平成19年度　熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，医，薬，工学部) 平成19年2月25日

問題 1 2 3 4

1 a を定数とする。2つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \qquad C_2 : y = 3(x-1)^2 + a$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線が2本存在するための a の条件を求めよ。

(2) C_1，C_2 の両方に接する2本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

(3) C_1，C_2 の両方に接する2本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるときの a の値を求めよ。

2 xy 平面上で，点Pは原点を出発点とし，さいころを1回投げるたびに以下のように進むものとする。1または2の目が出たときは x 軸方向に1だけ進み，3の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4または5の目が出たときは y 軸方向に1だけ進み，6の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む。以下の問いに答えよ。

(1) さいころを5回投げるとき，点Pが座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ。

(2) さいころを n 回投げるとき，点Pが x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ。

(3) さいころを2回投げるとき，点Pの x 座標の期待値を求めよ。

3 行列 A の表す移動によって xy 平面上の点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$ はそれぞれ $(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$ に移されるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A を求めよ。

(2) 曲線 $y = e^x$ 上を点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ が動くとき，Pがこの移動によって移る点の軌跡 C を求めよ。ただし，$-\infty < t < \infty$ とする。

(3) 曲線 D を $y = x + \log\left(e + \dfrac{1}{e} - x\right)$ とする。ただし，$x < e + \dfrac{1}{e}$ である。2つの曲線 C と D で囲まれる領域の面積を求めよ。

4 a を定数とする。方程式 $(\log x)^2 = ax$ $(x > 0)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 解の個数を調べよ。必要なら，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x} = 0$ を用いよ。

(2) 解がちょうど 2 個のとき，これらの解を p^2，q^2 $(0 < p < q)$ とおく。q の値を求めよ。また，p は $\dfrac{e}{e+1} < p < 1$ を満たすことを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=-x^2$ を微分すると　$y'=-2x$

C_1 上の点 $(t,-t^2)$ における接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $-2t$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-t^2)=-2t(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=-2tx+t^2$$

ℓ と C_2 の共有点の x 座標は

$$3(x-1)^2+a=-2tx+t^2$$

すなわち　$3x^2+2(t-3)x-t^2+a+3=0$

の解であり，ℓ と C_2 が接するとき，この方程式は重解をもつので

$$(t-3)^2-3\cdot(-t^2+a+3)=0\quad \text{すなわち}\quad 4t^2-6t-3a=0 \quad \cdots①$$

このとき，ℓ が2本存在するためには，① の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(-3a)>0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

別解

C_1 は上に凸，C_2 は下に凸の放物線であるから，C_1 と C_2 が共有点をもたないとき，C_1，C_2 の両方に接する直線が2本存在する．

したがって，$y=-x^2$，$y=3(x-1)^2+a$ から y を消去して

$$-x^2=3(x-1)^2+a\quad \text{すなわち}\quad 4x^2-6x+a+3=0$$

この2次方程式の判別式を D とすると，$D<0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(a+3)<0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

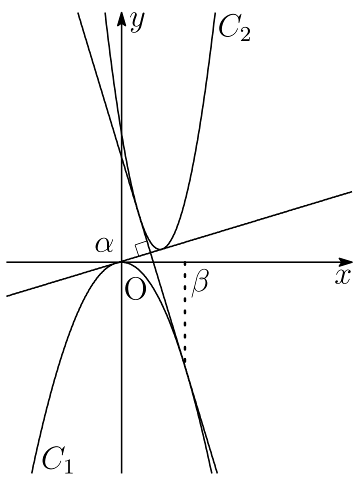
(2) ① の2解を α，β とすると，2点 $(\alpha,-\alpha^2)$，$(\beta,-\beta^2)$ における接線の傾きは，それぞれ -2α，-2β であり，これらが直交するとき

$$(-2\alpha)\cdot(-2\beta)=-1\quad \text{すなわち}\quad \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

また，① の解と係数の関係から　$\alpha\beta=-\frac{3a}{4}$

したがって　$-\frac{3a}{4}=-\frac{1}{4}$

$a>-\frac{3}{4}$ に注意して　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$

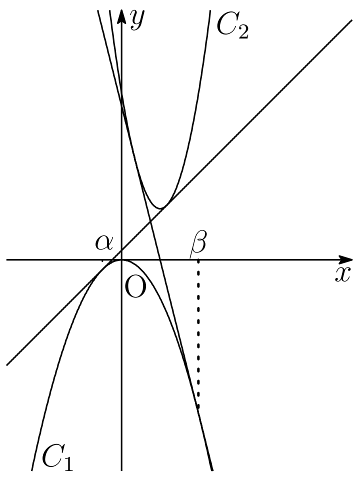


(3) ℓ 上の 2 点 $(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$ における接線を x 軸の正の向きから測った角を，それぞれ θ_1，θ_2 とすると

$$\tan\theta_1 = -2\alpha,\ \tan\theta_2 = -2\beta$$

このとき，$|\,\theta_1 - \theta_2\,| = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$ であるから $|\tan(\theta_1 - \theta_2)\,| = 1$ より

$$\left|\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}\right| = 1$$



したがって $$\left|\frac{2(\beta - \alpha)}{1 + 4\alpha\beta}\right| = 1$$

平方して整理すると $$4(\beta - \alpha)^2 = (1 + 4\alpha\beta)^2$$

したがって $$4\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} = (1 + 4\alpha\beta)^2$$

