平成15年度　熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，医，薬，工学部)平成15年2月25日

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{1}$ 袋の中に1から3までの数を書いた札が2枚ずつ，計6枚入っている。この中から同時に2枚の札を取り出し，その数を m，n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$m \geqq n$ とする。

(1) $m = n$ となる確率を求めよ。

(2) 直線 $y = x + c$ と点 $(m,\ n)$ との距離の2乗を S とする。S の期待値を求めよ。

(3) S の期待値が最小になる c の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 正三角形PQRの3辺PQ，QR，RP上にそれぞれ点A，B，Cをとる。△PCA，△QAB，△RBCの外接円の中心をそれぞれO_1，O_2，O_3，その半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とする。△ABCの3辺の長さを $a = \mathrm{BC}$，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) r_1，r_2，r_3 を a，b，c で表わせ。

(2) $\triangle \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ は正三角形であることを示せ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x)$ を各区間 $k \leqq x \leqq k + 1$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ において，

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^k f(x - k)$$

と定義する。

$$a_n = \int_0^n g(x)\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

とするとき，数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の関係式

$$f(x) = \int_0^x (g(t) + t\cos t)\,dt + \sin x, \quad g(x) = \sin x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t)\,dt$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^\pi (f(x) - g(x))^2\,dx$ を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 6 枚から 2 枚取り出す方法は　　${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15$ (通り)

$m = n$ となるのは，$(m,\ n) = (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3)$ の 3 通り

よって，求める確率は　　$\dfrac{3}{15} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2) 点 $(m,\ n)$ から直線 $y = x + c$ $(x - y + c = 0)$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|m - n + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|m - n + c|}{\sqrt{2}}$$

よって　　$S = d^2 = \dfrac{1}{2}(m - n + c)^2$

$m - n = 1$ となるのは，$(m,\ n) = (2,\ 1),\ (3,\ 2)$ で，その確率は

$$\frac{2\times2}{15} + \frac{2\times2}{15} = \frac{8}{15}$$

$m - n = 2$ となるのは，$(m,\ n) = (3,\ 1)$ で，その確率は

$$\frac{2\times2}{15} = \frac{4}{15}$$

よって，(1) および上の結果から，S の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}c^2 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2}(1 + c)^2 \times \frac{8}{15} + \frac{1}{2}(2 + c)^2 \times \frac{4}{15} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{30}(15c^2 + 32c + 24)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　　$E = \dfrac{1}{2}\left(c + \dfrac{16}{15}\right)^2 + \dfrac{52}{225}$

よって，期待値 E が最小となる c の値は　　$\boldsymbol{c = -\dfrac{16}{15}}$ ■

2 (1) △CPA，△AQB，△BRC に正弦定理を適用すると

$$r_1 = \frac{b}{2\sin\angle\mathrm{CPA}} = \frac{b}{2\sin 60^\circ} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$$
$$r_2 = \frac{c}{2\sin\angle\mathrm{AQB}} = \frac{c}{2\sin 60^\circ} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$$
$$r_3 = \frac{a}{2\sin\angle\mathrm{BRC}} = \frac{b}{2\sin 60^\circ} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$$

(2) (中心角) $= 2\times$ (円周角) であるから

$$\angle\mathrm{CO_1A} = 2\times\angle\mathrm{CPA} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$$
$$\angle\mathrm{AO_2B} = 2\times\angle\mathrm{AQB} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$$
$$\angle\mathrm{BO_3C} = 2\times\angle\mathrm{BRC} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$$

$\triangle\mathrm{CO_1A}$，$\triangle\mathrm{AO_2B}$，$\triangle\mathrm{BO_3C}$ は，二等辺三角形であるから，これらの三角形の底角は 30° である．$\angle\mathrm{O_1AO_2}$ について

$\angle\mathrm{CAB} \leqq 120^\circ$ のとき (図 1)　　$\angle\mathrm{O_1AO_2} = 60^\circ + \angle\mathrm{CAB}$

$\angle\mathrm{CAB} > 120^\circ$ のとき (図 2)　　$\angle\mathrm{O_1AO_2} = 360^\circ - (60^\circ + \angle\mathrm{CAB})$

これらの場合において，ともに　$\cos\angle\mathrm{O_1AO_2} = \cos(60^\circ + \angle\mathrm{CAB})$

