平成 22 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 平成 22 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = t$ とおいて，y を t の式で表せ。

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，y の最大値および最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $C : x^2 + y^2 = 1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ 上に 3 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ をとり，$\angle\mathrm{POR} = \theta\ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ となる C 上の点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする。さらに，C 上の点 X を 2 つのベクトル $s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ が垂直になるようにとる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の内積の値を θ を用いて表せ。

(2) 条件をみたす X が弧 AP 上にとれるとき，θ の範囲を求めよ。

(3) (2) で求めた θ の範囲において，$\triangle\mathrm{ROX}$ の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = x\,2^{-x}$ の区間 $t \leqq x \leqq t+1$ における最小値を $g(t)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $g(t)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ および $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1 = f(0)$，$a_{n+1} = f(a_n)\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$t=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$x-\dfrac{\pi}{3}=\theta$ とおくと $t=2\sin\theta\cdots$① であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x&=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left\{2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right\}\\&=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2\theta\\&=2(1-2\sin^2\theta)=2-(2\sin\theta)^2=2-t^2\end{aligned}$$

また　$2\sin x-2\sqrt{3}\cos x=2(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=2t$

よって　$y=(2-t^2)+2t=\boldsymbol{-t^2+2t+2}$

(2) ① より $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$　ゆえに　$-\sqrt{3}\leqq t\leqq\sqrt{3}$

(1) の結果から　$y=-(t-1)^2+3$

よって

$t=1$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{6}\left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{3}$**

$t=-\sqrt{3}$　すなわち　$\theta=-\dfrac{\pi}{3}(x=0)$ のとき　**最小値 $\boldsymbol{-2\sqrt{3}-1}$**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}\perp t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ より

$$(s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t\,\overrightarrow{\mathrm{OX}})\cdot(t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}})=0$$

であるから

$$st|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-(s^2+t^2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}+st|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2=0$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|=1$，$\angle\mathrm{POR}=\theta$ より　$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$

これらを上式に代入して

$$\cos\theta\sin\theta\cdot 1^2-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\cos\theta\sin\theta\cdot 1^2=0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=2\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\sin 2\theta}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角を α とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\alpha = \cos\alpha$$

上式および (1) の結果から　$\cos\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\theta\right)$　$\cdots$①

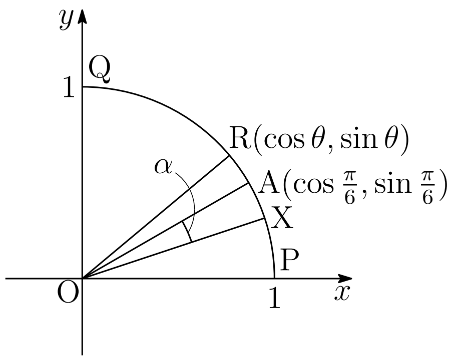
X が弧 AP 上にあるとき $\angle\mathrm{POA} = \dfrac{\pi}{6}$ であるから　$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{6}$　$\cdots$②

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \cdots$③ より　　$0 < \dfrac{\pi}{2} - 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$

したがって，① から　　$\alpha = \dfrac{\pi}{2} - 2\theta$　$\cdots$④

④ を ② に代入して　　$0 \leqq \dfrac{\pi}{2} - 2\theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$

これを ③ に注意して解くと　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}}$



(3) (2) の結果から　$\angle\mathrm{POX} = \dfrac{\pi}{6} - \alpha = \dfrac{\pi}{6} - \left(\dfrac{\pi}{2} - 2\theta\right) = 2\theta - \dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$\angle\mathrm{ROX} = \angle\mathrm{POR} - \angle\mathrm{POX} = \theta - \left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} - \theta$

したがって　$\triangle\mathrm{ROX} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OX}\cdot\mathrm{OR}\sin\angle\mathrm{ROX}$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$$

よって　(2) の結果により　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき　**最大値** $\dfrac{1}{4}$

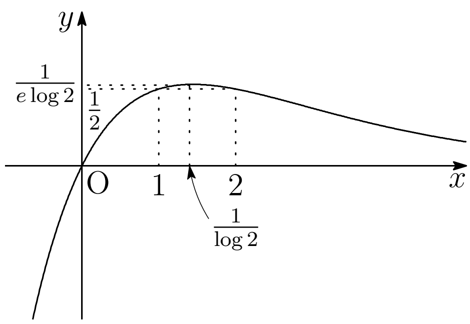
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = x\,2^{-x}$ を微分すると

$$f'(x) = 2^{-x} - x\,2^{-x}\log 2 = 2^{-x}(1 - x\log 2)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \dfrac{1}{\log 2}$

$f(x)$ の増減は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e\log 2}$	$\searrow$



また $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$f(t) = f(t+1)$ を解くと $t\,2^{-t} = (t+1)2^{-(t+1)}$ ゆえに $t = 1$