① の解と係数の関係から $\alpha + \beta = \dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta = -\dfrac{3a}{4}$ であるから

$$4\left(\frac{9}{4} + 3a\right) = (1 - 3a)^2$$

すなわち $$9a^2 - 18a - 8 = 0$$

$a > -\dfrac{3}{4}$ に注意して $$\boldsymbol{a = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{3}}$$

2 (1) P が点 (2, −3) の位置にいるためには，x 軸方向に 2 回以上，y 軸方向に 3 回以上移動しなければならない．したがって，さいころを 5 回投げてこの位置にいるためには x 軸方向に 1 だけ進む移動を 2 回，y 軸方向へ −1 だけ進む移動を 3 回行うことになる．すなわち，さいころを 5 回投げて，1 または 2 の目が出る回数が 2 回，6 の目が出る回数が 3 回である確率を求めればよい．

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3=\boldsymbol{\frac{5}{972}}$$

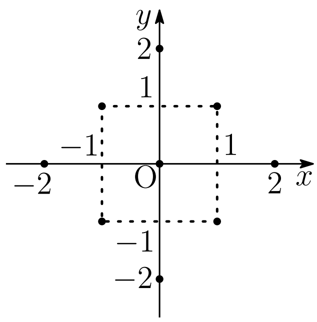
(2) x 軸方向のみを移動して P が原点にいるためには，x 軸方向に 1 だけ進む回数と x 軸方向へ −1 だけ進む回数が等しい．したがって n が奇数のときのときは，求める確率は 0 である．n が偶数のとき，$m=\dfrac{n}{2}$ とおくと，求める確率は

$${}_{2m}\mathrm{C}_m\left(\frac{2}{6}\right)^m\left(\frac{1}{6}\right)^m=\frac{(2m)!}{(m!)^2{\cdot}18^m}$$

ゆえに，m を自然数とすると，求める確率は

$$\boldsymbol{n=2m-1\ \text{のとき}\quad 0,\qquad n=2m\ \text{のとき}\quad \frac{(2m)!}{(m!)^2{\cdot}18^m}}$$

(3) さいころを 2 回投げたとき，点 P の座標は



x 座標が −2 のとき　(−2, 0)
x 座標が −1 のとき　(−1, 1), (−1, −1)
x 座標が 0 のとき　(0, 2), (0, 0), (0, −2)
x 座標が 1 のとき　(1, 1), (1, −1)
x 座標が 2 のとき　(2, 0)

となる．ゆえにそれぞれの確率は

x 座標が −2 のとき　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{36}$

x 座標が −1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}+{}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{6}{36}$

x 座標が 0 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 2+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{13}{36}$

x 座標が 1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}+{}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{12}{36}$

x 座標が 2 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2=\dfrac{4}{36}$

したがって，点 P の x 座標の期待値は

$$(-2)\times\frac{1}{36}+(-1)\times\frac{6}{36}+0\times\frac{13}{36}+1\times\frac{12}{36}+2\times\frac{4}{36}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

■

3 (1) 条件から $A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots ①$

行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について $\Delta = 0{\cdot}2 - 1{\cdot}1 = -1 \neq 0$

よって $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

① より $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(2) $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ が行列 A の表す移動によって点 $(x,\ y)$ に移るとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

すなわち $x = e^t,\ y = -t + e^t$

$-\infty < t < \infty$ より $x = e^t > 0,\ t = \log x$

したがって，求める軌跡 C の方程式は

$$\boldsymbol{y = -\log x + x}$$

(3) C と D の交点の x 座標は

$$-\log x + x = x + \log\left(e + \frac{1}{e} - x\right)$$

$$\log\frac{1}{x} = \log\left(e + \frac{1}{e} - x\right)$$

よって $\dfrac{1}{x} = e + \dfrac{1}{e} - x$

したがって $x^2 - \left(e + \dfrac{1}{e}\right)x + 1 = 0$ これを解いて $x = \dfrac{1}{e},\ e$

区間 $\left[\dfrac{1}{e},\ e\right]$ において $\dfrac{1}{x} - \left(e + \dfrac{1}{e} - x\right) = \dfrac{1}{x}\left\{x^2 - \left(e + \dfrac{1}{e}\right)x + 1\right\}$

$$= \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{e}\right)(x - e) \leqq 0$$

