平成１９年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医，薬，工学部) 平成 19 年 2 月 25 日

$\boxed{1}$ a を定数とする。2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \qquad C_2 : y = 3(x-1)^2 + a$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ。

(2) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

(3) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるときの a の値を求めよ。

$\boxed{2}$ xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする。1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4 または 5 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む。以下の問いに答えよ。

(1) さいころを 5 回投げるとき，点 P が座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ。

(2) さいころを n 回投げるとき，点 P が x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げるとき，点 P の x 座標の期待値を求めよ。

$\boxed{3}$ 行列 A の表す移動によって xy 平面上の点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$ はそれぞれ $(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$ に移されるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A を求めよ。

(2) 曲線 $y = e^x$ 上を点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ が動くとき，P がこの移動によって移る点の軌跡 C を求めよ。ただし，$-\infty < t < \infty$ とする。

(3) 曲線 D を $y = x + \log\left(e + \dfrac{1}{e} - x\right)$ とする。ただし，$x < e + \dfrac{1}{e}$ である。2 つの曲線 C と D で囲まれる領域の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ a を定数とする。方程式 $(\log x)^2 = ax$ $(x > 0)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 解の個数を調べよ。必要なら，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$ を用いよ。

(2) 解がちょうど 2 個のとき，これらの解を p^2，q^2 $(0 < p < q)$ とおく。q の値を求めよ。また，p は $\dfrac{e}{e+1} < p < 1$ を満たすことを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=-x^2$ を微分すると　　$y'=-2x$

C_1 上の点 $(t,-t^2)$ における接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $-2t$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-t^2)=-2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=-2tx+t^2$$

ℓ と C_2 の共有点の x 座標は

$$3(x-1)^2+a=-2tx+t^2$$

すなわち　$3x^2+2(t-3)x-t^2+a+3=0$

の解であり，ℓ と C_2 が接するとき，この方程式は重解をもつので

$$(t-3)^2-3\cdot(-t^2+a+3)=0 \quad \text{すなわち} \quad 4t^2-6t-3a=0 \quad \cdots ①$$

このとき，ℓ が 2 本存在するためには，① の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(-3a)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

別解

C_1 は上に凸，C_2 は下に凸の放物線であるから，C_1 と C_2 が共有点をもたないとき，C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在する．
したがって，$y=-x^2$，$y=3(x-1)^2+a$ から y を消去して

$$-x^2=3(x-1)^2+a \quad \text{すなわち} \quad 4x^2-6x+a+3=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D<0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(a+3)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

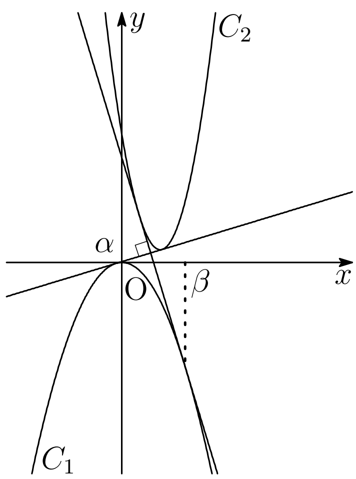
(2) ① の 2 解を α，β とすると，2 点 $(\alpha,-\alpha^2)$，$(\beta,-\beta^2)$ における接線の傾きは，それぞれ 2α，2β であり，これらが直交するとき

$$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

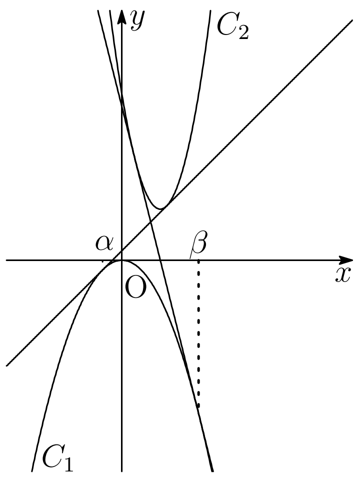
また，① の解と係数の関係から　$\alpha\beta=-\dfrac{3a}{4}$

したがって　　$-\dfrac{3a}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$a>-\dfrac{3}{4}$ に注意して　　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$



(3) ℓ 上の 2 点 $(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$ における接線を x 軸の正の向きから測った角を，それぞれ θ_1，θ_2 とすると



$$\tan\theta_1 = -2\alpha,\ \tan\theta_2 = -2\beta$$

このとき，$|\,\theta_1 - \theta_2\,| = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$ であるから $|\,\tan(\theta_1 - \theta_2)\,| = 1$ より

$$\left|\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}\right| = 1$$

したがって $$\left|\frac{2(\beta - \alpha)}{1 + 4\alpha\beta}\right| = 1$$

平方して整理すると $$4(\beta - \alpha)^2 = (1 + 4\alpha\beta)^2$$

したがって $$4\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} = (1 + 4\alpha\beta)^2$$

