平成16年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，医，薬，工学部) 平成16年2月25日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 円$C_1 : x^2+y^2=1$と円$C_2 : (x-2)^2+(y-4)^2=5$とに点Pから接線を引く。PからC_1の接点までの距離とC_2の接点までの距離との比が$1:2$になるとする。このとき，Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 整数m，nが$1 \leqq m < n$を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $x>3$ならば，不等式

$$(mx-1)(nx-1) > x^2+1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\tan\alpha = \dfrac{1}{m}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{n}$を満たし，かつ$\tan(\alpha+\beta)$の値が整数となる角度$\alpha$，$\beta$があるとする。このような，$(m,\ n)$の組をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数nに対して，$x \geqq 0$ならば，不等式

$$e^x > \frac{x^n}{n!}$$

が成り立つことを示せ。

(2) (1)の不等式を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$であることを示せ。

(3) 曲線$y=xe^{-x}$の点$(a,\ ae^{-a})$における接線と法線がx軸と交わる点を，それぞれPとQとおく。ただし$a>1$とする。線分PQの長さを$l(a)$とするとき，極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty} l(a)$を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 楕円$E : (x-1)^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$について，次の問いに答えよ。ただし，$b$は正の定数とする。

(1) Eを表す極方程式を$r=f(\theta)$とするとき，$f(\theta)$を求めよ。

(2) 点PがE上を動くとする。原点OとPとの距離OPが点$(2,\ 0)$以外で最大となるためのbの条件を求めよ。

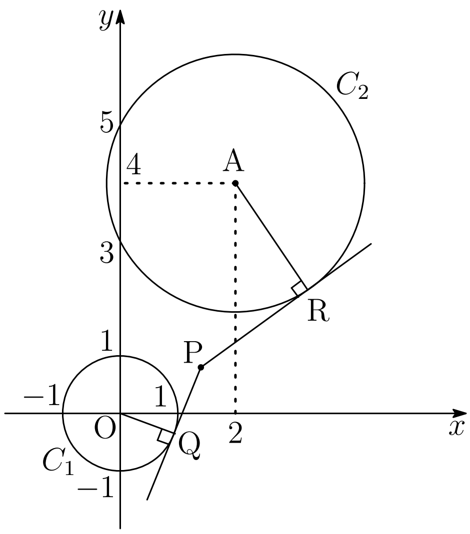
(3) bは(2)で求めた条件を満たすとし，OPが最大となる点におけるθの値をθ_0とおく。ただし$0<\theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$とする。このとき(1)で求めた$f(\theta)$について，定積分

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)\,d\theta$$

の値をbの式で表せ。

解答例

$\boxed{\textbf{1}}$ C_1，C_2 の中心をそれぞれ O，A とし，P から C_1，C_2 に引いた接線の接点を，それぞれ Q，R とする．



P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P に関する条件は

$$\mathrm{PQ} : \mathrm{PR} = 1 : 2$$

これより　　$2\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$

すなわち　　$4\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PR}^2 \quad \cdots ①$

$\triangle\mathrm{OQP}$，$\triangle\mathrm{ARP}$ において，$\angle\mathrm{OQP} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{ARP} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{OQ}^2 = x^2 + y^2 - 1$$
$$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{AP}^2 - \mathrm{AR}^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 5$$

上の 2 式を ① に代入して，整理すると

$$4(x^2+y^2-1) = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 5$$
$$3x^2 + 3y^2 + 4x + 8y - 19 = 0$$
$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{77}{9} \quad \cdots ②$$

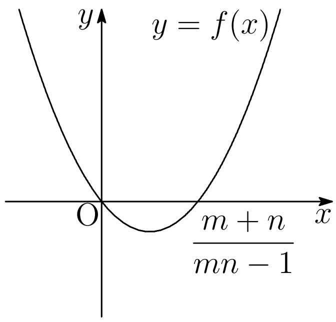
C_1，C_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とすると　　$r_1 = 1$，$r_2 = \sqrt{5}$

$\mathrm{OA} = 2\sqrt{5}$ より，$r_1 + r_2 < \mathrm{OA}$ であるから，2 円 C_1，C_2 は互いに外部にある．

