平成 14 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医，薬，工学部) 平成 14 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ さいころを繰り返し投げて，n 回目に出た目の数を X_n とし，$a_n = X_1X_2\cdots X_n$ とする。このとき，各 n について，$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a > 1$，$a > p > 0$ とする。2 直線 $l_1 : y = 2x - 1$，$l_2 : y = a$ の交点を S，l_1 と x 軸の交点を T とし，y 軸上の点 P$(0,\ p)$，l_1 上の点 A$(1,\ 1)$，l_2 上の点 Q$(q,\ a)$ をとる。$\angle\mathrm{PQS} = 135^\circ$，$\angle\mathrm{AQS} = 45^\circ$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) p，q それぞれを a で表せ。

(2) $\angle\mathrm{PAT} = \angle\mathrm{QAS}$ であるとき，p，a それぞれの値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 楕円 $E : \dfrac{x^2}{8} + y^2 = 1$ について，次の問いに答えよ。

(1) E 上の点 $(a,\ b)$ における E の接線の x 切片と y 切片の和を a で表したものを $f(a)$ とするとき，$f(a)$ を求めよ。ただし，$a > 0$，$b > 0$ とする。

(2) $f(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a > 0$ とするとき，関数 $f(x) = x^2e^{-\frac{x}{a}}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $x = c$ で $f(x)$ が極大値をとるとき，c を a で表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ を a で表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a_n \leqq 9$ となる確率を p_n とする．

［1］$n=1$ のとき　すべての X_1 に対して $a_1 = X_1 \leqq 9$ であるから　$p_1 = 1$

［2］$n=2$ のとき

1 の目が 2 回出るのは，1 通り

1 の目が 1 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5 \times {}_2\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が出ないのは，次の 6 通り

$$(X_1,\ X_2) = (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

したがって　$p_2 = \dfrac{1+5\times{}_2\mathrm{C}_1+6}{6^2} = \dfrac{17}{36}$

［3］$n \geqq 3$ のとき，1 以外の目が出る回数は 3 回以内であることに注意して

1 の目が n 回出るのは，1 通り

1 の目が $(n-1)$ 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5 \times {}_n\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が $(n-2)$ 回だけ出るのは，残りの目が次の組合せで　$6 \times {}_n\mathrm{C}_2$ (通り)

$$(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

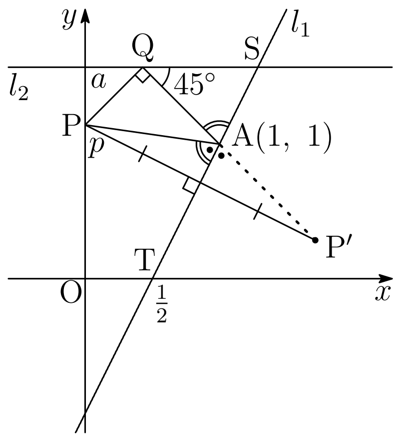
1 の目が $(n-3)$ 回だけ出るのは，残りの目が $(2,\ 2,\ 2)$ で　${}_n\mathrm{C}_3$ (通り)

したがって
$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{6^n}(1+5\times{}_n\mathrm{C}_1+6\times{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3) \\ &= \frac{1}{6^n}\left\{1+5n+3n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right\} \\ &= \frac{1}{6^{n+1}}(n^3+15n^2+14n+6) \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

① は，$n=1$，$n=2$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{6^{n+1}}(n^3+15n^2+14n+6)}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a > 1$, $a > p$, $\angle\mathrm{PQS} = 135^\circ$, $\angle\mathrm{AQS} = 45^\circ$ であるから，直線AQの傾きは-1，直線PQの傾きは1である．



したがって，直線AQの方程式は

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

すなわち　$y = -x + 2 \quad \cdots ①$

直線①と直線 $l_2 : y = a \cdots ②$ の交点がQであるから，①，②を解いて

$$\mathrm{Q}(2 - a,\ a)$$

直線PQは，Qを通り傾き1の直線であるから，その方程式は

$$y - a = 1\{x - (2 - a)\} \quad \text{すなわち} \quad y = x + 2a - 2$$

ゆえに，Pの座標は　$(0,\ 2a - 2)$

よって　　$\boldsymbol{p = 2a - 2,\ q = 2 - a}$

(2) l_1 に関して，Pと対称な点を $\mathrm{P}'(s,\ t)$ とする．

l_1 の傾きは2，直線PP′の傾きは $\dfrac{t - 2a + 2}{s}$ である．$l_1 \perp \mathrm{PP}'$ であるから

$$2 \times \frac{t - 2a + 2}{s} = -1 \quad \text{すなわち} \quad s + 2t = 4a - 4 \quad \cdots ③$$