① の解と係数の関係から $\alpha + \beta = \dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta = -\dfrac{3a}{4}$ であるから

$$4\left(\frac{9}{4} + 3a\right) = (1 - 3a)^2$$

すなわち $$9a^2 - 18a - 8 = 0$$

$a > -\dfrac{3}{4}$ に注意して $$\boldsymbol{a = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{3}}$$

2 (1) P が点 $(2, -3)$ の位置にいるためには，x 軸方向に 2 回以上，y 軸方向に 3 回以上移動しなければならない．したがって，さいころを 5 回投げてこの位置にいるためには x 軸方向に 1 だけ進む移動を 2 回，y 軸方向へ -1 だけ進む移動を 3 回行うことになる．すなわち，さいころを 5 回投げて，1 または 2 の目が出る回数が 2 回，6 の目が出る回数が 3 回である確率を求めればよい．

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{972}}$$

(2) x 軸方向のみを移動して P が原点にいるためには，x 軸方向に 1 だけ進む回数と x 軸方向へ -1 だけ進む回数が等しい．したがって n が奇数のときのときは，求める確率は 0 である．n が偶数のとき，$m = \dfrac{n}{2}$ とおくと，求める確率は

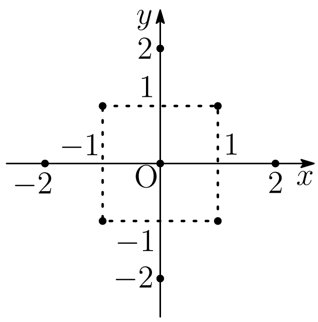
$${}_{2m}\mathrm{C}_m\left(\frac{2}{6}\right)^m\left(\frac{1}{6}\right)^m = \frac{(2m)!}{(m!)^2 \cdot 18^m}$$

ゆえに，m を自然数とすると，求める確率は

$$\boldsymbol{n = 2m - 1}\ \textbf{のとき}\quad \boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{n = 2m}\ \textbf{のとき}\quad \boldsymbol{\frac{(2m)!}{(m!)^2 \cdot 18^m}}$$

(3) さいころを2回投げたとき，点Pの座標は

x 座標が -2 のとき　$(-2,\ 0)$
x 座標が -1 のとき　$(-1,\ 1),\ (-1, -1)$
x 座標が 0 のとき　$(0,\ 2),\ (0,\ 0),\ (0, -2)$
x 座標が 1 のとき　$(1,\ 1),\ (1, -1)$
x 座標が 2 のとき　$(2,\ 0)$



となる．ゆえにそれぞれの確率は

x 座標が -2 のとき　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$

x 座標が -1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{36}$

x 座標が 0 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{6} \times 2 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{13}{36}$

x 座標が 1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{12}{36}$

x 座標が 2 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2 = \dfrac{4}{36}$

したがって，点Pの x 座標の期待値は

$$(-2) \times \frac{1}{36} + (-1) \times \frac{6}{36} + 0 \times \frac{13}{36} + 1 \times \frac{12}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

3 (1) 条件から　$A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　$\cdots$①

行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について　$\Delta = 0{\cdot}2 - 1{\cdot}1 = -1 \neq 0$

よって　$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

① より　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(2) $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ が行列 A の表す移動によって点 $(x,\ y)$ に移るとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

すなわち　$x = e^t$，$y = -t + e^t$

$-\infty < t < \infty$ より　$x = e^t > 0$，$t = \log x$

したがって，求める軌跡 C の方程式は

$$\boldsymbol{y = -\log x + x}$$

(3) C と D の交点の x 座標は

$$-\log x + x = x + \log\left(e + \frac{1}{e} - x\right)$$

$$\log\frac{1}{x} = \log\left(e + \frac{1}{e} - x\right)$$

よって　$\dfrac{1}{x} = e + \dfrac{1}{e} - x$

したがって　$x^2 - \left(e + \dfrac{1}{e}\right)x + 1 = 0$　これを解いて　$x = \dfrac{1}{e},\ e$

区間 $\left[\dfrac{1}{e},\ e\right]$ において　$\dfrac{1}{x} - \left(e + \dfrac{1}{e} - x\right) = \dfrac{1}{x}\left\{x^2 - \left(e + \dfrac{1}{e}\right)x + 1\right\}$

$$= \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{e}\right)(x - e) \leqq 0$$

