平成20年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，医，薬，工学部) 平成20年2月25日

1 放物線 $y=4x^2+3$ を C とする。x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ ($p \neq 0$ とする)，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ をとり，点Aにおける C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする。さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における C の接線を m とする。以下の問いに答えよ。

(1) q を p を用いて表せ。

(2) 接線 m が点Pを通るとする。p，q の値を求めよ。

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と2つの接線 l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=0,\ a_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}a_k \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

によって定められている。以下の問いに答えよ。

(1) $b_n=n+a_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，$b_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k\ (n=2,3,4,\cdots)$ を示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

3 直線 $y=2x+1$ を l とする。また，行列 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ を A とする。直線 l 上の各点は A が表す移動によって l 上の点に移るとする。以下の問いに答えよ。

(1) b の値を求め，c を a を用いて表せ。

(2) $a \neq -\dfrac{1}{2}$ ならば，直線 l 上の点Pで，A が表す移動によってP自身に移るものが存在することを示せ。

(3) 直線 l 上の各点Qは A が表す移動によってQと異なる l 上の点に移るとする。a，c の値を求めよ。

$\boxed{\textbf{4}}$ 放物線 $C: y = \dfrac{1}{4}x^2$ および点 $\mathrm{F}(0,\ 1)$ について考える。以下の問いに答えよ。ただし，O は原点を表す。

(1) 放物線 C 上の点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ $(x > 0$ とする$)$ に対して $\theta = \angle\mathrm{OFA}$，$r = \mathrm{FA}$ とおく。r を θ を用いて表せ。

(2) 放物線 C 上に n 個の点 $\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$x_k > 0 \ \text{ かつ } \ \angle\mathrm{OFA}_k = \frac{k\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

を満たすようにとる。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{FA}_k$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=4x^2+3$ を微分すると　$y'=8x$

点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ における接線 l の傾きは $8p$ であるから，その方程式は

$$y-(4p^2+3)=8p(x-p)$$

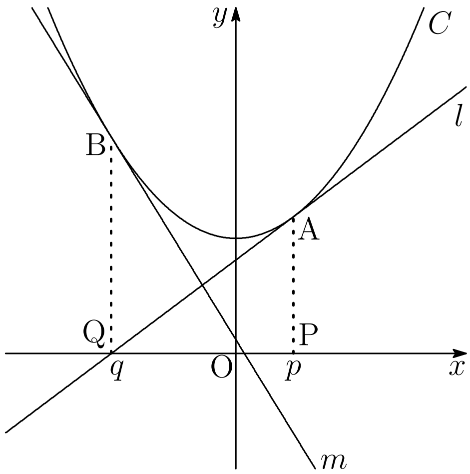
すなわち　$y=8px-4p^2+3$

l は $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4p^2+3 \quad \cdots①$$

$p\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{q=\frac{4p^2-3}{8p}}$$



(2) 点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における接線 m の方程式は，(1) と同様にして

$$y=8qx-4q^2+3$$

を得る．これが点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4q^2+3 \quad \cdots②$$

①，② より　$q=\pm p$

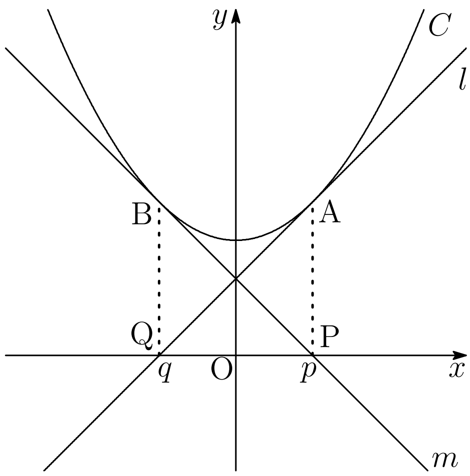
$q=p$ のとき，① より

$4p^2+3=0$ となり，不適

$q=-p$ のとき，① より

$0=-12p^2+3$

となり，これを解いて　$\boldsymbol{(p,\ q)=\left(\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right)}$ **(複号同順)**