ゆえに　$$e+\frac{1}{e}-x \geqq \frac{1}{x}$$

$$\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right) \geqq \log\frac{1}{x}$$

よって　$$x+\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right) \geqq -\log x + x$$

したがって，$\dfrac{1}{e}<x<e$ において，曲線 D は，曲線 C の上側にある．
よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left\{x+\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)-(-\log x + x)\right\}dx \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left\{\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)+\log x\right\}dx \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)dx$ において $e+\dfrac{1}{e}-x=t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

また，x と t の対応は右のようになる．

x	$\frac{1}{e}\longrightarrow e$
t	$e\longrightarrow \frac{1}{e}$

よって　$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)dx \\ &= \int_{e}^{\frac{1}{e}}\log t\cdot(-1)dt \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{e}\log t\,dt = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\log x\,dx \end{aligned}$$

したがって　$$\begin{aligned} S &= 2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log x\,dx \\ &= 2\Big[x\log x - x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e} = \boldsymbol{\frac{4}{e}} \end{aligned}$$

解説

次式を利用する.

$$\boldsymbol{\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$

証明 $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ において $a+b-x=t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-1$

x と t の対応は右のようになる.

x	$a \longrightarrow b$
t	$b \longrightarrow a$

よって $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx$

$$= \int_b^a f(t)\cdot(-1)dt$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

■

$\boxed{4}$ (1) $x \neq 0$ であるから $f(x) = \dfrac{(\log x)^2}{x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{2\log x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x - (\log x)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{\log x(2 - \log x)}{x^2}$$

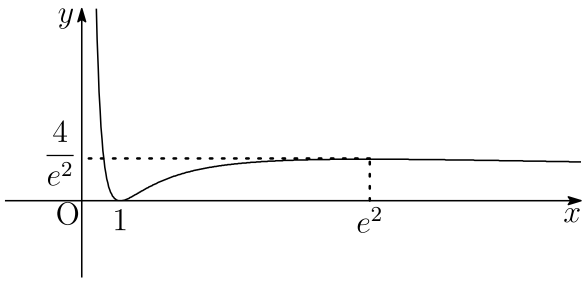
よって，$f(x)$ の増減表は次のようなる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{(\log x)^2}{x} = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$$

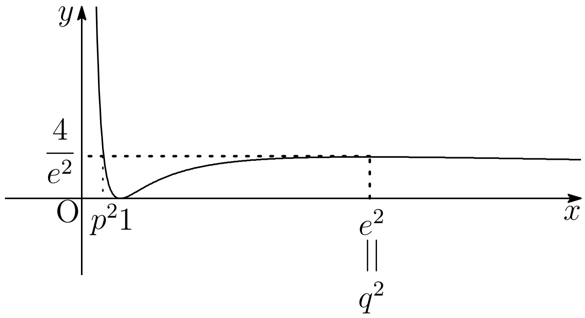
したがって，$y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる．



このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがって

$\boldsymbol{a < 0}$ **のとき**	**0 個**
$\boldsymbol{a > \dfrac{4}{e^2}}$**，**$\boldsymbol{a = 0}$ **のとき**	**1 個**
$\boldsymbol{a = \dfrac{4}{e^2}}$ **のとき**	**2 個**
$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{4}{e^2}}$ **のとき**	**3 個**

(2) 解が 2 個となるのは $a=\dfrac{4}{e^2}$ のときで，$0<p<q$ であるから p^2，q^2 は下の図ような位置関係になる．



$k=\dfrac{e}{e+1}$ とおくと

$$f(k^2)=\frac{(\log k^2)^2}{k^2}=\left(\frac{2\log k}{k}\right)^2=\left\{\frac{2(e+1)}{e}\log\frac{e}{e+1}\right\}^2$$
$$=\frac{4}{e^2}\left\{(e+1)\log\frac{e+1}{e}\right\}^2 \quad \cdots①$$

ここで関数 $g(x)=\log x$ を考え，この関数は区間 $(e,\ e+1)$ で微分可能で，

$$g'(x)=\frac{1}{x}$$

区間 $[e,\ e+1]$ において，平均値の定理を適用すると

$$\frac{\log(e+1)-\log e}{(e+1)-e}=\frac{1}{c},\quad e<c<e+1$$

を同時に満たす c が存在する．よって

$$\frac{1}{e+1}<\log\frac{e+1}{e}<\frac{1}{e}$$

ゆえに $$(e+1)\log\frac{e+1}{e}>1 \quad \cdots②$$

$f(p^2)=\dfrac{4}{e^2}$ であるから，①，② より $\qquad f(k^2)>f(p^2)$

グラフから $\qquad k^2<p^2<1,\ q^2=e^2$

$0<p<q$ より $\qquad \boldsymbol{\dfrac{e}{e+1}<p<1,\ q=e}$

■