ゆえに　$e + \dfrac{1}{e} - x \geqq \dfrac{1}{x}$

$$\log\left(e + \frac{1}{e} - x\right) \geqq \log\frac{1}{x}$$

よって　$x + \log\left(e + \dfrac{1}{e} - x\right) \geqq -\log x + x$

したがって，$\dfrac{1}{e} < x < e$ において，曲線 D は，曲線 C の上側にある．

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left\{x+\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)-(-\log x+x)\right\}dx$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left\{\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)+\log x\right\}dx$$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)dx$ において $e+\dfrac{1}{e}-x=t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

また，x と t の対応は右のようになる．

x	$\frac{1}{e}\longrightarrow e$
t	$e\longrightarrow\frac{1}{e}$

よって　$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)dx$

$$=\int_{e}^{\frac{1}{e}}\log t\cdot(-1)dt$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log t\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log x\,dx$$

したがって　$\displaystyle S=2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log x\,dx$

$$=2\Big[x\log x-x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}=\boldsymbol{\frac{4}{e}}$$

解説

等式 $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(a+b-x)\,dx}=\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$ を利用する．

証明 $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ において $a+b-x=t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x と t の対応は右のようになる．

x	$a\longrightarrow b$
t	$b\longrightarrow a$

よって　$\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx$

$$=\int_b^a f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $x \neq 0$ であるから $f(x) = \dfrac{(\log x)^2}{x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{2\log x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x - (\log x)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{\log x(2 - \log x)}{x^2}$$

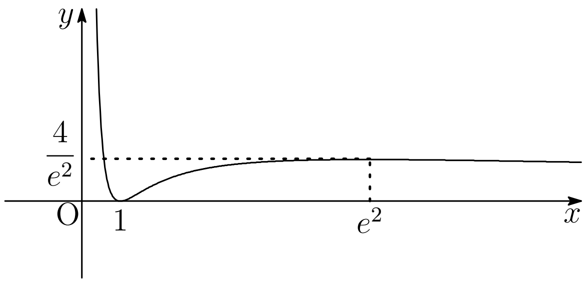
よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

また $$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{(\log x)^2}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$$

したがって，$y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる．



このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがって

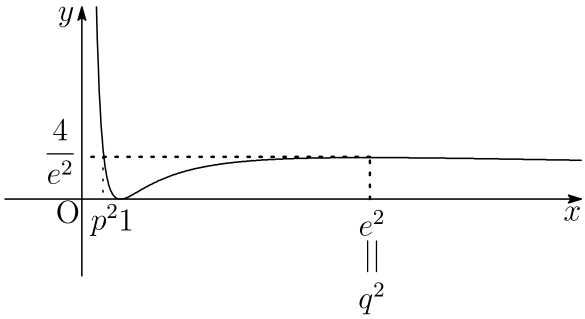
$\boldsymbol{a < 0}$ **のとき** **0個**

$\boldsymbol{a > \dfrac{4}{e^2}}$**，**$\boldsymbol{a = 0}$ **のとき** **1個**

$\boldsymbol{a = \dfrac{4}{e^2}}$ **のとき** **2個**

$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{4}{e^2}}$ **のとき** **3個**

(2) 解が 2 個となるのは $a = \dfrac{4}{e^2}$ のときで，$0 < p < q$ であるから p^2，q^2 は下の図ような位置関係になる．



$k = \dfrac{e}{e+1}$ とおくと

$$f(k^2) = \frac{(\log k^2)^2}{k^2} = \left(\frac{2\log k}{k}\right)^2 = \left\{\frac{2(e+1)}{e}\log\frac{e}{e+1}\right\}^2$$
$$= \frac{4}{e^2}\left\{(e+1)\log\frac{e+1}{e}\right\}^2 \quad \cdots ①$$

ここで関数 $g(x) = \log x$ を考え，この関数は区間 $(e,\ e+1)$ で微分可能で，

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

区間 $[e,\ e+1]$ において，平均値の定理を適用すると

$$\frac{\log(e+1) - \log e}{(e+1) - e} = \frac{1}{c}, \quad e < c < e+1$$

を同時に満たす c が存在する．よって

$$\frac{1}{e+1} < \log\frac{e+1}{e} < \frac{1}{e}$$

ゆえに　　$(e+1)\log\dfrac{e+1}{e} > 1 \quad \cdots ②$

$f(p^2) = \dfrac{4}{e^2}$ であるから，①，② より　　$f(k^2) > f(p^2)$

グラフから　　$k^2 < p^2 < 1,\ q^2 = e^2$

$0 < p < q$ より　　$\boldsymbol{\dfrac{e}{e+1} < p < 1,\ q = e}$