平成 21 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査)) 平成 21 年 2 月 25 日

1 実数 p に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_{p-x}^{p} (t^6 + 2t^3 - 3)dt$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ は，$x = p + 1$ のとき最小値をとることを示せ。

(2) $f(p + 1)$ の $p > 0$ における最小値を求めよ。

2 $0 < a < 3$ とする。次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \log(1 + a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を次の手順で求めよ。

(1) $0 < x < 3$ のとき，$0 < \log(1 + x) < x - \dfrac{1}{6}x^2$ であることを示せ。必要があれば，$0.69 < \log 2 < 0.70$ を用いてもよい。

(2) $0 < a_n < \dfrac{6}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

3 大小 2 個のサイコロを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする。$y = px^2$ のグラフと $y = qx + 1$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものを A，正のものを B とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点の y 座標が 2 より小さくなる確率を求めよ。

(2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。

(3) $\angle$OAB が 90° より大きくなる確率を求めよ。ただし，O は座標平面の原点である。

4 次の問いに答えよ。

(1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$ をみたす x の範囲を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $g(t) = t^6 + 2t^3 - 3$ とし，この関数の原始関数を $G(t)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{p-x}^{p} g(t)dt = \Big[\ G(t)\ \Big]_{p-x}^{p} \\ &= G(p) - G(p-x) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

① を x について微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 - G'(p-x)\cdot(p-x)' \\ &= -g(p-x)\cdot(-1) \\ &= g(p-x) \\ &= (p-x)^6 + 2(p-x)^3 - 3 \\ &= \{(p-x)^3+1\}^2 - 4 \end{aligned}$$

よって $f'(x)$ が最小となるのは

$$(p-x)^3 + 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = p+1$$

のときである．

(2) ① に $x = p+1$ を代入すると　　$f(p+1) = G(p) - G(-1) \quad \cdots ②$

② より $f(p+1)$ が最小となるのは $G(p)$ が最小となるときであるから

$$\begin{aligned} G'(p) &= g(p) = p^6 + 2p^3 - 3 \\ &= (p^3-1)(p^3+3) \\ &= (p-1)(p^2+p+1)(p^3+3) \end{aligned}$$

$G(p)$ の $p > 0$ における増減表は，次のようになる．

p	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$G'(p)$		$-$	0	$+$
$G(p)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって $p = 1$ のとき最小となり，求める最小値は ② から

$$\begin{aligned} G(1) - G(-1) &= \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (t^6 + 2t^3 - 3)\,dt \\ &= 2\int_{0}^{1} (t^6 - 3)\,dt \\ &= 2\Big[\ \frac{t^7}{7} - 3t\ \Big]_0^1 = -\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{7}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $x>0$ のとき $1+x>1$ であるから　$\log(1+x)>0$　$\cdots$①

$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{6}x^2\right)-\log(1+x)$ とすると

$$f'(x)=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{1+x}=\frac{x(2-x)}{3(1+x)}$$

$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 3$ における増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大 0	↘	$\frac{3-4\log 2}{2}$

$\log 2<0.70$ より $\dfrac{3-4\log 2}{2}>0$ であるから，$0<x\leqq 3$ において

$$f(x)>0 \quad \text{すなわち} \quad \log(1+x)<x-\frac{1}{6}x^2 \quad \cdots②$$

①，② より　$0<x\leqq 3$ のとき　$0<\log(1+x)<x-\dfrac{1}{6}x^2$　$\cdots$③

したがって　$0<x<3$ のとき　$0<\log(1+x)<x-\dfrac{1}{6}x^2$

(2) $0<a_n<\dfrac{6}{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を (A) とする．

［1］$n=1$ のとき，$0<a_1=a<3$ より

$$0<a_1<\frac{6}{1+1}$$

であるから (A) が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成り立つ，すなわち

$$0<a_k<\frac{6}{k+1}$$

が成り立つと仮定すると

$$1<1+a_k<1+\frac{6}{k+1}$$

対数をとると　$\log 1<\log(1+a_k)<\log\left(1+\dfrac{6}{k+1}\right)$

ゆえに　$0<a_{k+1}<\log\left(1+\dfrac{6}{k+1}\right)$　$\cdots$④

$0 < \dfrac{6}{k+1} \leqq 3$ であるから，③ より

$$\log\left(1+\frac{6}{k+1}\right) < \frac{6}{k+1} - \frac{1}{6}\left(\frac{6}{k+1}\right)^2 = \frac{6k}{(k+1)^2}$$
$$< \frac{6k}{k^2+2k} = \frac{6}{(k+1)+1} \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ より

$$0 < a_{k+1} < \frac{6}{(k+1)+1}$$

したがって，$n = k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］からすべての自然数 n について (A) が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6}{n+1} = 0$$

であるから，はさみうちの原理を (A) に適用して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = px^2$，$y = qx + 1$ から y を消去すると

$$px^2 - qx - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-q)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1) = q^2 + 4p$$