(3) (2) の結果から，2 本の接線の方程式は　$y=4x+2$，$y=-4x+2$

これらの接線と放物線で囲まれた部分は，y 軸に関して対称であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\{(4x^2+3)-(4x+2)\}\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)^2\,dx \\ &= 2\left[\frac{1}{2\cdot 3}(2x-1)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_n = b_n - n$ であるから，これを数列 $\{a_n\}$ の漸化式に代入すると

$$b_n - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - k)$$

$$\begin{aligned} b_n &= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

したがって　$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \cdots ①$

(2) ① により　$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \cdots ②$

② − ① から　$b_{n+1} - b_n = b_n$　ゆえに　$b_{n+1} = 2b_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = 1 + a_1 = 1 + 0 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n = 1\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

(3) $a_n = b_n - n$ により，(2) の結果から　$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - n}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(2^{k-1} - k) \\ &= \frac{1(2^n - 1)}{2-1} - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \boldsymbol{2^n - 1 - \frac{1}{2}n(n+1)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 直線 $l: y=2x+1$ 上の任意の点 $(t,\ 2t+1)$ の A による像は

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2+2a)t+a \\ (b+2c)t+c \end{pmatrix}$$

また，点 $((2+2a)t+a,\ (b+2c)t+c)$ も l 上にあるから

$$\begin{aligned}(b+2c)t+c &= 2\{(2+2a)t+a\}+1 \\ &= (4+4a)t+2a+1\end{aligned}$$

これがすべての実数 t について成り立つから

$$b+2c=4+4a,\ c=2a+1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b=2,\ c=2a+1}$$

別解 l 上の 2 点 P(0, 1)，Q(1, 3) の位置ベクトルを $\vec{p}$，$\vec{q}$ とする．
これら 2 点の A による像 $A\vec{p}$，$A\vec{q}$ が l 上にあれば，A による l 上の任意の点 $(1-s)\vec{p}+s\vec{q}$ (s は実数) の像

$$A((1-s)\vec{p}+s\vec{q})=(1-s)A\vec{p}+sA\vec{q}$$

も l 上にある．ゆえに，$A\vec{p}$，$A\vec{q}$ が l 上の点であることを満たせばよい．
A による 2 点 P(0, 1)，Q(1, 3) の像は，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3a \\ b+3c \end{pmatrix}$$

であり，これらが共に l 上にあるから

$$c=2a+1,\quad b+3c=2(2+3a)+1$$

上の第 1 式を第 2 式に代入して，$b=2$ を得る．
したがって　$\boldsymbol{b=2,\ c=2a+1}$

(2) l 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2t+1)$ で，A により自分自身に移るものが存在するとき，(1) の結果により

$$\begin{cases} (2+2a)t+a=t \\ (b+2c)t+c=2t+1 \end{cases} \qquad \text{すなわち} \quad (2a+1)t+a=0$$

よって，$a \neq -\dfrac{1}{2}$ のとき，$t=-\dfrac{a}{2a+1}$ に対応する点 P が A によって自分自身に移る．

別解　不動点の表す図形と直線 l の交点が存在することを示せばよい．

解説

座標平面上の点 $\mathrm{V}(\vec{v})$ に対して，$A\vec{v}=\vec{v}$ を満たすとき，点 $\mathrm{V}(\vec{v})$ は A による**不動点**という．このとき，$A(k\vec{v})=k\vec{v}$ (k は実数) であるから，原点 O と V を通る直線上のすべての点が不動点である．

$A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 2a+1 \end{pmatrix}$ による不動点を $\mathrm{V}(\vec{v})$ とすると

$A\vec{v}=\vec{v}$ により　　$(A-E)\vec{v}=\vec{0}$

ゆえに　　$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$

よって，不動点の表す図形は，法線ベクトルが $(1,\ a)$ で原点を通る直線

$$x+ay=0$$

である．これと l は，$a \neq -\dfrac{1}{2}$ のとき，交点 $\left(-\dfrac{a}{2a+1},\ \dfrac{1}{2a+1}\right)$ をもち，これが，示す l 上の不動点の座標である．