図 1

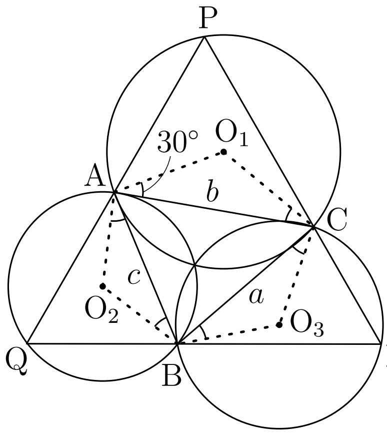
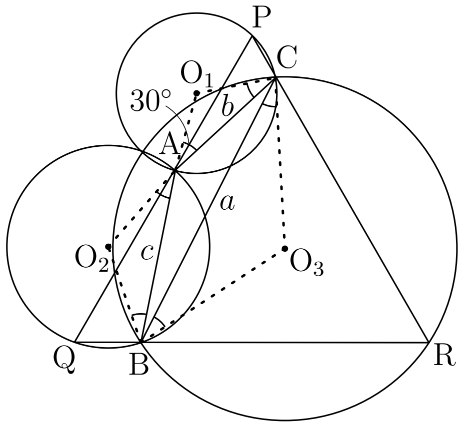


図 2



$\triangle\mathrm{O_1AO_2}$ に余弦定理を適用すると，(1) の結果から

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{O_1O_2}}^2 &= {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos\angle\mathrm{O_1AO_2} \\
&= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\cos(60^\circ + \angle\mathrm{CAB}) \\
&= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}(\cos 60^\circ\cos\angle\mathrm{CAB} - \sin 60^\circ\sin\angle\mathrm{CAB}) \\
&= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{1}{3}bc\cos\angle\mathrm{CAB} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}bc\sin\angle\mathrm{CAB}
\end{aligned}$$

$\triangle$ABC の面積を S とする．また，余弦定理により

$$\overline{\mathrm{O_1O_2}}^2 = \frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}-\frac{1}{3}bc\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{2\sqrt{3}}{3}S$$
$$=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2\sqrt{3}}{3}S$$

このとき，式の対称性から

$$\overline{\mathrm{O_2O_3}}^2=\overline{\mathrm{O_3O_1}}^2=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2\sqrt{3}}{3}S$$

したがって　　$\mathrm{O_1O_2}=\mathrm{O_2O_3}=\mathrm{O_3O_1}$

よって，$\triangle\mathrm{O_1O_2O_3}$ は，正三角形である． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{x}{\sqrt{10-x^2}}\right)dx=\left[\,x+\sqrt{10-x^2}\,\right]_0^1=\mathbf{4-\sqrt{10}}$

(2) $$a_n=\int_0^n g(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}g(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)\,dx$$

$x-k=t$ とおくと，(1) の結果から

$$\int_k^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)\,dx=\left(\frac{2}{3}\right)^k\int_0^1 f(t)\,dt=(4-\sqrt{10})\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

したがって

$$a_n=\sum_{k=0}^{n-1}(4-\sqrt{10})\left(\frac{2}{3}\right)^k$$
$$=(4-\sqrt{10})\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=3(4-\sqrt{10})\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a_n}=\mathbf{3(4-\sqrt{10})}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t)\, dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t)\, dt = k$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sin x + k \quad \cdots ① \\
f(x) &= \int_0^x (g(t) + t\cos t)\, dt + \sin x \\
&= \int_0^x (\sin t + k + t\cos t)\, dt + \sin x \\
&= \Big[\, t\sin t + kt \,\Big]_0^x + \sin x \\
&= (x+1)\sin x + kx \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

したがって，② より

$$
\begin{aligned}
k &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t)\, dt = \Big[\, f(t) - \sin t \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \Big[\, \{(t+1)\sin t + kt\} - \sin t \,\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \Big[\, t\sin t + kt \,\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = k\pi
\end{aligned}
$$

ゆえに　　$k = 0$

よって，①，② より

$$\boldsymbol{f(x) = (x+1)\sin x, \quad g(x) = \sin x}$$

(2) (1) の結果から

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \{f(x) - g(x)\}^2\, dx &= \int_0^\pi x^2 \sin^2 x\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2(1 - \cos 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\, \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \,\Big]_0^\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

■