

平成24年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 薬, 工, 医保健(放射線, 検査))平成24年2月25日

問題 1 2 3 4

1 以下の問いに答えよ。

- (1) k を整数とすると、 x の方程式 $x^2 - k^2 = 12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ。
- (2) x の方程式 $(2a - 1)x^2 + (3a + 2)x + a + 2 = 0$ が少なくとも1つ整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

2 実数 c に対して、行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で表される1次変換を T とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) T は原点の回りの回転移動と原点中心の拡大(相似変換)との合成変換であることを示せ。
- (2) xy 平面上の同一直線上にない3点 P, Q, R が T によってそれぞれ P', Q', R' に移るとする。三角形 $P'Q'R'$ の面積が三角形 PQR の面積の2倍となる c の値を求めよ。
- (3) $c = 2$ とする。楕円

$$E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする。 E が E' の内部にあることを示し、 E' の内部にあり E の外部にある部分の面積を求めよ。

- 3 2つの関数 $f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$ と $g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$ について、以下の問いに答えよ。

問1 $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

問2 $f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ をそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の第 n 次導関数とする。

(1) $n \geq 2$ のとき、 $f^{(n)}(x)$ および $g^{(n)}(x)$ を、 $f^{(n-1)}(x)$ と $g^{(n-1)}(x)$ を用いて表せ。

(2) $\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2$ を求めよ。

(3) 実数 a について、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2 + \{g^{(n)}(a)\}^2}$ の和を求めよ。

- 4 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t - x \cos t| dt \quad (x > 0)$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $a > 0$ のとき、 $a = \tan \theta$ を満たす θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) に対して、 $\cos \theta$ を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答例

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (1) \quad & \text{整数解を } m \text{ とすると} & m^2 - k^2 = 12 \\ & & |m|^2 - |k|^2 = 12 \\ & \text{ゆえに} & (|m| + |k|)(|m| - |k|) = 12 \end{aligned}$$

ここで, $|m| + |k| = (|m| - |k|) + 2|k|$ および上式の偶奇性により, $|m| + |k|$, $|m| - |k|$ はともに偶数であるから

$$\begin{cases} |m| + |k| = 6 \\ |m| - |k| = 2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |m| = 4, \quad |k| = 2$$

よって $k = \pm 2$

- (2) a は整数であるから $2a - 1 \neq 0$
したがって, x の方程式 $(2a - 1)x^2 + (3a + 2)x + a + 2 = 0$ の解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(3a + 2) \pm \sqrt{(3a + 2)^2 - 4(2a - 1)(a + 2)}}{2(2a - 1)} \\ &= \frac{-(3a + 2) \pm \sqrt{a^2 + 12}}{2(2a - 1)} \end{aligned}$$

この方程式が整数解をもつとき

$$l^2 = a^2 + 12 \quad \text{すなわち} \quad l^2 - a^2 = 12$$

を満たす整数 l が存在するから, (1) の結果から, $a = \pm 2$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに, } a = 2 \text{ のとき} & \quad x = -2, -\frac{2}{3} \\ a = -2 \text{ のとき} & \quad x = 0, -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

よって $a = 2$ のとき $x = -2$
 $a = -2$ のとき $x = 0$



2 (1) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}, \sin \theta = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ とおくと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+c^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} & -\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{1+c^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

T は、原点を中心に θ だけ回転する回転移動と原点を中心に $\sqrt{1+c^2}$ だけ拡大する相似変換との合成変換である。

- (2) 3点 P, Q, R の原点 O に関する位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ とし、また3点 P', Q', R' の原点 O に関する位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}', \vec{q}', \vec{r}'$ とする。 $\triangle PQR$ の面積 S は、 $\vec{u} = \vec{q} - \vec{p}, \vec{v} = \vec{r} - \vec{p}$ とおくと

$$S = \frac{1}{2} |\det(\vec{u} \ \vec{v})|$$

$\vec{p}' = A\vec{p}, \vec{q}' = A\vec{q}, \vec{r}' = A\vec{r}$ であるから

$$\overrightarrow{P'Q'} = \vec{q}' - \vec{p}' = A\vec{q} - A\vec{p} = A(\vec{q} - \vec{p}) = A\vec{u}$$

$$\overrightarrow{P'R'} = \vec{r}' - \vec{p}' = A\vec{r} - A\vec{p} = A(\vec{r} - \vec{p}) = A\vec{v}$$

$\triangle P'Q'R'$ の面積 S' は

$$S' = \frac{1}{2} |\det(A\vec{u} \ A\vec{v})| = \frac{1}{2} |\det(A(\vec{u} \ \vec{v}))|$$

$$= \frac{1}{2} |\det A \det(\vec{u} \ \vec{v})| = \frac{1}{2} |\det A| |\det(\vec{u} \ \vec{v})|$$

