

平成 25 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理, 薬, 工, 医保健 (放射線, 検査)) 平成 25 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (2) a_n を n の式で表せ。

2 O を原点とする空間内の 2 点 $A(-1, 1, 1)$, $B(2, 1, -2)$ に対して, $\vec{OA} \cdot \vec{OP} \geq 0$ かつ $\vec{OB} \cdot \vec{OP} \geq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 k に対して, $\vec{OQ} = k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき, k の値の範囲を求めよ。
- (2) $1 \leq s+t \leq 2$ を満たす実数 s, t に対して, $\vec{OR} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ によって定まる点 R からなる領域を E とする。このとき, 領域 D と E の共通部分の面積を求めよ。

3 半径 1, 中心角 θ ($0 < \theta < \pi$) の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(\theta)$ を求めよ。
- (2) $0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し, $f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。
- (3) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta$$

を求めよ。

4 xy 平面上で, 点 $(1, 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (2) 円 $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ と C の交点の x 座標を求めよ。さらに, 交点の個数を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{ より}$$

$$a_{n+1} = \{2a_{n+1} + (n+1)^2\} - (2a_n + n^2)$$

$$\text{ゆえに} \quad \mathbf{a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(2) \quad \text{初項 } a_1 \text{ は} \quad S_1 = 2a_1 + 1^2$$

$$S_1 = a_1 \text{ より} \quad a_1 = -1$$

① に対して、次の等式をみたす n の 1 次式 $f(n)$ を考える.

$$f(n+1) = 2f(n) - 2n - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$f(n) = pn + q \text{ とおくと} \quad p(n+1) + q = 2(pn + q) - 2n - 1$$

$$n \text{ に関する恒等式であるから} \quad p = 2, \quad q = 3$$

$$\text{ゆえに} \quad f(n) = 2n + 3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から} \quad a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$$\text{したがって} \quad a_n - f(n) = 2^{n-1}\{a_1 - f(1)\}$$

$$a_1 = -1, \textcircled{3} \text{ より} \quad a_n - (2n + 3) = 2^{n-1}(-1 - 5)$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{a_n = 2n + 3 - 3 \cdot 2^n} \quad \blacksquare$$

2 (1) $\vec{OA} = (-1, 1, 1)$, $\vec{OB} = (2, 1, -2)$ であるから

$$|\vec{OA}|^2 = 3, \quad |\vec{OB}|^2 = 9, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OQ} &= \vec{OA} \cdot \{k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB}\} \\ &= k|\vec{OA}|^2 + (1-k)\vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ &= k \cdot 3 + (1-k) \cdot (-3) = 6k - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OB} \cdot \vec{OQ} &= \vec{OB} \cdot \{k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB}\} \\ &= k\vec{OA} \cdot \vec{OB} + (1-k)|\vec{OB}|^2 \\ &= k \cdot (-3) + (1-k) \cdot 9 = -12k + 9 \end{aligned}$$

Q は D 上の点より, $\vec{OA} \cdot \vec{OQ} \geq 0$, $\vec{OB} \cdot \vec{OQ} \geq 0$ であるから

$$\begin{cases} 6k - 3 \geq 0 \\ -12k + 9 \geq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{4}$$

(2) D 内の点 P について, x, y を実数として

$$\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} \quad \dots \textcircled{1}$$

とすると

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OP} &= \vec{OA} \cdot (x\vec{OA} + y\vec{OB}) \\ &= x|\vec{OA}|^2 + y\vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ &= x \cdot 3 + y \cdot (-3) = 3(x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OB} \cdot \vec{OP} &= \vec{OB} \cdot (x\vec{OA} + y\vec{OB}) \\ &= x\vec{OA} \cdot \vec{OB} + y|\vec{OB}|^2 \\ &= x \cdot (-3) + y \cdot 9 = 3(-x + 3y) \end{aligned}$$

与えられた条件により, $\vec{OA} \cdot \vec{OP} \geq 0$, $\vec{OB} \cdot \vec{OP} \geq 0$ であるから

$$x - y = \alpha, \quad -x + 3y = \beta$$

とおくと, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. また上の 2 式から

$$x = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta, \quad y = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \quad \dots \textcircled{2}$$