補足

A による不動点 $\mathrm{V}(\vec{v})$ $(\vec{v}\neq\vec{0})$ が存在するとき，$A\vec{v}=\vec{v}$ により，$\vec{v}$ は A の固有値 1 に対する固有ベクトルである．
実際，$A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 2a+1 \end{pmatrix}$ の固有方程式 $\lambda^2-(2a+3)\lambda+2a+2=0$ が 1(固有値) を解にもつ (9 ページの固有値と固有ベクトルを参照)．

(3) (2) で示した

「$a \neq -\dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad l$ 上の点で自分自身に移る点 P が存在する」

したがって，この命題の対偶を考えて　$a = -\dfrac{1}{2}$

これを (1) の結果に代入して　$c = 0$

よって　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2},\ c = 0}$

別解 1　l 上の点 P(0, 1) の位置ベクトルを $\vec{p}$，l の方向ベクトルを $\vec{u} = (1,\ 2)$ とすると，l は媒介変数 t を用いて $\vec{p} + t\vec{u}$ と表される．このとき，l 上の 2 点 P($\vec{p}$)，Q($\vec{p} + \vec{u}$) は，A によりそれぞれ P，Q と異なる l 上の点に移るので

$$A\vec{p} = \vec{p} + t_0\vec{u} \qquad (t_0 \neq 0)$$
$$A(\vec{p} + \vec{u}) = \vec{p} + t_1\vec{u} \qquad (t_1 \neq 1)$$

上の 2 式から　　$A\vec{u} = (t_1 - t_0)\vec{u} \quad \cdots ①$

これらの式により，A による $\vec{p} + t\vec{u}$ の像は

$$\begin{aligned} A(\vec{p} + t\vec{u}) &= A\vec{p} + tA\vec{u} \\ &= \vec{p} + t_0\vec{u} + t(t_1 - t_0)\vec{u} \\ &= \vec{p} + \{t_0 + (t_1 - t_0)t\}\vec{u} \end{aligned}$$

このとき，すべての実数 t に対して　　$t_0 + (t_1 - t_0)t \neq t$

すなわち，すべての実数 t に対して　　$t_0 + (t_1 - t_0 - 1)t \neq 0 \quad \cdots ②$

$t_1 - t_0 - 1 \neq 0$ ならば，$t = -\dfrac{t_0}{t_1 - t_0 - 1}$ のとき ② を満たさない．

よって，$t_1 - t_0 - 1 = 0$ のとき，$t_0 \neq 0$ であるから ② を満たす．

ゆえに　　$t_1 - t_0 = 1$

これを ① に代入して　　　$A\vec{u} = \vec{u}$

したがって　　　　$(A - E)\vec{u} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2}}$　　これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{c = 0}$

直線 ℓ が存在して，ℓ 上の任意の点 P について，$f(\mathrm{P}) \in \ell$ となるとき，ℓ を f の**不動直線**という．① から不動直線の方向ベクトル $\vec{u}$ は，行列 A の固有ベクトルであることがわかる．

別解 2 l 上の点 P(0, 1) の位置ベクトルを $\vec{p}$, l の方向ベクトルを $\vec{u}=(1,\ 2)$ とする．

A により P($\vec{p}$) は，P と異なる l 上の点に移るので

$$A\vec{p}=\begin{pmatrix}2 & a\\ 2 & 2a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ 2a+1\end{pmatrix}=\vec{p}+a\vec{u}\quad (a\neq 0)$$

また，A により $\vec{u}$ は

$$A\vec{u}=\begin{pmatrix}2 & a\\ 2 & 2a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2\\ 4a+4\end{pmatrix}=(2a+2)\vec{u}$$

l は媒介変数 t を用いて $\vec{p}+t\vec{u}$ と表される．ゆえに，A による $\vec{p}+t\vec{u}$ の像は,

$$\begin{aligned}A(\vec{p}+t\vec{u})&=A\vec{p}+tA\vec{u}\\ &=\vec{p}+a\vec{u}+t(2a+2)\vec{u}\\ &=\vec{p}+\{a+(2a+2)t\}\vec{u}\end{aligned}$$