よって，点 P は円 ② 上にある．

したがって，求める軌跡は，**点 $\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{77}}{3}$ の円**である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=(mx-1)(nx-1)-(x^2+1)$ とおくと



$$f(x)=(mn-1)x^2-(m+n)x$$

$1 \leqq m < n$ より $mn-1>0 \cdots$ ① であるから，$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，x 軸との共有点の x 座標は

$$x=0,\quad \frac{m+n}{mn-1}$$

ここで

$$\begin{aligned} 3-\frac{m+n}{mn-1} &= \frac{3(mn-1)-(m+n)}{mn-1} \\ &= \frac{(9mn-3m-3n+1)-10}{3(mn-1)} \\ &= \frac{(3m-1)(3n-1)-10}{3(mn-1)} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

m，n は $1 \leqq m < n$ である整数であるから　$n \geqq 2$

ゆえに　　$3m-1 \geqq 2$，$3n-1 \geqq 5$

$mn-1>0$，$(3m-1)(3n-1) \geqq 2 \cdot 5$ および ② から

$$3-\frac{m+n}{mn-1} \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{m+n}{mn-1} \leqq 3 \quad \cdots ③$$

③ より，$x>3$ のとき　$f(x)>0$

すなわち　$x>3$ のとき　$(mx-1)(nx-1)>x^2+1$

(2) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}=\frac{m+n}{mn-1}$$

$1 \leqq m < n$，①，③ より，$\tan(\alpha+\beta)$ がとる整数値は，3 以下の自然数であるから，次の 3 つに場合に分けて求める．

［1］ $\tan(\alpha+\beta)=1$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=1 \quad \text{ゆえに} \quad (m-1)(n-1)=2$$

このとき，$0 \leqq m-1 < n-1$ に注意して

$$m-1=1,\ \ n-1=2 \quad \text{すなわち} \quad (m,\ n)=(2,\ 3)$$

［2］ $\tan(\alpha+\beta)=2$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=2 \quad \text{ゆえに} \quad (2m-1)(2n-1)=5$$

このとき，$1 \leqq 2m-1 < 2n-1$ に注意して

$$2m-1=1,\ \ 2n-1=5 \quad \text{すなわち} \quad (m,\ n)=(1,\ 3)$$

［3］ $\tan(\alpha+\beta)=3$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=3 \quad \text{ゆえに} \quad (3m-1)(3n-1)=10$$

このとき，$2 \leqq 3m-1 < 3n-1$ に注意して

$$3m-1=2,\ \ 3n-1=5 \quad \text{すなわち} \quad (m,\ n)=(1,\ 2)$$

［1］～［3］より　　$\boldsymbol{(m,\ n)=(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 証明する不等式を (A) とする．

$x=0$ のとき，(A) は自明であるので，$x>0$ について，(A) が成り立つことを示す．

［1］ $0 \leqq t \leqq x$ とすると，$e^t \geqq 1$ であるから

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x dt \quad \text{ゆえに} \quad e^x - 1 > x$$

したがって　　$e^x > x$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x \frac{t^k}{k!}\,dt \quad \text{ゆえに} \quad e^x - 1 > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

したがって　　$e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n に対して，(A) が成り立つ．

補足

上の証明において，実際は，$n=1$ のとき，$e^x > 1+x$ が成り立つ．
$x>0$ のとき，次式が成り立つことが，上と同様にして導かれる．

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

(2) (1) の結果より，$x>0$ のとき　$e^x > \dfrac{x^3}{3!}$

ゆえに　　　　$0 < x^2 e^{-x} < \dfrac{6}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

(3) $y = xe^{-x}$ を微分すると　$y' = (1-x)e^{-x}$
曲線 $y = xe^{-x}$ の点 $(a,\ ae^{-a})$ における接線の方程式は

$$y - ae^{-a} = (1-a)e^{-a}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = e^{-a}\{(1-a)x + a^2\}$$

P の座標は，これに $y = 0$ を代入して　$\left(\dfrac{a^2}{a-1},\ 0\right)$
曲線 $y = xe^{-x}$ の点 $(a,\ ae^{-a})$ における法線の方程式は

$$y - ae^{-a} = \frac{e^a}{a-1}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{e^a}{a-1}(x-a) + ae^{-a}$$

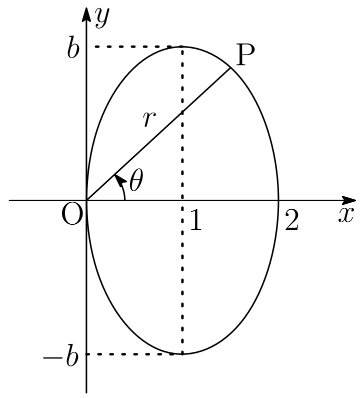
Q の座標は，これに $y = 0$ を代入して　$(a - a(a-1)e^{-2a},\ 0)$
P，Q の x 座標を，それぞれ x_p，x_q とすると

$$\begin{aligned} x_p - x_q &= \frac{a^2}{a-1} - \{a - a(a-1)e^{-2a}\} \\ &= 1 + \frac{1}{a-1} + a(a-1)e^{-2a} \\ &= 1 + \frac{1}{a-1} + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\cdot a^2e^{-a}\cdot e^{-a} \end{aligned}$$

