平成１８年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医，薬，工学部) 平成 18 年 2 月 25 日

1 大小 2 つのサイコロを投げて，大きいサイコロの目の数を a，小さいサイコロの目の数を b とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ の最小値が -5 より小さくなる確率を求めよ。

(2) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと x 軸との交点で，x 座標の大きい方を選ぶ。その x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。

(3) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと関数 $y = bx^2$ のグラフが異なる 2 点で交わる確率を求めよ。

2 原点を O とする座標空間の 4 点 $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{P}(0,\ 1,\ 0)$ および，平面 OAC，OBC，ABC 上にそれぞれ点 Q，R，S をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ が平面 OAC，OBC，ABC にそれぞれ直交するとき，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を成分で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ を成分で表せ。

(3) $\triangle\mathrm{QRS}$ の面積を求めよ。

3 n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ のとき，関数 $f(x) = (1-x)^3 x^n$ の極値を求めよ。

(2) 定積分 $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^3 x^n \, dx$ を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。

4 関数 $f(x) = 1 + \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}} dt \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $u = e^{\tan t}$ を t で微分せよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して得られる図形の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = ax^2 + 2x - b = a\left(x + \dfrac{1}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{a} - b$

$a > 0$ であるから　最小値は $-\dfrac{1}{a} - b$

条件より　$-\dfrac{1}{a} - b < -5$　すなわち　$5 - b < \dfrac{1}{a}$

$0 < \dfrac{1}{a} \leqq 1$ であり，$5 - b$ は整数であるから

$$5 - b \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 5,\ 6$$

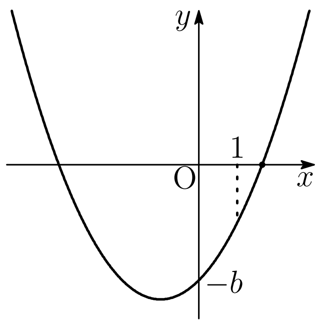
また，a は 1，2，3，4，5，6 の 6 通りある．

よって　$\dfrac{6 \times 2}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) $f(x) = ax^2 + 2x - b$ とおくと

$$f(0) = -b < 0$$

$a > 0$ かつ $f(0) < 0$ より $f(1) < 0$ を満たせばよいから



$$f(1) = a + 2 - b < 0 \text{ より} \quad b > a + 2$$

これを満たすのは,

$$(a, b) = (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 6)$$

の 6 通り．　　よって　$\dfrac{6}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(3) 2 式より　$ax^2 + 2x - b = bx^2$　すなわち　$(a - b)x^2 + 2x - b = 0$

条件を満たすのは，$a - b \neq 0$ かつ 判別式 $D > 0$ のときであるから

$$D/4 = 1 + b(a - b) > 0 \text{ より} \quad b(b - a) < 1$$

$b(b - a)$ は整数で，$a - b \neq 0$ であるから

$$b(b - a) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad b < a$$

$b < a$ を満たす a，b の組は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^2} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点 Q は平面 OAC 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s, t \text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp$ 平面 OAC より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ であるから　$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$

$$s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ であるから　$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$$

上の 2 式に $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (0,\ 1,\ 0)$ を代入すると

$$12s + 6t - 3 = 0, \quad 6s + 8t - 2 = 0$$

これを解いて　$s = \dfrac{1}{5}$，$t = \dfrac{1}{10}$

したがって，① より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \frac{1}{5}(\sqrt{3},\ 3,\ 0) + \frac{1}{10}(0,\ 2,\ 2) - (0,\ 1,\ 0) \\ &= \boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)}\end{aligned}$$

(2) 点 S は平面 ABC 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp$平面 ABC より $\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ は yz 平面上のベクトルである．

ゆえに，点 M(0, 3, 0) をとると，S は直線 CM 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad (k\text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PS}} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= k(0,\ 2,\ 2) + (1-k)(0,\ 3,\ 0) - (0,\ 1,\ 0)\\ &= (0,\ 2-k,\ 2k)\end{aligned}$$

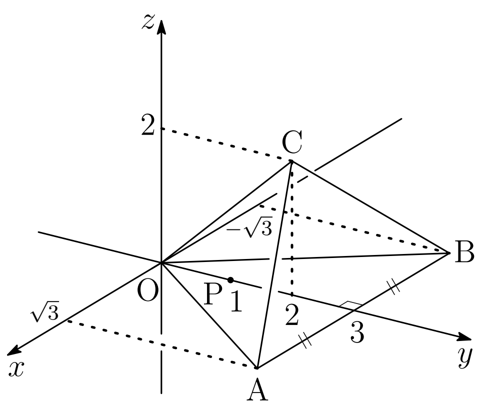
また，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 3,\ 0) - (0,\ 2,\ 2) = (0,\ 1, -2)$$

