# 平成14年度　熊本大学2次試験前期日程 (数学問題)120分
# 理系 (理，医，薬，工学部) 平成14年2月25日

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ さいころを繰り返し投げて，$n$ 回目に出た目の数を $X_n$ とし，$a_n = X_1X_2\cdots X_n$ とする。このとき，各 $n$ について，$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a > 1$，$a > p > 0$ とする。2直線 $l_1 : y = 2x-1$，$l_2 : y = a$ の交点をS，$l_1$ と $x$ 軸の交点をTとし，$y$ 軸上の点P$(0,\ p)$，$l_1$ 上の点A$(1,\ 1)$，$l_2$ 上の点Q$(q,\ a)$ をとる。$\angle\mathrm{PQS} = 135^\circ$，$\angle\mathrm{AQS} = 45^\circ$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $p$，$q$ それぞれを $a$ で表せ。

(2) $\angle\mathrm{PAT} = \angle\mathrm{QAS}$ であるとき，$p$，$a$ それぞれの値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 楕円 $E : \dfrac{x^2}{8} + y^2 = 1$ について，次の問いに答えよ。

(1) $E$ 上の点 $(a,\ b)$ における $E$ の接線の $x$ 切片と $y$ 切片の和を $a$ で表したものを $f(a)$ とするとき，$f(a)$ を求めよ。ただし，$a > 0$，$b > 0$ とする。

(2) $f(a)$ が最小となる $a$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a > 0$ とするとき，関数 $f(x) = x^2e^{-\frac{x}{a}}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $x = c$ で $f(x)$ が極大値をとるとき，$c$ を $a$ で表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ を $a$ で表せ。

解答例

**1** $a_n \leqq 9$ となる確率を $p_n$ とする．

［1］$n=1$ のとき　すべての $X_1$ に対して $a_1 = X_1 \leqq 9$ であるから　$p_1 = 1$

［2］$n=2$ のとき

1 の目が 2 回出るのは，1 通り

1 の目が 1 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5 \times {}_2\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が出ないのは，次の 6 通り

$$(X_1,\ X_2) = (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

したがって　$p_2 = \dfrac{1 + 5 \times {}_2\mathrm{C}_1 + 6}{6^2} = \dfrac{17}{36}$

［3］$n \geqq 3$ のとき，1 以外の目が出る回数は 3 回以内であることに注意して

1 の目が $n$ 回出るのは，1 通り

1 の目が $(n-1)$ 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5 \times {}_n\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が $(n-2)$ 回だけ出るのは，残りの目が次の組合せで　$6 \times {}_n\mathrm{C}_2$ (通り)

$$(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

1 の目が $(n-3)$ 回だけ出るのは，残りの目が $(2,\ 2,\ 2)$ で　${}_n\mathrm{C}_3$ (通り)

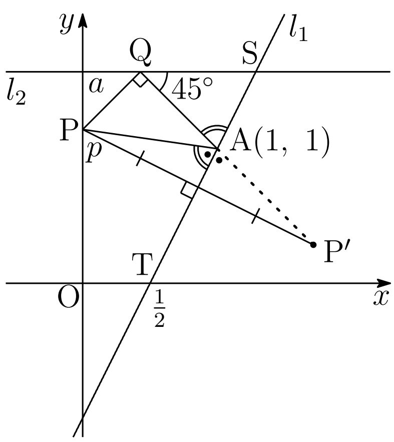
したがって
$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{6^n}(1 + 5 \times {}_n\mathrm{C}_1 + 6 \times {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3) \\ &= \frac{1}{6^n}\left\{1 + 5n + 3n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right\} \\ &= \frac{1}{6^{n+1}}(n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

① は，$n=1$，$n=2$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{6^{n+1}}(n^3 + 15n^2 + 14n + 6)}$$

■

**2** (1) $a > 1$，$a > p$，$\angle\mathrm{PQS} = 135°$，$\angle\mathrm{AQS} = 45°$ であるから，直線AQの傾きは $-1$，直線PQの傾きは1である．




したがって，直線AQの方程式は

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

すなわち　$y = -x + 2$　$\cdots$①

直線①と直線 $l_2 : y = a \cdots$② の交点がQであるから，①，②を解いて

$$\mathrm{Q}(2 - a,\ a)$$

直線PQは，Qを通り傾き1の直線であるから，その方程式は

$$y - a = 1\{x - (2 - a)\} \quad \text{すなわち} \quad y = x + 2a - 2$$

ゆえに，Pの座標は　$(0,\ 2a - 2)$

よって　　$\boldsymbol{p = 2a - 2,\ q = 2 - a}$

(2) $l_1$ に関して，Pと対称な点を $\mathrm{P}'(s,\ t)$ とする．

$l_1$ の傾きは2，直線 $\mathrm{PP}'$ の傾きは $\dfrac{t - 2a + 2}{s}$ である．$l_1 \perp \mathrm{PP}'$ であるから

$$2 \times \frac{t - 2a + 2}{s} = -1 \quad \text{すなわち} \quad s + 2t = 4a - 4 \quad \cdots③$$