$l(a) = |x_p - x_q|$ であることと，(2) の結果から $\lim\limits_{a\to\infty} a^2e^{-a} = 0$ であることに注意して

$$\boldsymbol{\lim_{a\to\infty} l(a) = 1}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入して整理すると



$$(r\cos\theta-1)^2+\frac{(r\sin\theta)^2}{b^2}=1$$

$$r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=0$$

$$r\left\{r\left(b^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-2b^2\cos\theta\right\}=0$$

したがって

$$r=0 \quad \text{または} \quad r=\frac{2b^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

上式の第 2 式は，$\cos\theta=0$ のとき $r=0$ であるから，E を表す極方程式を次のように定めてよい．

$$\boldsymbol{f(\theta)=\frac{2b^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$$

(2) (1) より，E は，一般性を失うことなく，次のように定めることができる．

$$f(\theta)=\frac{2b^2\cos\theta}{(b^2-1)\cos^2\theta+1} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

$f(\theta)$ の最大値について，次の 3 つに場合分けする．

[1] $b^2-1<0$ のとき

$$b^2\leqq(b^2-1)\cos^2\theta+1\leqq1, \quad 0\leqq2b^2\cos\theta\leqq2b^2$$

$\theta=0$ で $(b^2-1)\cos^2\theta+1=b^2$, $2b^2\cos\theta=2b^2$ であるから，$f(\theta)$ は，点 $(2, 0)$ で最大値をとり，これは条件に反する

[2] $b^2-1=0$ のとき　$f(\theta)=2\cos\theta$

$\theta=0$ すなわち点 $(2,\ 0)$ で $f(\theta)$ は最大となり，これも条件に反する．

[3] $b^2-1>0$ のとき，$f(\theta)$ は，$\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ で最小値をとる．$u=\cos\theta$ とおくと，点 (2, 0) 以外で最大値をもつので，$0<u<1$ の範囲で，次式が最大値をもつための条件を求めればよい．

$$f(\theta)=\frac{2b^2\cos\theta}{(b^2-1)\cos^2\theta+1}=\frac{2b^2u}{(b^2-1)u^2+1}=\frac{2b^2}{(b^2-1)u+\dfrac{1}{u}}$$

$g(u)=(b^2-1)u+\dfrac{1}{u}$ とおくと，$g(u)$ が $0<u<1$ で最小値もつための条件を求めればよい．

$$g'(u)=b^2-1-\frac{1}{u^2}=\frac{b^2-1}{u^2}\left(u+\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}\right)\left(u-\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}\right)$$

$g(u)$ の増減は，右のように，b は次式を満たせばよい．

u	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{b^2-1}}$	$\cdots$	1
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$0<\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}<1$$

$b>0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{b>\sqrt{2}}$

(3) (2) の結果より　$\cos\theta_0=\dfrac{1}{\sqrt{b^2-1}}$

また，$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\theta_0=\sqrt{\dfrac{b^2-2}{b^2-1}}$

$$\int_0^{\theta_0}f(\theta)\,d\theta=\int_0^{\theta_0}\frac{2b^2\cos\theta}{b^2-(b^2-1)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$t=\sqrt{b^2-1}\sin\theta$ とすると　$\dfrac{dt}{d\theta}=\sqrt{b^2-1}\cos\theta$

θ と t の対応は，右のようになる．よって

θ	$0\longrightarrow\theta_0$
t	$0\longrightarrow\sqrt{b^2-2}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta_0}f(\theta)d\theta&=\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\int_0^{\sqrt{b^2-2}}\frac{2b}{b^2-t^2}\,dt\\&=\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\int_0^{\sqrt{b^2-2}}\left(\frac{1}{b+t}+\frac{1}{b-t}\right)dt\\&=\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\Big[\ \log\left|\frac{b+t}{b-t}\right|\ \Big]_0^{\sqrt{b^2-2}}\\&=\boldsymbol{\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\log\frac{b+\sqrt{b^2-2}}{b-\sqrt{b^2-2}}}\end{aligned}$$