平成 25 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 平成 25 年 2 月 25 日

1 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。

2 O を原点とする空間内の 2 点 A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1, -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

(2) $1 \leqq s + t \leqq 2$ を満たす実数 s，t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 R からなる領域を E とする。このとき，領域 D と E の共通部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 半径 1，中心角 θ $(0 < \theta < \pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(\theta)$ を求めよ。

(2) $0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\, d\theta$$

を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ xy 平面上で，点 $(1,\ 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 円 $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$ と C の交点の x 座標を求めよ。さらに，交点の個数を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ より

$$a_{n+1} = \{2a_{n+1} + (n+1)^2\} - (2a_n + n^2)$$

ゆえに　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1}$　$\cdots$①

(2) 初項 a_1 は　$S_1 = 2a_1 + 1^2$

$S_1 = a_1$ より　$a_1 = -1$

① に対して，次の等式をみたす n の 1 次式 $f(n)$ を考える．

$$f(n+1) = 2f(n) - 2n - 1 \quad \cdots ②$$

$f(n) = pn + q$ とおくと　$p(n+1) + q = 2(pn+q) - 2n - 1$

n に関する恒等式であるから　$p = 2$，$q = 3$

ゆえに　$f(n) = 2n + 3$　$\cdots$③

① − ② から　$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$

したがって　$a_n - f(n) = 2^{n-1}\{a_1 - f(1)\}$

$a_1 = -1$，③ より　$a_n - (2n+3) = 2^{n-1}(-1-5)$

よって　$\boldsymbol{a_n = 2n + 3 - 3 \cdot 2^n}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,-2)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=9,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-3$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\\&=k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=k\cdot3+(1-k)\cdot(-3)=6k-3\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\\&=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=k\cdot(-3)+(1-k)\cdot9=-12k+9\end{aligned}$$

Q は D 上の点より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq0$ であるから

$$\left\{\begin{array}{l}6k-3\geqq0\\-12k+9\geqq0\end{array}\right.\qquad\text{ゆえに}\qquad \boldsymbol{\frac{1}{2}\leqq k\leqq\frac{3}{4}}$$

(2) D 内の点 P について，x，y を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots①$$

とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=x|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+y\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=x\cdot3+y\cdot(-3)=3(x-y)\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=x\cdot(-3)+y\cdot9=3(-x+3y)\end{aligned}$$

与えられた条件により，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq0$ であるから

$$x-y=\alpha,\quad -x+3y=\beta$$

とおくと，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$．また上の 2 式から

$$x=\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,\quad y=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\quad\cdots②$$

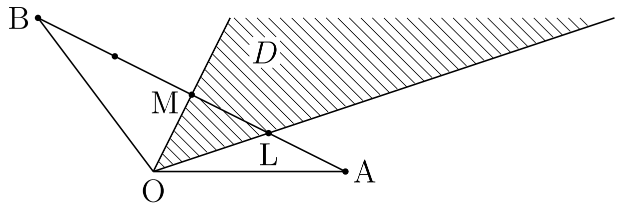
② を ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{1}{2}\alpha(3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + \frac{1}{2}\beta(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= 2\alpha \times \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4} + \beta \times \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\end{aligned}$$

線分 AB を $1:3$ に内分する点を L，中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad (\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0)$$

ゆえに，P の表す領域 D は，次の図の斜線部分で，境界線を含む．



$s + t = \lambda$ とおくと　　$1 \leqq \lambda \leqq 2$

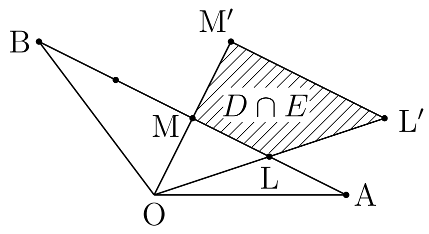
さらに $s' = \dfrac{s}{\lambda}$，$t' = \dfrac{t}{\lambda}$ とおくと　　$s' + t' = 1$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である 2 点 A′，B′ をとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{s}{\lambda}\cdot\lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t}{\lambda}\cdot\lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}} \qquad (s' + t' = 1)\end{aligned}$$

したがって，R は直線 A′B′ 上の点である．

$\overrightarrow{\mathrm{OL'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ である 2 点 L$'$，M$'$ をとると，$1 \leqq \lambda \leqq 2$ により，領域 $D \cap E$ は，四角形 LMM$'$L$'$ の内部とその周上である．



求める面積を S とすると

$$S = (2^2 - 1) \times \triangle\mathrm{OLM}, \quad \triangle\mathrm{OLM} = \frac{1}{4} \times \triangle\mathrm{OAB}$$