これらを $\overrightarrow{\mathrm{PS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}} = 0$ に代入すると

$$0\cdot 0 + (2-k)\cdot 1 + 2k\cdot(-2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{2}{5}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \left(\mathbf{0},\ \mathbf{\frac{8}{5}},\ \mathbf{\frac{4}{5}}\right)$



(3) (1) より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$$= (0,\ 1,\ 0) + \left(\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

(2) より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PS}}$

$$= (0,\ 1,\ 0) + \left(0,\ \frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

$$= \left(0,\ \frac{13}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

四面体 OABC は yz 平面に関して対称である．点 Q と点 R は yz 平面に関して対称であるから

$$\mathrm{R}\left(-\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

△QRS は，QS = RS の二等辺三角形であり，QR の中点を T とすると

$$\mathrm{T}\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

であるから

$$\mathrm{ST} = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{4}{5} - \frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\mathrm{QR} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

したがって，求める △QRS の面積は

$$\frac{1}{2} \times \mathrm{QR} \times \mathrm{ST} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{5} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{30}}{25}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $n \geqq 2$, $f(x) = (1-x)^3 x^n$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1-x)^2(-1)\cdot x^n + (1-x)^3\cdot nx^{n-1} \\ &= (1-x)^2 x^{n-1}\{n-(n+3)x\} \end{aligned}$$

n が奇数のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$

n が偶数のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$

n が奇数のとき　$x = \dfrac{n}{n+3}$ で**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}}$

n が偶数のとき　$x = 0$ で**極小値** $\mathbf{0}$,

$x = \dfrac{n}{n+3}$ で**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}}$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 (1-x)^3 x^n\,dx \\ &= \int_0^1 (x^n - 3x^{n+1} + 3x^{n+2} - x^{n+3})\,dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{3}{n+2}x^{n+2} + \frac{3}{n+3}x^{n+3} - \frac{1}{n+4}x^{n+4}\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+4}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+4} \\ =& \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - 2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) \end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

により

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $u' = e^{\tan t}(\tan t)' = \boldsymbol{\dfrac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}}$

(2) $u = e^{\tan t}$ とおくと，(1) の結果および $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ に注意して

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \int_{-x}^{x} \frac{1}{e^{\tan t}(1 + e^{\tan t})} \cdot \frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt \\
&= 1 + \int_{e^{\tan(-x)}}^{e^{\tan x}} \frac{1}{u(1+u)}\,du \\
&= 1 + \Big[\ \log\left|\frac{u}{1+u}\right|\ \Big]_{e^{-\tan x}}^{e^{\tan x}} \\
&= 1 + \log\frac{e^{\tan x}}{1 + e^{\tan x}} - \log\frac{e^{-\tan x}}{1 + e^{-\tan x}} \\
&= 1 + \log e^{\tan x} \\
&= \boldsymbol{1 + \tan x}
\end{aligned}$$

別解 $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\,dt = \int_{-x}^{0} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\,dt \quad \cdots ①$

$\displaystyle\int_{-x}^{0} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\,dt$ において $t = -s$ とおくと　　$\dfrac{dt}{ds} = -1$

また，t と s の対応は右のようになる．

t	$-x \longrightarrow 0$
s	$x \longrightarrow 0$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{0} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\,dt &= \int_{x}^{0} \frac{1 + \tan^2(-s)}{1 + e^{\tan(-s)}} \cdot (-1)\,ds \\
&= \int_{0}^{x} \frac{1 + \tan^2 s}{1 + e^{-\tan s}}\,ds \\
&= \int_{0}^{x} \frac{e^{\tan s}(1 + \tan^2 s)}{e^{\tan s} + 1}\,ds \\
&= \int_{0}^{x} \frac{e^{\tan t}(1 + \tan^2 t)}{1 + e^{\tan t}}\,dt
\end{aligned}$$

ゆえに，① から次の等式が得られる．

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\,dt &= \int_{0}^{x} \frac{e^{\tan t}(1 + \tan^2 t)}{1 + e^{\tan t}}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\,dt \\
&= \int_{0}^{x} (1 + \tan^2 t)\,dt \\
&= \int_{0}^{x} \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \Big[\ \tan t\ \Big]_{0}^{x} = \tan x
\end{aligned}$$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = 1 + \tan x}$

(3) 求める回転体の体積を V とすると，(2) の結果より

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan x)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+2\tan x+\tan^2 x) \, dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\tan x \right) dx \\
&= \pi \Big[\ \tan x - 2\log|\cos x| \ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \pi \left(1 - 2\log\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \boldsymbol{\pi(1+\log 2)}
\end{aligned}
$$