したがって $S' = |\det A| S$

条件により、 $|\det A| = 2$ であるから $|1+c^2| = 2$ よって $c = \pm 1$

補足

正方行列 A, B について、 $\det(\mathbf{AB}) = \det A \det B$ が成り立つ。

- (3) $c = 2$ のとき、(1)の結果から、 E と E' の相似比は $1 : \sqrt{5}$ である。楕円の中心から楕円上の点の距離は長軸上で最大となり、短軸上で最小となるので、原点から、 E, E' までの距離をそれぞれ d, d' とすると

$$1 \leq d \leq 2, \quad \sqrt{5} \leq d' \leq 2\sqrt{5}$$

したがって、 E は E' の内部にある。また、求める面積は

$$\{(\sqrt{5})^2 - 1\} \pi \cdot 2 \cdot 1 = 8\pi$$



3 問1 $f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt = \left[e^t \sin t \right]_0^x = e^x \sin x$

$$g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt = \left[e^t \cos t \right]_0^x = e^x \cos x - 1$$

問2 (1) $f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$ と $g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$ をそれぞれ x で微分すると

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$g'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$$

問1の結果から $e^x \sin x = f(x)$, $e^x \cos x = g(x) + 1$ を代入すると

$$f'(x) = f(x) + \{g(x) + 1\}$$

$$g'(x) = \{g(x) + 1\} - f(x)$$

これらを $(n-1)$ 回微分すると ($n \geq 2$)

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) + g^{(n-1)}(x)$$

$$g^{(n)}(x) = -f^{(n-1)}(x) + g^{(n-1)}(x)$$

(2) (1)の結果から

$$\begin{aligned} & \{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2 \\ &= \{f^{(n-1)}(x) + g^{(n-1)}(x)\}^2 + \{-f^{(n-1)}(x) + g^{(n-1)}(x)\}^2 \\ &= 2[\{f^{(n-1)}(x)\}^2 + \{g^{(n-1)}(x)\}^2] \end{aligned}$$

したがって

$$\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2 = 2^{n-1}[\{f'(x)\}^2 + \{g'(x)\}^2]$$

さらに

$$\begin{aligned} \{f'(x)\}^2 + \{g'(x)\}^2 &= (e^x \sin x + e^x \cos x)^2 + (e^x \cos x - e^x \sin x)^2 \\ &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

よって、上の2式より $\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2 = 2^{n-1} \cdot 2e^{2x} = 2^n e^{2x}$

(3) (2)の結果から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2 + \{g^{(n)}(a)\}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2a}}{2^n e^{2a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

補足 $n \geq 2$ のとき, 問 2(1) の結果から

$$\begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(x) \\ g^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

ここで, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ であることから

$$\begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^{n-1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4}(n-1) & \sin \frac{\pi}{4}(n-1) \\ -\sin \frac{\pi}{4}(n-1) & \cos \frac{\pi}{4}(n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$$

また, $\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = \sqrt{2}e^x \begin{pmatrix} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^n e^x \begin{pmatrix} \sin(x + \frac{n}{4}\pi) \\ \cos(x + \frac{n}{4}\pi) \end{pmatrix}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立する. ■

4 (1) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ に $\tan \theta = a$ を代入すると

$$1 + a^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + a^2}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ により, } \cos \theta > 0 \text{ であるから } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

(2) $x > 0$ に対して, 次式を満たす θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) をとる.

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

このとき, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ であるから

$$\sin t - x \cos t = \sqrt{1 + x^2} \sin(t - \theta)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t - x \cos t| dt \\ &= \sqrt{1 + x^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t - \theta)| dt \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 + x^2} \left\{ \int_0^{\theta} \{-\sin(t - \theta)\} dt + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t - \theta) dt \right\} \\ &= \sqrt{1 + x^2} \left\{ \left[\cos(t - \theta) \right]_0^{\theta} + \left[-\cos(t - \theta) \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\ &= \sqrt{1 + x^2} (2 - \sin \theta - \cos \theta) \\ &= 2\sqrt{1 + x^2} - x - 1 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{1+x^2}(2x + \sqrt{1+x^2})} \end{aligned}$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	極小 $\sqrt{3}-1$	↗

よって、 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値 $\sqrt{3}-1$ をとる。

別解 (2) により

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad x = \tan \theta$$

ここで、 $g(\theta) = f(x)$ とおくと

$$g(\theta) = \frac{2}{\cos \theta} - \tan \theta - 1 \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g'(\theta) = \frac{2 \sin \theta - 1}{\cos^2 \theta}$$

したがって、 $g(\theta)$ の増減表は、次のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		-	0	+	
$g(\theta)$		↘	極小 $\sqrt{3}-1$	↗	

また、 $x = \tan \theta$ により、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって、 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値 $\sqrt{3}-1$ をとる。 ■