

平成 15 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

理系 (理, 医, 薬, 工学部) 平成 15 年 2 月 25 日

- 1 袋の中に 1 から 3 までの数を書いた札が 2 枚ずつ, 計 6 枚入っている。この中から同時に 2 枚の札を取り出し, その数を m, n とするとき, 次の問いに答えよ。ただし, $m \geq n$ とする。

- (1) $m = n$ となる確率を求めよ。
- (2) 直線 $y = x + c$ と点 (m, n) との距離の 2 乗を S とする。 S の期待値を求めよ。
- (3) S の期待値が最小になる c の値を求めよ。

- 2 正三角形 PQR の 3 辺 PQ, QR, RP 上にそれぞれ点 A, B, C をとる。 $\triangle PCA$, $\triangle QAB$, $\triangle RBC$ の外接円の中心をそれぞれ O_1, O_2, O_3 , その半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とする。 $\triangle ABC$ の 3 辺の長さを $a = BC, b = CA, c = AB$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) r_1, r_2, r_3 を a, b, c で表わせ。
- (2) $\triangle O_1O_2O_3$ は正三角形であることを示せ。

- 3 関数 $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{10-x^2}}$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) $\int_0^1 f(x) dx$ を求めよ。
- (2) 関数 $g(x)$ を各区間 $k \leq x \leq k+1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) において,

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)$$

と定義する。

$$a_n = \int_0^n g(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とするとき, 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

- 4 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の関係式

$$f(x) = \int_0^x (g(t) + t \cos t) dt + \sin x, \quad g(x) = \sin x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t) dt$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。
- (2) $\int_0^\pi (f(x) - g(x))^2 dx$ を求めよ。

解答例

1 (1) 6枚から2枚取り出す方法は ${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ (通り)

$m = n$ となるのは, $(m, n) = (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ の3通り

よって, 求める確率は $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

(2) 点 (m, n) から直線 $y = x + c$ ($x - y + c = 0$) までの距離を d とすると

$$d = \frac{|m - n + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|m - n + c|}{\sqrt{2}}$$

よって $S = d^2 = \frac{1}{2}(m - n + c)^2$

$m - n = 1$ となるのは, $(m, n) = (2, 1), (3, 2)$ で, その確率は

$$\frac{2 \times 2}{15} + \frac{2 \times 2}{15} = \frac{8}{15}$$

$m - n = 2$ となるのは, $(m, n) = (3, 1)$ で, その確率は

$$\frac{2 \times 2}{15} = \frac{4}{15}$$

よって, (1) および上の結果から, S の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}c^2 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2}(1+c)^2 \times \frac{8}{15} + \frac{1}{2}(2+c)^2 \times \frac{4}{15} \\ &= \frac{1}{30}(15c^2 + 32c + 24) \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $E = \frac{1}{2} \left(c + \frac{16}{15} \right)^2 + \frac{52}{225}$

よって, 期待値 E が最小となる c の値は $c = -\frac{16}{15}$

2 (1) $\triangle CPA$, $\triangle AQB$, $\triangle BRC$ に正弦定理を適用すると

$$r_1 = \frac{b}{2 \sin \angle CPA} = \frac{b}{2 \sin 60^\circ} = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$r_2 = \frac{c}{2 \sin \angle AQB} = \frac{c}{2 \sin 60^\circ} = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$r_3 = \frac{a}{2 \sin \angle BRC} = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(2) (中心角) = $2 \times$ (円周角) であるから

$$\angle CO_1A = 2 \times \angle CPA = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle AO_2B = 2 \times \angle AQB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle BO_3C = 2 \times \angle BRC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$\triangle CO_1A$, $\triangle AO_2B$, $\triangle BO_3C$ は, 二等辺三角形であるから, これらの三角形の底角は 30° である. $\angle O_1AO_2$ について

$$\angle CAB \leq 120^\circ \text{ のとき (図 1)} \quad \angle O_1AO_2 = 60^\circ + \angle CAB$$

$$\angle CAB > 120^\circ \text{ のとき (図 2)} \quad \angle O_1AO_2 = 360^\circ - (60^\circ + \angle CAB)$$

