平成 23 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 平成 23 年 2 月 25 日

1 1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，1 回目に出る目の数を a，2 回目に出る目の数を b とする。これらの a，b に対して，実数を要素とする集合 P，Q を次のように定める。

$$P = \{x \mid x^2 + ax + b > 0\}$$
$$Q = \{x \mid 5x + a \geqq 0\}$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) P が実数全体の集合となる確率を求めよ。

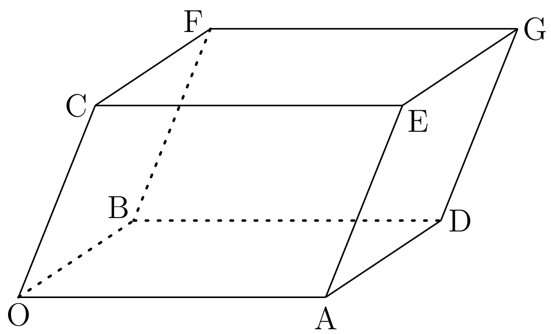
(2) $Q \subset P$ となる確率を求めよ。

2 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k : 1 - k$ $(0 < k < 1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3) 3 点 M，N，K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。



$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の条件によって定められる関数の列 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ を考える。

$$f_0(x)=1$$
$$f_n(x)=1-\int_0^x t\,f_{n-1}(t)\,dt \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ のとき，$f_n(x)-f_{n-1}(x)$ は x についての次数が $2n$ の単項式となることを示し，その単項式を求めよ。

(3) $n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2} \leqq f_n(1) \leqq \frac{5}{8}$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 楕円 $C: x^2+4y^2=1$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる2つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2) (1) における2つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2次不等式 $x^2+ax+b>0$ の係数について，$D=a^2-4b$ とおくと，P が実数全体となるのは，$D<0$ のときであるから

$$a^2-4b<0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{a^2}{4}<b \leqq 6$$

上式より，$a \leqq 4$ であるから

$$\begin{array}{lll} a=1 \text{のとき} & 1 \leqq b \leqq 6 & \text{の}\,6\,\text{通り} \\ a=2 \text{のとき} & 2 \leqq b \leqq 6 & \text{の}\,5\,\text{通り} \\ a=3 \text{のとき} & 3 \leqq b \leqq 6 & \text{の}\,4\,\text{通り} \\ a=4 \text{のとき} & 5 \leqq b \leqq 6 & \text{の}\,2\,\text{通り} \end{array}$$

よって，求める確率は $\dfrac{6+5+4+2}{6^2}=\mathbf{\dfrac{17}{36}}$

(2) Q は $x \geqq -\dfrac{a}{5}$

$Q \subset P$ となる事象の個数について D の符号により場合分けを行う.

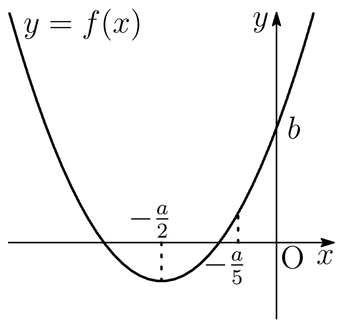
[1] $D<0$ のとき，$Q \subset P$ が成り立ち，(1) の結果により 17 通り

[2] $D \geqq 0$ のとき，$f(x)=x^2+ax+b$ とおくと

$$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

$a>0$ から $-\dfrac{a}{2}<-\dfrac{a}{5}$

$y=f(x)$ のグラフから，$f(-\frac{a}{5})>0$ を満たせばよいから



$$b-\frac{4a^2}{25}>0$$

$a^2-4b \geqq 0$ に注意して $\dfrac{4a^2}{25}<b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

これをみたす $(a,\ b)$ の組は，次の7通り

$$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 6)$$

[1]，[2] より，求める確率は $\dfrac{17+7}{6^2}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

別解 Q は　$x \geqq -\dfrac{a}{5}$

$Q \subset P$ となる事象の個数について D の符号により場合分けを行う．

［1］$D < 0$ のとき，$Q \subset P$ が成り立ち，(1) の結果により 17 通り

［2］$D \geqq 0$ のとき，P は

$$x < \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\ \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} < x$$

$Q \subset P$ となるための条件は

$$\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} < -\frac{a}{5} \quad \text{すなわち} \quad 5\sqrt{a^2-4b} < 3a$$

両辺を平方して整理すると　$4a^2 - 25b < 0$

$a^2 - 4b \geqq 0$ に注意して　$\dfrac{4a^2}{25} < b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

これをみたす $(a,\ b)$ の組は，次の 7 通り

$$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 6)$$

［1］,［2］より，求める確率は　$\dfrac{17+7}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}$

