$a_n<r$

(2) $(*)$，$(**)$ より

$$a_{n+2}-r=(1-r)\times\frac{a_{n+1}-r}{a_{n+1}+1}$$
$$=(1-r)\times\frac{(1-r)\times\dfrac{a_n-r}{a_n+1}}{\dfrac{a_n+r^2}{a_n+1}+1}=\boldsymbol{\frac{(1-r)^2(a_n-r)}{2a_n+r^2+1}}$$

(3) (1) の結果から，$a_{2n}>r$．これと (2) の結果から

$$a_{2n+2}-r=\frac{(1-r)^2(a_{2n}-r)}{2a_{2n}+r^2+1}<\frac{(1-r)^2(a_{2n}-r)}{2r+r^2+1}=\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2\times(a_{2n}-r)$$

よって　$$\frac{a_{2n+2}-r}{a_{2n}-r}<\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$$

(4) (3) の結果から，$\lambda = \left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^2$ とおくと

$$0 < \frac{a_4 - r}{a_2 - r} < \lambda, \quad 0 < \frac{a_6 - r}{a_4 - r} < \lambda, \quad \cdots, \quad 0 < \frac{a_{2n} - r}{a_{2n-2} - r} < \lambda$$

これらの辺々をかけると

$$0 < \frac{a_{2n} - r}{a_2 - r} < \lambda^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a_{2n} - r < (a_2 - r)\lambda^{n-1}$$

$r > 1$ より，$0 < \lambda < 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_2 - r)\lambda^{n-1} = 0$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - r) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_{2n} = r}$$

これと $(*)$ により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n} + r^2}{a_{2n} + 1} = \frac{r + r^2}{r + 1} = \boldsymbol{r}$

解説　$r > 1$ であるから，② より

$$\left|\frac{a_n - r}{a_n + r}\right| = \left|\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n\right| = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^n$$

$0 < \dfrac{r-1}{r+1} < 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^n = 0$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - r}{a_n + r} = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = r$

また，② より，一般項は

$$a_n = \frac{r\left\{1 + \left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n\right\}}{1 - \left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n}$$

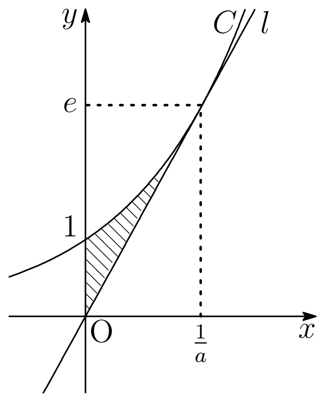
であるから，$-1 < \dfrac{1-r}{1+r} < 0$ より，直接 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めることもできる．

また，一般項から　$a_n - r = \dfrac{2r\left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n}$

ゆえに　n が偶数のとき　$a_n - r > 0$　すなわち　$a_n > r$

n が奇数のとき　$a_n - r < 0$　すなわち　$a_n < r$　■

4 (1) $y=e^{ax}$ より　$y'=ae^{ax}$



C 上の点 $(t,\ e^{at})$ における接線の方程式は

$$y-e^{at}=ae^{at}(x-t)$$

ゆえに　$y=ae^{at}x+(1-at)e^{at}$

これが原点を通るから

$$1-at=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{1}{a}$$

l の方程式は　$y=aex$

よって　$V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{a}}(e^{ax})^2\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi e^2\cdot\frac{1}{a}=\frac{\pi}{2a}\Big[\ e^{2ax}\ \Big]_0^{\frac{1}{a}}-\frac{\pi e^2}{3a}$

$$=\frac{\pi(e^2-1)}{2a}-\frac{\pi e^2}{3a}=\boldsymbol{\frac{\pi(e^2-3)}{6a}}$$

(2) $y=e^{ax}$ より　$x=\frac{1}{a}\log y$

よって　$V_2=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2e-\frac{\pi}{a^2}\int_1^e(\log y)^2\,dy$

$$=\frac{\pi e}{3a^2}-\frac{\pi}{a^2}\Big[\ y\{(\log y)^2-2\log y+2\}\ \Big]_1^e$$

$$=\frac{\pi e}{3a^2}-\frac{\pi(e-2)}{a^2}=\boldsymbol{\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}}$$

別解 $V_2=2\pi\int_0^{\frac{1}{a}}x(e^{ax}-aex)\,dx=2\pi\Big[\ e^{ax}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{ae}{3}x^3\ \Big]_0^{\frac{1}{a}}=\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}$

バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

(3) (1)，(2) の結果を $V_1=V_2$ に代入して

$$\frac{\pi(e^2-3)}{6a}=\frac{2\pi(3-e)}{3a^2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=\frac{4(3-e)}{e^2-3}}$$

■