線分PP′の中点 $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{2a - 2 + t}{2}\right)$ が l_1 上にあるから

$$\frac{2a - 2 + t}{2} = 2 \times \frac{s}{2} - 1 \quad \text{すなわち} \quad 2s - t = 2a \quad \cdots ④$$

③，④を解いて $s = \dfrac{8a - 4}{5}$，$t = \dfrac{6a - 8}{5}$　ゆえに　$\mathrm{P}'\left(\dfrac{8a - 4}{5},\ \dfrac{6a - 8}{5}\right)$

$\angle\mathrm{PAT} = \angle\mathrm{QAS}$ であるとき，P′は直線①上にあるので

$$\frac{6a - 8}{5} = -\frac{8a - 4}{5} + 2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = \frac{11}{7}}$$

これを(1)の結果に代入して　　$\boldsymbol{p = \dfrac{8}{7}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $E : \dfrac{x^2}{8} + y^2 = 1$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は　$\dfrac{ax}{8} + by = 1$

この接線の x 切片，y 切片はそれぞれ，$\dfrac{8}{a}$，$\dfrac{1}{b}$ であるから

$$f(a) = \frac{8}{a} + \frac{1}{b} \quad \cdots ①$$

点 $(a,\ b)$ は E 上の点であるから，$a > 0$，$b > 0$ に注意して

$$\frac{a^2}{8} + b^2 = 1 \quad \cdots ② \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{\sqrt{8 - a^2}}{2\sqrt{2}} \quad (0 < a < 2\sqrt{2})$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{f(a) = \dfrac{8}{a} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8 - a^2}}}$

(2) ① は，a の関数であるから，その第 1 次，第 2 次導関数を求めると

$$f'(a) = -\frac{8}{a^2} - \frac{b'}{b^2} \quad \cdots ③$$

$$f''(a) = \frac{16}{a^3} + \frac{2(b')^2}{b^3} - \frac{b''}{b^2} \quad \cdots ④$$

② を a で微分すると　$\dfrac{a}{4} + 2bb' = 0 \quad \cdots ⑤$　ゆえに　$b' = -\dfrac{a}{8b} \quad \cdots ⑤'$

⑤′ を ③ に代入すると

$$f'(a) = -\frac{8}{a^2} + \frac{a}{8b^3} = \frac{(a - 4b)(a^2 + 4ab + 16b^2)}{8a^2b^3} \quad \cdots ③'$$

⑤ を a について微分すると　$\dfrac{1}{4} + 2(b')^2 + 2bb'' = 0$

⑤′ をこれに代入し，b'' について解くと　$b'' = -\dfrac{1}{4b} - \dfrac{a^2}{64b^3} \quad \cdots ⑥$

⑤′，⑥ を ④ に代入して整理すると

$$f''(a) = \frac{16}{a^3} + \frac{1}{4b^3} + \frac{3a^2}{64a^5} \quad \cdots ④'$$

$a > 0$，$b > 0$ であるから，常に　$f''(a) > 0$

ゆえに，$f'(a) = 0$ となるとき，$f(a)$ は極小かつ最小である．

③′ より，$f'(a) = 0$ となるとき　$a = 4b \quad \cdots ⑦$

②，⑦ を $a > 0$ に注意して解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}}$ を微分すると

$$f'(x) = 2xe^{-\frac{x}{a}} + x^2\left(-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)$$
$$= -\frac{x}{a}(x-2a)e^{-\frac{x}{a}}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$a > 0$ であるから，増減表は，右のようになる．

よって　　$\boldsymbol{c = 2a}$

(2) (1) の結果から

$$\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^{2a} x^2 e^{-\frac{x}{a}}\,dx$$
$$= -a\Big[\ (x^2+2ax+2a^2)e^{-\frac{x}{a}}\ \Big]_0^{2a}$$
$$= \boldsymbol{2a^3\left(1-\frac{5}{e^2}\right)}$$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{kx} f(x)\,dx = \frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} + C$$

上式において $k = -\dfrac{1}{a}$，$f(x) = x^2$ とすると

$$\int x^2 e^{-\frac{x}{a}}\,dx = -ae^{-x}(x^2+2ax+2a^2) + C$$