このとき，すべての実数 t に対して　　$a+(2a+2)t\neq t$

すなわち，すべての実数 t に対して　　$a+(2a+1)t\neq 0\quad\cdots(*)$

$2a+1\neq 0$ ならば，$t=-\dfrac{a}{2a+1}$ のとき $(*)$ を満たさない．

よって，$2a+1=0$ のとき，$a\neq 0$ であるから $(*)$ を満たす．

ゆえに　　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$　これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{c=0}$

【図形的な解説】

$\vec{p}+t\vec{u}$ の A による像は $\vec{p}+a\vec{u}+(2a+2)t\vec{u}$ であり，これらの点をそれぞれ R, S とする．R, S を時間 t の関数と考えると $(-\infty<t<\infty)$，R, S は l 上を等速で運動する．

1. $2a+2>0,\ 2a+2\neq 1$ のとき，S は R と同方向に運動する．
2. $2a+2<0$ のとき，S は R と逆方向に運動する．
3. $2a+2=0$ のとき，S は定点である．
4. $2a+2=1$ のとき，R と S の速度は等しく，それぞれ R($\vec{p}+t\vec{u}$), S($\vec{p}+(t+1)\vec{u}$) である．

1〜3 のとき，R と S が一致する点，すなわち不動点を l 上にもつ．4. のとき，l 上には不動点をもたないが，$A\vec{u}=(2a+2)\vec{u}$ より，$\vec{u}$ は固有値 1 に対する固有ベクトルであるから，座標平面上の点 U($\vec{u}$) と原点 O を結ぶ直線上に不動点をもつ．

固有値と固有ベクトル

1次変換の問題は，固有値と固有ベクトルの考え方が本質にあるので，このことについて簡単にまとめておく．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \cdots ①$$

を満たすベクトル $\vec{v}$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$，スカラー λ が存在するとき，$\vec{v}$ を A の**固有ベクトル**，λ を A の**固有値**という．

① より $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$ となり，$\vec{v} \neq \vec{0}$ であるから

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

は逆行列をもたないので

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

すなわち　$\boldsymbol{\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0} \quad \cdots ②$

が成り立つ．② を A の**固有方程式**という．② の解を α，β とし，$\lambda = \alpha$ に対する固有ベクトルを $\vec{p}$，$\lambda = \beta$ に対する固有ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p} \quad \cdots ③$$

$$A\vec{q} = \beta\vec{q} \quad \cdots ④$$

このとき，次が成り立つ．

$\boldsymbol{\alpha \neq \beta}$ **のとき，**$\boldsymbol{\vec{p} \not\parallel \vec{q}}$ **である．** $\quad \cdots (*)$

証明 $\vec{p} /\!/ \vec{q}$ と仮定すると，零でないスカラー k を用いて $\vec{q} = k\vec{p}$ と表すことがきるので，これを ④ に代入すると

$$A(k\vec{p}) = \beta(k\vec{p})$$

$k \neq 0$ より　$A\vec{p} = \beta\vec{p} \quad \cdots ⑤$

③，⑤ から，$(\alpha - \beta)\vec{p} = \vec{0}$ を得る．これは，$\alpha \neq \beta$，$\vec{p} \neq \vec{0}$ に反するので，$(*)$ が成り立つ． **証終**

不動点と不動直線

熊本大学でも1次変換が復活したばかりで，本年度の出題は標準的なものであった．かって，1次変換は入試問題の花形であり，固有値と固有ベクトルを踏まえた出題が目立った．次のような証明問題も出題された．**f による原点を通らない不動直線があるとき，座標平面上に f による原点以外の不動点が存在する** (東京医科歯科大学 1980 年)．**f による原点以外の不動点をもつとき，f による不動直線で原点を通らないものが存在する** (東京大学理系 1982 年)．