$t < 1$ のとき $g(t) = f(t)$ すなわち $g(t) = t\,2^{-t}$

$t \geqq 1$ のとき $g(t) = f(t+1)$ すなわち $g(t) = (t+1)\,2^{-(t+1)}$

よって $\boldsymbol{g(t) = \begin{cases} t\,2^{-t} & (t < 1) \\ (t+1)\,2^{-(t+1)} & (t \geqq 1) \end{cases}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\int_0^2 g(t)\,dt &= \int_0^1 t\,2^{-t}\,dt + \int_1^2 (t+1)\,2^{-(t+1)}\,dt \\
&= \int_0^1 t\,2^{-t}\,dt + \int_2^3 t\,2^{-t}\,dt \\
&= \left[-\frac{t\,2^{-t}}{\log 2} - \frac{2^{-t}}{(\log 2)^2}\right]_0^1 + \left[-\frac{t\,2^{-t}}{\log 2} - \frac{2^{-t}}{(\log 2)^2}\right]_2^3 \\
&= \left\{-\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{2(\log 2)^2}\right\} + \left\{\frac{1}{8\log 2} + \frac{1}{8(\log 2)^2}\right\} \\
&= \boldsymbol{-\frac{3}{8\log 2} + \frac{5}{8(\log 2)^2}}
\end{aligned}$$

解説 部分積分法により，次式が得られる [1].

$$\int e^{px}f(x)\,dx = \frac{e^{px}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C$$

$$\int a^{px}f(x)\,dx = \frac{a^{px}}{p\log a}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p\log a} + \frac{f''(x)}{(p\log a)^2} - \frac{f'''(x)}{(p\log a)^3} + \cdots\right\} + C$$

$$\int e^{-x}f(x)\,dx = -e^{-x}\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\} + C$$

$$\int a^{-x}f(x)\,dx = -\frac{a^{-x}}{\log a}\left\{f(x) + \frac{f'(x)}{\log a} + \frac{f''(x)}{(\log a)^2} + \frac{f'''(x)}{(\log a)^3} + \cdots\right\} + C$$

上の公式の第 4 式により，次の積分を利用するとよい．

$$\int t\,2^{-t}\,dt = -\frac{2^{-t}}{\log 2}\left\{t + \frac{(t)'}{\log 2}\right\} + C = -\frac{2^{-t}}{\log 2}\left(t + \frac{1}{\log 2}\right) + C$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1+\tan t)\,dt \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{8}\right)$ を x について微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \log_4\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)' - \log_4(1+\tan x)\cdot(x)' \\
&= -\log_4\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\} - \log_4(1+\tan x) \\
&= -\log_4\left\{1 + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right\} - \log_4(1+\tan x) \\
&= -\log_4\frac{2}{1+\tan x} - \log_4(1+\tan x) \\
&= -\log_4 2 = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(2) $$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}} \log_4(1+\tan t)\,dt = \mathbf{0}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\frac{\pi}{8}\right) + \int_{\frac{\pi}{8}}^{x} f'(t)\,dt \\
&= 0 + \int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

よって $\quad f(0) = -\dfrac{1}{2}\left(0 - \dfrac{\pi}{8}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{16}}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf の $\boxed{3}$ を参照.

(3) (2) の結果から　$a_1 = f(0) = \dfrac{\pi}{16}$，$a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{\pi}{16}$

ゆえに　$a_{n+1} - \dfrac{\pi}{24} = -\dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{\pi}{24}\right)$

数列 $\left\{a_n - \dfrac{\pi}{24}\right\}$ は初項 $a_1 - \dfrac{\pi}{24}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{\pi}{24} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{\pi}{24}\right)$$

よって　$a_n = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi}{48}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{24}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$

別解　$f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1+\tan t)\,dt \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{8}\right)$ より

$$f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{8}} \log_4(1+\tan t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1+\tan t)\,dt \quad \cdots (*)$$

ここで，$t = \dfrac{\pi}{4} - u$ とおくと　$\dfrac{dt}{du} = -1$

t	$\frac{\pi}{8} \longrightarrow \frac{\pi}{4} - x$
u	$\frac{\pi}{8} \longrightarrow x$

$$1 + \tan t = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right) = 1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \frac{2}{1 + \tan u}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1+\tan t)\,dt &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{x} \log_4 \frac{2}{1+\tan u}\,(-du) \\ &= -\int_{\frac{\pi}{8}}^{x} \log_4 \frac{2}{1+\tan t}\,dt \quad \cdots (**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}f(x) &= -\int_{\frac{\pi}{8}}^{x} \log_4(1+\tan t)\,dt - \int_{\frac{\pi}{8}}^{x} \log_4 \frac{2}{1+\tan t}\,dt \\ &= -\int_{\frac{\pi}{8}}^{x} \log_4 2\,dt = -\int_{\frac{\pi}{8}}^{x} \frac{1}{2}\,dt = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$