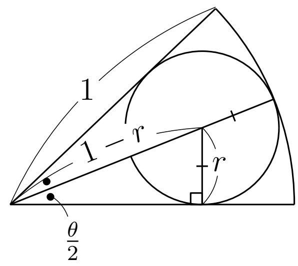
ゆえに　　　　$S = \dfrac{3}{4} \times \triangle\mathrm{OAB}$

$\triangle$OAB の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3 \times 9 - (-3)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　　$S = \dfrac{3}{4} \times \triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{2}\sqrt{2} = \boldsymbol{\dfrac{9}{8}\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $r=f(\theta)$ とおくと，右の図から



$$(1-r)\sin\frac{\theta}{2}=r \quad \cdots ①$$

ゆえに　$r=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

よって　$\boldsymbol{f(\theta)=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}}$

(2) $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

また，$r>0$ であるから，① より　$1-r>0$

① の両辺を θ で微分すると

$$-r'\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}(1-r)\cos\frac{\theta}{2}=r'$$

ゆえに　$\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r'=\dfrac{1}{2}(1-r)\cos\dfrac{\theta}{2} \quad \cdots ②$

② において，$1+\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$1-r>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから　$r'>0$

さらに，② の両辺を θ で微分すると

$$\frac{1}{2}r'\cos\frac{\theta}{2}+\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)r''=-\frac{1}{2}r'\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}(1-r)\sin\frac{\theta}{2}$$

ゆえに　$\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r''=-\left\{r'\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{4}(1-r)\sin\dfrac{\theta}{2}\right\}$

上式において $r'>0$，$1-r>0$，$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから　$r''<0$

したがって　$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ において　$r'>0$，$r''<0$

よって　$0<\theta<\pi$ の範囲で，$f(\theta)$ は単調増加，$f'(\theta)$ は単調減少．

補足 $f'(\theta)=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}>0$，$f''(\theta)=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}-2}{4\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}<0$

(3) $x = \dfrac{\theta}{2}$ とおくと　$\dfrac{d\theta}{dx} = 2$

θ	$\frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{2}$
x	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{4}$

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\, d\theta &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\, dx \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x + \sin x - 1}{\cos^2 x}\, dx \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx \\
&= 2\left[\, x + \frac{1}{\cos x} - \tan x \,\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{6} - 2 + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，条件により

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x|=2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-|x| \quad \cdots ①$$

① の両辺を平方して整理すると

$$y^2=2x-4|x|+3$$

上の方程式で x のとりうる値の範囲は

$$2x-4|x|+3 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 4|x| \leqq 2x+3$$

ゆえに $\qquad -(2x+3) \leqq 4x \leqq 2x+3$

① の $2-|x| \geqq 0$ に注意して $\quad -\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

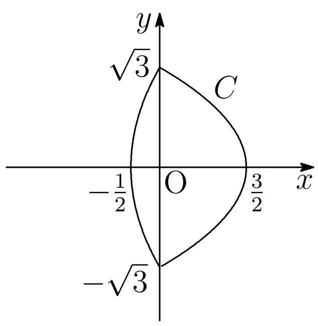
したがって $\qquad C : y^2=2x-4|x|+3$

C は $\quad x \geqq 0$ のとき $\quad y^2=-2x+3 \quad$ すなわち $\quad x=-\dfrac{1}{2}(y^2-3)$,

$\qquad x<0$ のとき $\quad y^2=6x+3 \quad$ すなわち $\quad x=\dfrac{1}{6}(y^2-3)$

C の表す図形は右の図の曲線 (閉曲線) で，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{-\frac{1}{2}(y^2-3)-\frac{1}{6}(y^2-3)\right\} dy \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}} (3-y^2)\, dy \\ &= \frac{4}{3}\left[\ 3y-\frac{y^3}{3}\ \right]_0^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{3}} \end{aligned}$$



(2) 円 $x^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ と $C:y^2=2x-4|x|+3$ の交点は $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の範囲にあり，2 式から y^2 を消去し整理すると

$$x^2+2x-4|x|+\frac{3}{4}=0 \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right) \quad \cdots(*)$$

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき　　$x^2-2x+\dfrac{3}{4}=0$

x の範囲に注意してこれを解いて　$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$

(ii) $-\dfrac{1}{2} \leqq x < 0$ のとき　　$x^2+6x+\dfrac{3}{4}=0$

x の範囲に注意してこれを解いて　$x=\dfrac{-6+\sqrt{33}}{2}$

したがって，求める交点の x 座標は　　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{-6+\sqrt{33}}{2}}$

円と C はともに x 軸に関して対称であるから，方程式 $(*)$ の実数解について，$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ にある解 1 個に対して交点は 2 個あり，$x=-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$ に対して交点は 1 個である．

ゆえに，$x=\frac{1}{2},\ \frac{-6+\sqrt{33}}{2}$ に対して交点は 2 個ずつあり，$x=\frac{3}{2}$ に対して交点は 1 個である．よって，求める交点の個数は　　**5 個**