定理 1

l を1次変換 f による原点を通らない不動直線とするとき，f による不動点で原点でない点が存在する．

証明 f の表す行列を A，l を $\vec{p}+t\vec{u}$ とする ($\vec{p}\neq\vec{0}$，$\vec{u}\neq\vec{0}$，$\vec{u}\not\parallel\vec{p}$，$t$ は媒介変数)．

f による l 上の2点 $\mathrm{P}_0(\vec{p})$，$\mathrm{P}_1(\vec{p}+\vec{u})$ の像は

$$\begin{aligned} A\vec{p} &= \vec{p}+t_0\vec{u} \qquad (t_0\text{は実数}) \\ A(\vec{p}+\vec{u}) &= \vec{p}+t_1\vec{u} \qquad (t_1\text{は実数}) \end{aligned}$$

上の2式から　$A\vec{u}=(t_1-t_0)\vec{u}$　$\cdots$①

これらの式により，A による $\vec{p}+t\vec{u}$ の像は

$$\begin{aligned} A(\vec{p}+t\vec{u}) &= A\vec{p}+tA\vec{u} \\ &= \vec{p}+t_0\vec{u}+t(t_1-t_0)\vec{u} \\ &= \vec{p}+\{t_0+(t_1-t_0)t\}\vec{u} \end{aligned}$$

これから　$A(\vec{p}+t\vec{u})-(\vec{p}+t\vec{u})=\{t_0+(t_1-t_0-1)t\}\vec{u}$　$\cdots$②

[1] $t_1-t_0-1\neq 0$ のとき，② から l 上の $t=-\dfrac{t_0}{t_1-t_0-1}$ に対応する点が不動点である．

[2] $t_1-t_0-1=0$ のとき，① から，$A\vec{u}=\vec{u}$
よって，$\mathrm{U}(\vec{u})$ と原点 O を通る直線上の原点を除く点が示す不動点である．

証終

定理 2

1 次変換 f による原点以外の不動点をもつとき，f による不動直線で原点を通らないものが存在する．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる xy 平面上の 1 次変換を f とする．原点以外のある点 P が f によって P 自身に移されるならば，原点を通らない直線 ℓ であって，ℓ のどの点も f によって ℓ の点に移されるようなものが存在することを証明せよ．　(東京大学理系 1982 年)

証明　点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ $(\vec{p} \neq \vec{0})$ とすると，$\vec{p}$ は A の固有値 1 に対する固有ベクトルである．ゆえに，A の 2 つの固有値を 1，β とおく．

$\beta \neq 1$ のとき，固有値 β に対する固有ベクトルを $\vec{u}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ とすると，$\vec{u} \not\parallel \vec{p}$ であるから，直線

$$k\vec{p} + t\vec{u} \quad (k \text{ は } 0 \text{ でない定数}, t \text{ は媒介変数})$$

は f による原点を通らない不動直線である．

$\beta = 1$ のとき，A の固有方程式 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ は重解 1 をもつので，解と係数の関係により

$$a + d = 2,\quad ad - bc = 1$$

第 1 式から　$d = 2 - a \quad \cdots ①$

① を第 2 式に代入して整理すると

$$bc = -(a-1)^2 \quad \cdots ②$$

$\vec{e_1} = (1,\ 0)$，$\vec{e_2} = (0,\ 1)$ とおき，② より，次の 4 つの場合に分ける．

[1]　$a \neq 1$ のとき，$bc \neq 0$ であるから，①，② より

$$A - E = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ -\dfrac{(a-1)^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$$

上式より，$\vec{v} = (b,\ 1-a)$ は固有値 1 に対する固有ベクトルで，$\vec{v} \not\parallel \vec{e_2}$ である．さらに

$$(A-E)\vec{e_2} = \vec{v} \quad \text{すなわち} \quad A\vec{e_2} = \vec{e_2} + \vec{v}$$

よって　$k\vec{e_2} + t\vec{v}$　(k は 0 でない定数, t は媒介変数)