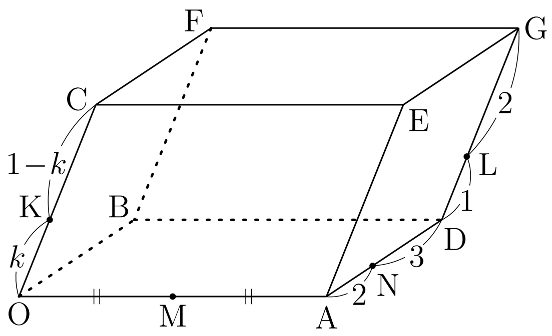
$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DL}}$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{MK}} = \overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OK}}$

$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}}$



(2) 3 点 M，N，K を通る平面を α とする．α 上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，(1) の結果から，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + s\overrightarrow{\mathrm{MN}} + t\overrightarrow{\mathrm{MK}}\\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}\right)\\ &= \frac{1}{2}(1+s-t)\vec{a} + \frac{2}{5}s\vec{b} + tk\vec{c} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

点 L の位置ベクトルは，$\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから，L が α 上の点であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{1}{2}(1+s-t) = 1,\quad \frac{2}{5}s = 1,\quad tk = \frac{1}{3}$$

これを解いて　　$s = \frac{5}{2}$，$t = \frac{3}{2}$，$\boldsymbol{k = \frac{2}{9}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{FG}} = \vec{a}$ より，辺 GF 上の点の位置ベクトルは実数 x を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} + x\overrightarrow{\mathrm{FG}} = x\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

α と辺 GF が交点をもつとき，上式および $(*)$ から

$$\frac{1}{2}(1+s-t) = x,\quad \frac{2}{5}s = 1,\quad tk = 1$$

第 1 式および第 2 式から　　$t = \frac{7}{2} - 2x$

$0 \leqq x \leqq 1$ であるから　　$\frac{3}{2} \leqq t \leqq \frac{7}{2}$

$0 < k < 1$ に注意しながら，これと第 3 式により　$\boldsymbol{\frac{2}{7} \leqq k \leqq \frac{2}{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 漸化式により

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1-\int_0^x tf_0(t)\,dt = 1-\int_0^x t\,dt \\ &= \mathbf{1-\frac{1}{2}}\boldsymbol{x^2} \\ f_2(x) &= 1-\int_0^x tf_1(t)\,dt = 1-\int_0^x t\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)dt \\ &= \mathbf{1-\frac{1}{2}}\boldsymbol{x^2}\mathbf{+\frac{1}{8}}\boldsymbol{x^4} \\ f_3(x) &= 1-\int_0^x tf_2(t)\,dt = 1-\int_0^x t\left(1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{8}t^4\right)dt \\ &= \mathbf{1-\frac{1}{2}}\boldsymbol{x^2}\mathbf{+\frac{1}{8}}\boldsymbol{x^4}\mathbf{-\frac{1}{48}}\boldsymbol{x^6} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$f_n(x)-f_{n-1}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{x^{2n}}{n!} \qquad \cdots(*)$$

と推測し，これを数学的帰納法により証明する．

［1］$n=1$ のとき，(1) の結果から $(*)$ が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$f_k(x)-f_{k-1}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x)-f_k(x) &= 1-\int_0^x tf_k(t)\,dt-\left(1-\int_0^x tf_{k-1}(t)\,dt\right) \\ &= -\int_0^x t(f_k(t)-f_{k-1}(t))dt \\ &= -\int_0^x t\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{t^{2k}}{k!}\,dt \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{x^{2(k+1)}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］,［2］から，$n \geqq 1$ のすべて自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(3) (1) の結果より

$$f_1(1)=\frac{1}{2},\ f_2(1)=\frac{5}{8},\ f_3(1)=\frac{29}{48}$$

したがって，$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$$\frac{1}{2}\leqq f_n(1)\leqq\frac{5}{8}\qquad\cdots(**)$$

が成り立つ．

$(*)$ より，$n\geqq 4$ のとき

$$|f_n(1)-f_{n-1}(1)|=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\leqq\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

上式より

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{n}|f_k(1)-f_{k-1}(1)|\leqq\frac{1}{4!}\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k&=\frac{1}{4!}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\\&<\frac{1}{192}\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{k=4}^{n}|f_k(1)-f_{k-1}(1)|\geqq\left|\sum_{k=4}^{n}(f_k(1)-f_{k-1}(1))\right|=|f_n(1)-f_3(1)|$$

