平成 24 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 平成 24 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) k を整数とするとき，x の方程式 $x^2-k^2=12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ。

(2) x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 c に対して，行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を T とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) T は原点の回りの回転移動と原点中心の拡大 (相似変換) との合成変換であることを示せ。

(2) xy 平面上の同一直線上にない 3 点 P，Q，R が T によってそれぞれ P$'$，Q$'$，R$'$ に移るとする。三角形 P$'$Q$'$R$'$ の面積が三角形 PQR の面積の 2 倍となる c の値を求めよ。

(3) $c=2$ とする。楕円

$$E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする。E が E' の内部にあることを示し，E' の内部にあり E の外部にある部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2つの関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt$ と $g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\cos t-\sin t)dt$ について，以下の問いに答えよ。

問1 $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

問2 $f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ をそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の第 n 次導関数とする。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$f^{(n)}(x)$ および $g^{(n)}(x)$ を，$f^{(n-1)}(x)$ と $g^{(n-1)}(x)$ を用いて表せ。

(2) $\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2$ を求めよ。

(3) 実数 a について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2+\{g^{(n)}(a)\}^2}$ の和を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-x\cos t\right|dt \qquad (x>0)$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，$a=\tan\theta$ を満たす $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，$\cos\theta$ を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 整数解を m とすると $m^2 - k^2 = 12$

$$|m|^2 - |k|^2 = 12$$

ゆえに $(|m| + |k|)(|m| - |k|) = 12$

ここで，$|m|+|k| = (|m|-|k|)+2|k|$ および上式の偶奇性により，$|m|+|k|$, $|m| - |k|$ はともに偶数であるから

$$\begin{cases} |m| + |k| = 6 \\ |m| - |k| = 2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |m| = 4, \quad |k| = 2$$

よって　$\boldsymbol{k = \pm 2}$

(2) a は整数であるから　$2a - 1 \neq 0$

したがって，x の方程式 $(2a-1)x^2 + (3a+2)x + a + 2 = 0$ の解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(3a+2) \pm \sqrt{(3a+2)^2 - 4(2a-1)(a+2)}}{2(2a-1)} \\ &= \frac{-(3a+2) \pm \sqrt{a^2+12}}{2(2a-1)} \end{aligned}$$

この方程式が整数解をもつとき

$$l^2 = a^2 + 12 \quad \text{すなわち} \quad l^2 - a^2 = 12$$

を満たす整数 l が存在するから，(1) の結果から，$a = \pm 2$

ゆえに，$a = 2$ のとき　$x = -2, -\dfrac{2}{3}$

$a = -2$ のとき　$x = 0, -\dfrac{4}{5}$

よって　$\boldsymbol{a = 2}$ **のとき**　$\boldsymbol{x = -2}$

$\boldsymbol{a = -2}$ **のとき**　$\boldsymbol{x = 0}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}$，$\sin\theta = \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ とおくと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+c^2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} & -\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \\ \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \end{pmatrix}$$
$$= \sqrt{1+c^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

T は，原点を中心に θ だけ回転する回転移動と原点を中心に $\sqrt{1+c^2}$ だけ拡大する相似変換との合成変換である．

(2) 3点P，Q，Rの原点Oに関する位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とし，また3点P′，Q′，R′の原点Oに関する位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p'}$，$\vec{q'}$，$\vec{r'}$ とする．△PQRの面積 S は，$\vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$，$\vec{v} = \vec{r} - \vec{p}$ とおくと

$$S = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|$$

$\vec{p'} = A\vec{p}$，$\vec{q'} = A\vec{q}$，$\vec{r'} = A\vec{r}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} = \vec{q'} - \vec{p'} = A\vec{q} - A\vec{p} = A(\vec{q} - \vec{p}) = A\vec{u}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P'R'}} = \vec{r'} - \vec{p'} = A\vec{r} - A\vec{p} = A(\vec{r} - \vec{p}) = A\vec{v}$$

△P′Q′R′の面積 S' は

$$S' = \frac{1}{2}\left|\det(A\vec{u}\ A\vec{v})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(A(\vec{u}\ \vec{v}))\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\det A\det(\vec{u}\ \vec{v})\right| = \frac{1}{2}\left|\det A\right|\left|\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|$$

したがって　　$S' = |\det A|S$

条件により，$|\det A| = 2$ であるから　$|1+c^2| = 2$　よって　$\boldsymbol{c = \pm 1}$

補足

正方行列 A，B について，$\mathbf{det}(\boldsymbol{AB}) = \mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\,\mathbf{det}\,\boldsymbol{B}$ が成り立つ．