は f による原点を通らない不動直線である．

[2] $\underline{a=1,\ b\neq 0,\ c=0\text{ のとき}}$，① より

$$A-E=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

上式より，$\vec{e_1}$ は固有値 1 に対する固有ベクトルである．さらに

$$(A-E)\vec{e_2}=b\vec{e_1}\quad \text{すなわち}\quad A\vec{e_2}=\vec{e_2}+b\vec{e_1}$$

よって　　$k\vec{e_2}+t\vec{e_1}$　(k は 0 でない定数, t は媒介変数)

は f による原点を通らない不動直線である．

[3] $\underline{a=1,\ b=0,\ c\neq 0\text{ のとき}}$，① より

$$A-E=\begin{pmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}$$

上式より，$\vec{e_2}$ は固有値 1 に対する固有ベクトルである．さらに

$$(A-E)\vec{e_1}=c\vec{e_2}\quad \text{すなわち}\quad A\vec{e_1}=\vec{e_1}+c\vec{e_2}$$

よって　　$k\vec{e_1}+t\vec{e_2}$　(k は 0 でない定数, t は媒介変数)

は f による原点を通らない不動直線である．

[4] $\underline{a=1,\ b=0,\ c=0\text{ のとき}}$，① より，
$A=E$ となるので，f は恒等変換である．
よって，原点を通らないすべての直線が f による不動直線である．**証終**

[別証] (多くの受験参考書にある代表的な解説)

$f(\mathrm{P})=\mathrm{P}$ なので，直線 OP 上の点はすべて不動点になる．OP 上にない点 Q をとり，その像 Q$'$ を考える．このとき，次のように場合分けをする．

[1] Q$'$ = Q または 直線 QQ$'$ が直線 OP に平行であるとき，Q を通り直線 OP に平行な直線を ℓ とすればよい．

[2] 直線 QQ$'$ が直線 OP と原点以外の点 R で交わるとき (R は不動点)，直線 QR を ℓ とすればよい．

[3] Q$'$ が直線 OQ 上にあるとき．P を通り OQ に平行な直線を ℓ とすればよい．**[証終]**

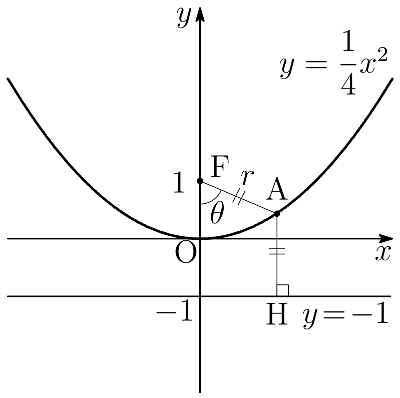
【感想】

1982 年の東大の 1 次変換の問題については，多くの書籍で上の別証と類似した解説ばかりで，A による f の振る舞いが見えてこない．

今回の熊大の 1 次変換の (3) は，(2) の結論によりロジックから $a=-\frac{1}{2}$ が求まり，これを (1) の結果に代入するだけで答えを出すことができる．

しかしながら，問題の本質を捉えて解説することが何よりも重要であると考えて証明を付けた．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) F は放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の焦点であり，準線の方程式は $y=-1$ である．



右の図から，放物線上の点 A の y 座標は

$$y=1-r\cos\theta$$

A から準線に下ろした垂線 AH の長さは

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}&=(1-r\cos\theta)-(-1)\\&=2-r\cos\theta\end{aligned}$$

放物線上の点 A について，$\mathrm{FA}=\mathrm{AH}$ であるから

$$r=2-r\cos\theta \qquad \text{これを解いて} \qquad \boldsymbol{r=\frac{2}{1+\cos\theta}}$$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{FA}_k=\dfrac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}\\&=\int_0^1\frac{2}{1+\cos\frac{\pi x}{2}}\,dx\\&=\int_0^1\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\,dx\\&=\left[\,\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi x}{4}\,\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{4}{\pi}}\end{aligned}$$