$p > 0$ より $D > 0$ となり，2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ．
その解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{q}{p}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{p}$$

$p > 0$ より $\alpha\beta < 0$ であるから，A，B の x 座標はそれぞれ α，β となる．
線分 AB の中点の y 座標は，上の第 1 式から

$$q \times \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = q \times \frac{q}{2p} + 1 = \frac{q^2}{2p} + 1$$

これが 2 より小さいので

$$\frac{q^2}{2p} + 1 < 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{q^2}{2} < p \leqq 6$$

上式より，$q \leqq 3$ であるから

$q = 1$ のとき　$1 \leqq p \leqq 6$　の 6 通り
$q = 2$ のとき　$3 \leqq p \leqq 6$　の 4 通り
$q = 3$ のとき　$5 \leqq p \leqq 6$　の 2 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{6 + 4 + 2}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) A の x 座標 α は 2 次方程式 ① の負の解であるから

$$\alpha = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4p}}{2p} \quad \cdots ②$$

これが有理数となるは，$q^2 + 4p$ が平方数のときである．

$q^2 + 4p$ の値は次のようなる．

$q \backslash p$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	5	9	13	17	21	25
2	8	12	16	20	24	28
3	13	17	21	25	29	33
4	20	24	28	32	36	40
5	29	33	37	41	45	49
6	40	44	48	52	56	60

したがって条件をみたす $(p,\ q)$ の組は，次の 6 組である．

$$(p,\ q) = (2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 1),\ (6,\ 5)$$

よって，求める確率は $\dfrac{6}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) A$(\alpha,\ q\alpha+1)$ および ② から，直線 AO の傾きは

$$\frac{q\alpha+1}{\alpha}=q+\frac{1}{\alpha}=q+\frac{2p}{q-\sqrt{q^2+4p}}=\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}$$

A，B を通る直線の方程式から，直線 AB の傾きは　q

直線 AO および直線 AB の方向ベクトルをそれぞれ

$$\vec{u}=\left(1,\ \frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\right),\ \vec{v}=(1,\ q)$$

とおくと，$\angle$OAB は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角である．$\angle$OAB が 90° より大きくなるとき，$\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ であるから

$$1\cdot 1+\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\cdot q<0$$

ゆえに　$2+q^2<q\sqrt{q^2+4p}$

上式の両辺がともに正であることに注意して，両辺を平方して整理すると

$$p>1+\frac{1}{q^2}$$

したがって　$q=1$ のとき　$3\leqq p\leqq 6$　の 4 通り

$2\leqq q\leqq 6$ のとき　$2\leqq p\leqq 6$　の 5 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{4+5\times 5}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{29}{36}}$

4 (1) 与式から　$\sin x-\sqrt{3}\cos x<0$

左辺の三角関数を合成すると

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<0$$

よって　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)<0$　$\cdots$①

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$-\frac{4}{3}\pi\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$-\pi<x-\frac{\pi}{3}<0\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{-\frac{2}{3}\pi<x<\frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において} \quad \sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

ここで

$$4\sin x = a(\sqrt{3}\cos x - \sin x) + b(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'$$

をみたす定数 a，b を求める．上式の右辺は

$$\begin{aligned}
4\sin x &= a(\sqrt{3}\cos x - \sin x) + b(-\sqrt{3}\sin x - \cos x) \\
&= (-a - \sqrt{3}\,b)\sin x + (\sqrt{3}\,a - b)\cos x
\end{aligned}$$

係数を比較して　$4 = -a - \sqrt{3}\,b$，$0 = \sqrt{3}\,a - b$

これを解いて　　$a = -1,\ b = -\sqrt{3}$

ゆえに　$$\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} = -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left\{ -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right\} dx \\
&= -\Big[-x - \sqrt{3}\,\log\left|\sqrt{3}\cos x - \sin x\right| \Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} = \frac{\pi}{3} \quad \cdots ③
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left\{ -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right\} dx \\
&= \Big[-x - \sqrt{3}\,\log\left|\sqrt{3}\cos x - \sin x\right| \Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3 \quad \cdots ④
\end{aligned}$$

③，④ を ② に代入して　$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3}$$

別解 (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において } \quad \sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\, dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\, dx
\end{aligned}$$

ここで，$t = x - \dfrac{\pi}{3}$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx} = 1$

$$2\sin x = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin t + \sqrt{3}\cos t$$

x	$-\frac{\pi}{3}$ $\to$ 0 $\to$ $\frac{\pi}{6}$
t	$-\frac{2}{3}\pi$ $\to$ $-\frac{\pi}{3}$ $\to$ $-\frac{\pi}{6}$

したがって

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt \\
&= \Big[\, t + \sqrt{3}\log|\sin t| \,\Big]_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} - \Big[\, t + \sqrt{3}\log|\sin t| \,\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\log\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3}
\end{aligned}$$