これらの場合において, ともに $\cos \angle O_1AO_2 = \cos(60^\circ + \angle CAB)$

図 1

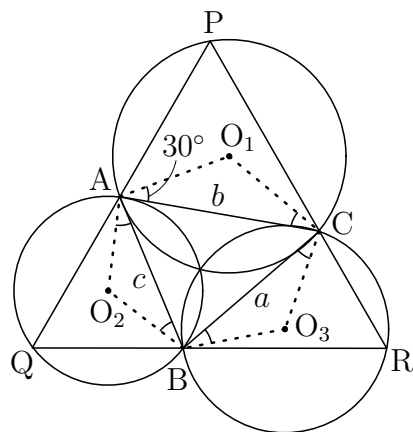
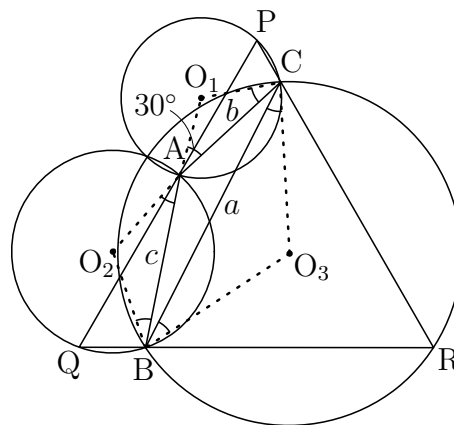


図 2



$\triangle O_1AO_2$ に余弦定理を適用すると, (1) の結果から

$$\begin{aligned} \overline{O_1O_2}^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \angle O_1AO_2 \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(60^\circ + \angle CAB) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} (\cos 60^\circ \cos \angle CAB - \sin 60^\circ \sin \angle CAB) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{1}{3}bc \cos \angle CAB + \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}bc \sin \angle CAB \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ の面積を S とする．また，余弦定理により

$$\begin{aligned}\overline{O_1O_2}^2 &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{1}{3}bc \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{2\sqrt{3}}{3}S \\ &= \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}S\end{aligned}$$

このとき，式の対称性から

$$\overline{O_2O_3}^2 = \overline{O_3O_1}^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}S$$

したがって $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$

よって， $\triangle O_1O_2O_3$ は，正三角形である．

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{10-x^2}}\right) dx = \left[x + \sqrt{10-x^2}\right]_0^1 = 4 - \sqrt{10}$$

$$(2) \quad a_n = \int_0^n g(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} g(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k) dx$$

$x - k = t$ とおくと，(1) の結果から

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k) dx = \left(\frac{2}{3}\right)^k \int_0^1 f(t) dt = (4 - \sqrt{10}) \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

したがって

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (4 - \sqrt{10}) \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= (4 - \sqrt{10}) \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3(4 - \sqrt{10}) \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3(4 - \sqrt{10})$

□4 (1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t) dt$ は定数であるから, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t) dt = k$ とおくと

$$g(x) = \sin x + k \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (g(t) + t \cos t) dt + \sin x \\ &= \int_0^x (\sin t + k + t \cos t) dt + \sin x \\ &= \left[t \sin t + kt \right]_0^x + \sin x \\ &= (x+1) \sin x + kx \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

したがって, ②より

$$\begin{aligned} k &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t) dt = \left[f(t) - \sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[\{(t+1) \sin t + kt\} - \sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[t \sin t + kt \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = k\pi \end{aligned}$$

ゆえに $k = 0$

よって, ①, ②より

$$f(x) = (x+1) \sin x, \quad g(x) = \sin x$$

(2) (1)の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \{f(x) - g(x)\}^2 dx &= \int_0^\pi x^2 \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$