(3) $c = 2$ のとき，(1) の結果から，E と E' の相似比は $1 : \sqrt{5}$ である．
楕円の中心から楕円上の点の距離は長軸上で最大となり，短軸上で最小となるので，原点から，E，E' までの距離をそれぞれ d，d' とすると

$$1 \leqq d \leqq 2, \quad \sqrt{5} \leqq d' \leqq 2\sqrt{5}$$

したがって，E は E' の内部にある．また，求める面積は

$$\{(\sqrt{5})^2 - 1\}\pi 2\cdot 1 = \boldsymbol{8\pi}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 問 1 $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt=\Big[\ e^t\sin t\ \Big]_0^x=\boldsymbol{e^x\sin x}$

$g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\cos t-\sin t)dt=\Big[\ e^t\cos t\ \Big]_0^x=\boldsymbol{e^x\cos x-1}$

問 2 (1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt$ と $g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\cos t-\sin t)dt$ をそれぞれ x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^x\sin x+e^x\cos x\\ g'(x)&=e^x\cos x-e^x\sin x\end{aligned}$$

問 1 の結果から $e^x\sin x=f(x)$，$e^x\cos x=g(x)+1$ を代入すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=f(x)+\{g(x)+1\}\\ g'(x)&=\{g(x)+1\}-f(x)\end{aligned}$$

これらを $(n-1)$ 回微分すると $(n\geqq 2)$

$$\boldsymbol{\begin{aligned} f^{(n)}(x)&=f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)\\ g^{(n)}(x)&=-f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)\end{aligned}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} &\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2\\ =&\{f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)\}^2+\{-f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)\}^2\\ =&2\big[\{f^{(n-1)}(x)\}^2+\{g^{(n-1)}(x)\}^2\big]\end{aligned}$$

したがって

$$\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2=2^{n-1}\big[\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2\big]$$

さらに

$$\begin{aligned} \{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2&=(e^x\sin x+e^x\cos x)^2+(e^x\cos x-e^x\sin x)\\ &=2e^{2x}\end{aligned}$$

よって，上の 2 式より　$\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2=2^{n-1}\cdot 2e^{2x}=\boldsymbol{2^ne^{2x}}$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2+\{g^{(n)}(a)\}^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2a}}{2^ne^{2a}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\mathbf{1}$$

補足

$n \geqq 2$ のとき，問 2(1) の結果から

$$\begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(x) \\ g^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ であることから

$$\begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^{n-1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4}(n-1) & \sin\frac{\pi}{4}(n-1) \\ -\sin\frac{\pi}{4}(n-1) & \cos\frac{\pi}{4}(n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$$

また，$\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = \sqrt{2}e^x \begin{pmatrix} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^n e^x \begin{pmatrix} \sin\left(x + \frac{n}{4}\pi\right) \\ \cos\left(x + \frac{n}{4}\pi\right) \end{pmatrix}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立する．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に $\tan\theta=a$ を代入すると

$$1+a^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\quad ゆえに\quad \cos^2\theta=\frac{1}{1+a^2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ により，$\cos\theta>0$ であるから　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}}$

(2) $x>0$ に対して，次式を満たす θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をとる．

$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

このとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ であるから

$$\sin t-x\cos t=\sqrt{1+x^2}\sin(t-\theta)$$

したがって

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-x\cos t\right|dt\\&=\sqrt{1+x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin(t-\theta)\right|dt\end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{1+x^2}\left\{\int_0^{\theta}\{-\sin(t-\theta)\}\,dt+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-\theta)\,dt\right\}\\&=\sqrt{1+x^2}\left\{\Big[\cos(t-\theta)\Big]_0^{\theta}+\Big[-\cos(t-\theta)\Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\right\}\\&=\sqrt{1+x^2}(2-\sin\theta-\cos\theta)\\&=\boldsymbol{2\sqrt{1+x^2}-x-1}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{3x^2-1}{\sqrt{1+x^2}(2x+\sqrt{1+x^2})} \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる．

別解

(2) により

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad x = \tan\theta$$

ここで，$g(\theta) = f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{2}{\cos\theta} - \tan\theta - 1 \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\ g'(\theta) &= \frac{2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

したがって，$g(\theta)$ の増減表は，次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$		$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$	

また，$x = \tan\theta$ により，$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって，$\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる．