平成17年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120分
理系 (理，医，薬，工学部) 平成17年2月25日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標空間内に4点 A(3, 0, 0)，B(0, 2, 1)，C(0, 2, 0)，D(3, 2, 0) を考え，線分 CD 上の点 P$(x,\ 2,\ 0)$ に対して，三角形 PAB の面積を S とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{APB} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ を x で表せ。

(2) S の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ ボタンを1回押すごとに，画面に1，2，3，4のいずれかの数を表示する機械がある。この機械が数 X を表示する確率は次のとおりである。

X	1	2	3	4
確率	$2a$	b	b	a

次の問いに答えよ。

(1) b を a で表せ。

(2) ボタンを2回押したときに表示される数のうち小さくないほうの数を Z とするとき，Z の期待値 m を a で表せ。

(3) m を最大にする a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上において，x 軸上の点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ と曲線 $C : y = \dfrac{1}{x^2}$ 上の点列 $\{\mathrm{Q}_n\}$ を次のように定める。$\mathrm{P}_1(a,\ 0)$ $(a > 0)$ とする。P_n $(n \geqq 1)$ が定まったとき，P_n を通り y 軸に平行な直線と C との交点を Q_n とする。Q_n における C の接線と x 軸との交点を P_{n+1} とする。次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P}_n(a_n,\ 0)$ とするとき，a_n を a で表せ。

(2) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を a で表せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 平面上の点の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。極方程式 $r = f(\theta)$ によって表される曲線 C について，次の問いに答えよ。

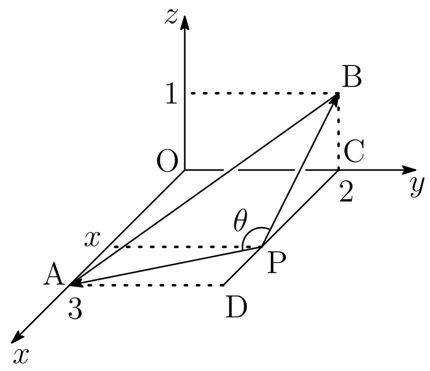
(1) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ について，$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$ を $f(\theta)$，$f'(\theta)$ を用いて表せ。

(2) $f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ のとき，曲線 C の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) P は線分 CD 上の点であるから　　$0 \leqq x \leqq 3$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (3,\ 0,\ 0) - (x,\ 2,\ 0) = (3-x, -2,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (0,\ 2,\ 1) - (x,\ 2,\ 0) = (-x,\ 0,\ 1)$$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (3-x)\cdot(-x) + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 1 = x^2 - 3x$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \sqrt{(3-x)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \sqrt{(-x)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} = \boldsymbol{\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x^2-6x+13}\sqrt{x^2+1}}}$　　$\mathbf{(0 \leqq \boldsymbol{x} \leqq 3)}$

(2) $\triangle$PAB の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2-6x+13)(x^2-3x) - (x^2-3x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5x^2-6x+13} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 3$ において，S は最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{56}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{70}}{5}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $X=1$ から $X=4$ までのそれぞれの確率の和は 1 であるから

$$2a+b+b+a=1 \quad \text{これを } b \text{ について解くと} \quad b=\frac{1-3a}{2}$$

また，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ に注意して $\quad \boldsymbol{b=\dfrac{1-3a}{2}} \quad \boldsymbol{\left(0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}\right)}$

(2) ともに 1 である確率は $\quad (2a)^2=4a^2$

ともに 2 以下である確率は $\quad (2a+b)^2=\left(2a+\dfrac{1-3a}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}$

ともに 3 以下である確率は $\quad (1-a)^2=a^2-2a+1$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&P(Z=1)=4a^2\\
&P(Z=2)=\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)-4a^2=-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\\
&P(Z=3)=(a^2-2a+1)-\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{2}a+\frac{3}{4}\\
&P(Z=4)=1-(a^2-2a+1)=-a^2+2a
\end{aligned}$$

よって，m は

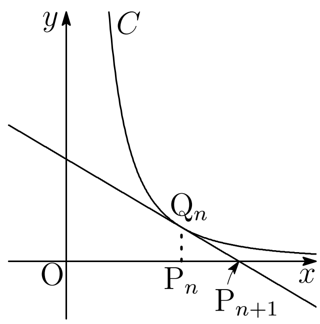
$$\begin{aligned}
m&=\sum_{k=1}^{4}k\cdot P(Z=k)\\
&=1\cdot 4a^2+2\left(-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{2}a+\frac{3}{4}\right)+4\left(-a^2+2a\right)\\
&=\boldsymbol{-\frac{21}{4}a^2+\frac{3}{2}a+\frac{11}{4}} \quad \boldsymbol{\left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}\right)}
\end{aligned}$$

(3) したがって，(2) の結果から

$$m=-\frac{21}{4}\left(a-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{20}{7} \quad \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}\right)$$

よって，m は，$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{7}}$ で最大となる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{P}_n(a_n,\ 0)$ より　$\mathrm{Q}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$



$y=\dfrac{1}{x^2}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{2}{x^3}$

Q_n における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{{a_n}^2}=-\frac{2}{{a_n}^3}(x-a_n)$$

ゆえに　$y=-\dfrac{2x}{{a_n}^3}+\dfrac{3}{{a_n}^2}$

この接線の x 軸との交点の x 座標は $y=0$ を代入して　$x=\dfrac{3}{2}a_n$

これが P_{n+1} の x 座標であるから　$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n$

また，$\mathrm{P}_1(a,\ 0)$ であるから　$\boldsymbol{a_n=a\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

(2) $a>0$ および (1) の結果から

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)\times\frac{1}{{a_n}^2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a_n-a_n\right)\times\frac{1}{{a_n}^2}\\&=\frac{1}{4a_n}=\frac{1}{4a}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，初項が $\dfrac{1}{4a}$，公比が $\dfrac{2}{3}$ の無限等比級数である．

公比について $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ であるから，収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{4a}\times\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=\boldsymbol{\frac{3}{4a}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を θ について微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

したがって

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \\
&= \boldsymbol{\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2}
\end{aligned}$$

(2) $f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ を微分すると

$$f'(\theta) = 3\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos\frac{\theta}{3} = \sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

したがって

$$\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2 = \left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2 + \left(\sin^3\frac{\theta}{3}\right)^2 = \sin^4\frac{\theta}{3}$$

求める長さを l とすると

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos\frac{2}{3}\theta\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\,\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{3}{8}\sqrt{3}}
\end{aligned}$$