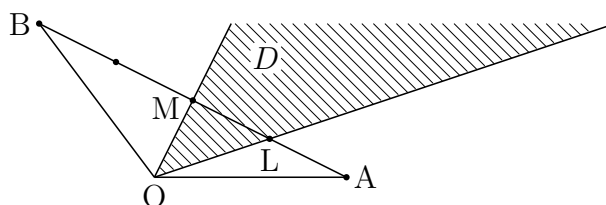
②を①に代入すると

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\vec{OA} + \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\vec{OB} \\ &= \frac{1}{2}\alpha(3\vec{OA} + \vec{OB}) + \frac{1}{2}\beta(\vec{OA} + \vec{OB}) \\ &= 2\alpha \times \frac{3\vec{OA} + \vec{OB}}{4} + \beta \times \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}\end{aligned}$$

線分 AB を 1 : 3 に内分する点を L, 中点を M とすると

$$\vec{OP} = 2\alpha\vec{OL} + \beta\vec{OM} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0)$$

ゆえに, P の表す領域 D は, 次の図の斜線部分で, 境界線を含む.



$s + t = \lambda$ とおくと $1 \leq \lambda \leq 2$

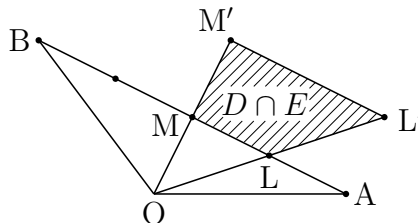
さらに $s' = \frac{s}{\lambda}$, $t' = \frac{t}{\lambda}$ とおくと $s' + t' = 1$

$\vec{OA}' = \lambda\vec{OA}$, $\vec{OB}' = \lambda\vec{OB}$ である 2 点 A' , B' をとると

$$\begin{aligned}\vec{OR} &= s\vec{OA} + t\vec{OB} \\ &= \frac{s}{\lambda} \cdot \lambda\vec{OA} + \frac{t}{\lambda} \cdot \lambda\vec{OB} \\ &= s'\vec{OA}' + t'\vec{OB}' \quad (s' + t' = 1)\end{aligned}$$

したがって, R は直線 $A'B'$ 上の点である.

$\overrightarrow{OL'} = 2\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$ である 2 点 L' , M' をとると, $1 \leq \lambda \leq 2$ により, 領域 $D \cap E$ は, 四角形 $LMM'L'$ の内部とその周上である.



求める面積を S とすると

$$S = (2^2 - 1) \times \triangle OLM, \quad \triangle OLM = \frac{1}{4} \times \triangle OAB$$

ゆえに
$$S = \frac{3}{4} \times \triangle OAB$$

$\triangle OAB$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3 \times 9 - (-3)^2} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

よって
$$S = \frac{3}{4} \times \triangle OAB = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} \sqrt{2} = \frac{9}{8} \sqrt{2}$$
 ■

3 (1) $r = f(\theta)$ とおくと、右の図から

$$(1-r) \sin \frac{\theta}{2} = r \quad \cdots \textcircled{1}$$

ゆえに
$$r = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}}$$

よって
$$f(\theta) = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}}$$

(2) $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから $\sin \frac{\theta}{2} > 0$, $\cos \frac{\theta}{2} > 0$

また、 $r > 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ より $1 - r > 0$

$\textcircled{1}$ の両辺を θ で微分すると

$$-r' \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}(1-r) \cos \frac{\theta}{2} = r'$$

ゆえに
$$\left(1 + \sin \frac{\theta}{2}\right) r' = \frac{1}{2}(1-r) \cos \frac{\theta}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ において、 $1 + \sin \frac{\theta}{2} > 0$, $1 - r > 0$, $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ であるから $r' > 0$

さらに、 $\textcircled{2}$ の両辺を θ で微分すると

$$\frac{1}{2} r' \cos \frac{\theta}{2} + \left(1 + \sin \frac{\theta}{2}\right) r'' = -\frac{1}{2} r' \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}(1-r) \sin \frac{\theta}{2}$$