上の 2 式から　　$|f_n(1)-f_3(1)|<\dfrac{1}{192}$

したがって，$n\geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned}f_3(1)-\frac{1}{192}<f_n(1)<f_3(1)+\frac{1}{192}\\\frac{29}{48}-\frac{1}{192}<f_n(1)<\frac{29}{48}+\frac{1}{192}\\\frac{1}{2}<\frac{115}{192}<f_n(1)<\frac{117}{192}<\frac{5}{8}\end{aligned}$$

よって，$n\geqq 1$ のとき，$(**)$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x^2+4y^2=1\cdots$①，$y=x+b\cdots$② とおく．
①，② から y を消去して整理すると

$$5x^2+8bx+4b^2-1=0 \quad \cdots ③$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D/4=(4b)^2-5(4b^2-1)=-4b^2+5$$

①，② が異なる 2 つの交点をもつとき，$D>0$ であるから

$$-4b^2+5>0 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}}{2}<b<\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

(2) 2 つの交点 A，B の x 座標を，それぞれ α，β とすると，$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha+b)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta+b)$ であるから，三角形 PAB の面積を S とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(\alpha-2,\ \alpha+b),\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\beta-2,\ \beta+b)$$

ゆえに
$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}|\,(\alpha-2)(\beta+b)-(\beta-2)(\alpha+b)\,| \\ &=\frac{1}{2}|\,(b+2)(\alpha-\beta)\,| \end{aligned}$$

③ の解は $x=\dfrac{-4b\pm\sqrt{-4b^2+5}}{5}$ であるから　$|\alpha-\beta|=\dfrac{2}{5}\sqrt{-4b^2+5}$
(1) の結果より，$b+2>0$ であるから

$$S=\frac{1}{5}(b+2)\sqrt{-4b^2+5}=\frac{1}{5}\sqrt{(b+2)^2(-4b^2+5)}$$

ここで，$f(b)=(b+2)^2(-4b^2+5)$ $(-\frac{\sqrt{5}}{2}<b<\frac{\sqrt{5}}{2})$ とおくと，S を最大にする b の値は，$f(b)$ を最大にする b の値であるから

$$f'(b)=-2(b+2)(8b^2+8b-5)$$

$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}<b<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ に注意して，$f'(b)=0$ を解くと　$b=\dfrac{\sqrt{14}-2}{4}$
$f(b)$ の増減表は，次のようになる．

b	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{14}-2}{4}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		↗	極大	↘	

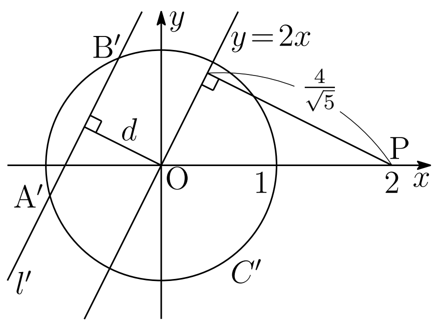
よって，求める b の値は　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}-2}{4}}$

別解 (1) $C : x^2+4y^2=1$ および直線 $l : y=x+b$ を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大した図形を，それぞれ，$C' : x^2+y^2=1$，$l' : y=2x+2b$ とする．C と l が異なる 2 つの交点をもつとき，C' と l' は異なる 2 つの交点をもつから

$$\frac{|2b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}}{2}<b<\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

(2) C' と l' の交点を A′，B′ とし，△PAB，△PA′B′ の面積を，それぞれ，S，S' とすると，$S'=2S$ が成り立つ．S' が最大となるとき，S は最大となるから，S' を最大にする b の値を求めればよい．

原点 O から l' までの距離を d とすると



$$d=\frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{A'B'}=2\sqrt{1^2-d^2}=\frac{2\sqrt{5-4b^2}}{\sqrt{5}}$$

S' を最大する b は，右の図から

$$0<b<\frac{\sqrt{5}}{2}$$

の範囲で調べればよい．P から l' に引いた垂線の長さを h とすると

$$h=\frac{2b}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{2b+4}{\sqrt{5}}$$

$$S'=\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot h=\frac{2}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}$$

$$S=\frac{1}{2}S'=\frac{1}{5}(b+2)\sqrt{5-4b^2}=\frac{1}{5}\sqrt{(b+2)^2(5-4b^2)}$$

したがって，関数

$$f(b)=(b+2)^2(5-4b^2) \quad \left(0<b<\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

を最大にする b の値を求めればよい．

$$f'(b)=-2(b+2)(8b^2+8b-5)$$

$0<b<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ に注意して $f'(b)=0$ を解くと　$b=\dfrac{\sqrt{14}-2}{4}$

$f(b)$ の増減は，右のようになる．よって，求める b の値は

b	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{14}-2}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$\boldsymbol{b=\frac{\sqrt{14}-2}{4}}$$