線分 $\mathrm{PP}'$ の中点 $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{2a - 2 + t}{2}\right)$ が $l_1$ 上にあるから

$$\frac{2a - 2 + t}{2} = 2 \times \frac{s}{2} - 1 \quad \text{すなわち} \quad 2s - t = 2a \quad \cdots④$$

③，④を解いて $s = \dfrac{8a - 4}{5}$，$t = \dfrac{6a - 8}{5}$　ゆえに　$\mathrm{P}'\left(\dfrac{8a - 4}{5},\ \dfrac{6a - 8}{5}\right)$

$\angle\mathrm{PAT} = \angle\mathrm{QAS}$ であるとき，$\mathrm{P}'$ は直線①上にあるので

$$\frac{6a - 8}{5} = -\frac{8a - 4}{5} + 2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = \frac{11}{7}}$$

これを(1)の結果に代入して　　$\boldsymbol{p = \dfrac{8}{7}}$　■

$\boxed{3}$ (1) $E : \dfrac{x^2}{8} + y^2 = 1$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は　$\dfrac{ax}{8} + by = 1$

この接線の $x$ 切片，$y$ 切片はそれぞれ，$\dfrac{8}{a}$，$\dfrac{1}{b}$ であるから

$$f(a) = \frac{8}{a} + \frac{1}{b} \quad \cdots ①$$

点 $(a,\ b)$ は $E$ 上の点であるから，$a > 0$，$b > 0$ に注意して

$$\frac{a^2}{8} + b^2 = 1 \quad \cdots ② \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{\sqrt{8-a^2}}{2\sqrt{2}} \quad (0 < a < 2\sqrt{2})$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{f(a) = \dfrac{8}{a} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8-a^2}}}$

(2) ① は，$a$ の関数であるから，その第 1 次，第 2 次導関数を求めると

$$f'(a) = -\frac{8}{a^2} - \frac{b'}{b^2} \quad \cdots ③$$
$$f''(a) = \frac{16}{a^3} + \frac{2(b')^2}{b^3} - \frac{b''}{b^2} \quad \cdots ④$$

② を $a$ で微分すると　$\dfrac{a}{4} + 2bb' = 0 \quad \cdots ⑤$　ゆえに　$b' = -\dfrac{a}{8b} \quad \cdots ⑤'$

⑤$'$ を ③ に代入すると

$$f'(a) = -\frac{8}{a^2} + \frac{a}{8b^3} = \frac{(a-4b)(a^2+4ab+16b^2)}{8a^2b^3} \quad \cdots ③'$$

⑤ を $a$ について微分すると　$\dfrac{1}{4} + 2(b')^2 + 2bb'' = 0$

⑤$'$ をこれに代入し，$b''$ について解くと　$b'' = -\dfrac{1}{8b} - \dfrac{a^2}{64b^3} \quad \cdots ⑥$

⑤$'$，⑥ を ④ に代入して整理すると

$$f''(a) = \frac{16}{a^3} + \frac{1}{8b^3} + \frac{3a^2}{64b^5} \quad \cdots ④'$$

$a > 0$，$b > 0$ であるから，常に　$f''(a) > 0$

ゆえに，$f'(a) = 0$ となるとき，$f(a)$ は極小かつ最小である．

③$'$ より，$f'(a) = 0$ となるとき　$a = 4b \quad \cdots ⑦$

②，⑦ を $a > 0$ に注意して解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=x^2e^{-\frac{x}{a}}$ を微分すると

$$f'(x)=2xe^{-\frac{x}{a}}+x^2\left(-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)$$
$$=-\frac{x}{a}(x-2a)e^{-\frac{x}{a}}$$

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ |

$a>0$ であるから，増減表は，右のようになる．

よって　　$\boldsymbol{c=2a}$

(2) (1) の結果から

$$\int_0^c f(x)\,dx=\int_0^{2a}x^2e^{-\frac{x}{a}}\,dx$$
$$=-a\Big[\,(x^2+2ax+2a^2)e^{-\frac{x}{a}}\,\Big]_0^{2a}$$
$$=\boldsymbol{2a^3\left(1-\frac{5}{e^2}\right)}$$

解説　部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{kx}f(x)\,dx=\frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}+C$$

上式において $k=-\dfrac{1}{a}$，$f(x)=x^2$ とすると

$$\int x^2e^{-\frac{x}{a}}\,dx=-ae^{-x}(x^2+2ax+2a^2)+C$$

■