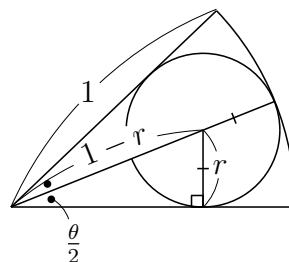
ゆえに
$$\left(1 + \sin \frac{\theta}{2}\right) r'' = -\left\{r' \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}(1-r) \sin \frac{\theta}{2}\right\}$$

上式において $r' > 0$, $1 - r > 0$, $\sin \frac{\theta}{2} > 0$, $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ であるから $r'' < 0$

したがって $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ において $r' > 0$, $r'' < 0$

よって $0 < \theta < \pi$ の範囲で、 $f(\theta)$ は単調増加、 $f'(\theta)$ は単調減少。

補足
$$f'(\theta) = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2(1 + \sin \frac{\theta}{2})^2} > 0, \quad f''(\theta) = \frac{\sin \frac{\theta}{2} - 2}{4(1 + \sin \frac{\theta}{2})^2} < 0$$



$$(3) \quad x = \frac{\theta}{2} \text{ とおくと } \frac{d\theta}{dx} = 2 \quad \begin{array}{c|c} \theta & \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline x & \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x + \sin x - 1}{\cos^2 x} dx \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= 2 \left[x + \frac{1}{\cos x} - \tan x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{6} - 2 + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

■

4 (1) C 上の点を $P(x, y)$ とすると、条件により

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + |x| = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 - |x| \quad \cdots \textcircled{1}$$

①の両辺を平方して整理すると

$$y^2 = 2x - 4|x| + 3$$

上の方程式で x のとりうる値の範囲は

$$2x - 4|x| + 3 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 4|x| \leq 2x + 3$$

$$\text{ゆえに} \quad -(2x + 3) \leq 4x \leq 2x + 3$$

$$\textcircled{1} \text{ の } 2 - |x| \geq 0 \text{ に注意して} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

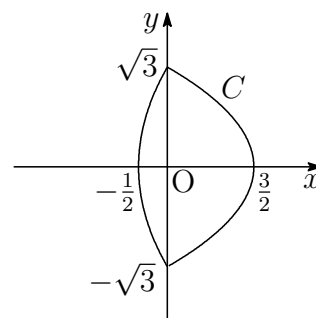
$$\text{したがって} \quad C: y^2 = 2x - 4|x| + 3$$

$$C \text{ は } x \geq 0 \text{ のとき } y^2 = -2x + 3 \quad \text{すなわち} \quad x = -\frac{1}{2}(y^2 - 3),$$

$$x < 0 \text{ のとき } y^2 = 6x + 3 \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{6}(y^2 - 3)$$

C の表す図形は右の図の曲線 (閉曲線) で、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{ -\frac{1}{2}(y^2 - 3) - \frac{1}{6}(y^2 - 3) \right\} dy \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\sqrt{3}} (3 - y^2) dy \\ &= \frac{4}{3} \left[3y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{8}{3} \sqrt{3} \end{aligned}$$



- (2) 円 $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ と $C: y^2 = 2x - 4|x| + 3$ の交点は $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ の範囲にあり, 2式から y^2 を消去し整理すると

$$x^2 + 2x - 4|x| + \frac{3}{4} = 0 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right) \quad \dots(*)$$

(i) $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ のとき $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$

x の範囲に注意してこれを解いて $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

(ii) $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ のとき $x^2 + 6x + \frac{3}{4} = 0$

x の範囲に注意してこれを解いて $x = \frac{-6 + \sqrt{33}}{2}$

したがって, 求める交点の x 座標は $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-6 + \sqrt{33}}{2}$

円と C はともに x 軸に関して対称であるから, 方程式(*)の実数解について, $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ にある解1個に対して交点は2個あり, $x = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ に対して交点は1個である.

ゆえに, $x = \frac{1}{2}, \frac{-6 + \sqrt{33}}{2}$ に対して交点は2個ずつあり, $x = \frac{3}{2}$ に対して交点は1個である. よって, 求める交点の個数は **5個** ■