平成 13 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医，薬，工学部) 平成 13 年 2 月 25 日

1 次の問いに答えよ。

(1) $x<0$ のとき，e^{-x} と x^2+1 の大小関係を調べよ。

(2) 2 つの曲線 $y=xe^{-x}$，$y=x(x^2+1)$ と直線 $x=-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

2 座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$，$n=1,2,\cdots$ に対して，点 P_1 から原点 O と点 P_n $(n \geqq 2)$ を通る直線へ下ろした垂線を $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n$ とし，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ のなす角を θ_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ の成分を求めよ。

(2) $\cos\theta_n$ を求めよ。

(3) $\tan\theta_n<1.01$ をみたす最小の n の値を求めよ。

3 a を整数とする。$x_n=n^3-an^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められている数列 $\{x_n\}$ が

$$x_1>x_2>\cdots>x_{14}>x_{15},\quad x_{15}<x_{16}<x_{17}<\cdots$$

をみたすとき，a を求めよ。

4 袋の中に 1 から 5 までのいずれかの数字を書いた同じ形の札が 15 枚入っていて，それらは 1 の札が 1 枚，2 の札が 2 枚，3 の札が 3 枚，4 の札が 4 枚，5 の札が 5 枚からなる。袋の中からこれらの札のうち 3 枚を同時にとり出すとき，札に書かれている数の和を S とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) S が 2 の倍数である確率を求めよ。

(2) S が 3 の倍数である確率を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(t)=e^t-\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}\right)$ とすると

$$\begin{aligned} f'(t)&=e^t-\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)\\ f''(t)&=e^t-(1+t)\\ f'''(t)&=e^t-1 \end{aligned}$$

$t>0$ のとき $f'''(t)>0$，$f''(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき $f''(t)>0$
これから
$t>0$ のとき　$f''(t)>0$，　$f'(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき　$f'(t)>0$
さらに
$t>0$ のとき　$f'(t)>0$，　$f(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき　$f(t)>0$

したがって，$t>0$ のとき

$$e^t>1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\quad\cdots①$$

このとき

$$\begin{aligned} 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}&=1+t^2+\frac{t}{6}(t^2-3t+6)\\ &=1+t^2+\frac{t}{6}\left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right\}\\ &>1+t^2\quad\cdots② \end{aligned}$$

①，② から，$t>0$ のとき

$$e^t>1+t^2$$

上式において $t=-x$ とすると

$$x<0\text{ のとき}\qquad \boldsymbol{e^{-x}>1+x^2}$$

解説

$e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}+\cdots$ であるから，$t>0$ において，

$$e^t>1+t+\frac{t^2}{2},\quad e^t>1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}$$

などを活用すればよい．

別解 $x^2+1-e^{-x}=e^{-x}\{(x^2+1)e^x-1\}$ $\cdots$ ①

$g(x)=(x^2+1)e^x-1$ とおくと

$$g'(x)=2xe^x+(x^2+1)e^x=(x+1)^2e^x$$

$g'(x)=0$ とすると　$x=-1$

$g(x)$ の増減表は，下のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$g'(x)$	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	$2e^{-1}-1$	$\nearrow$	0

したがって，$x<0$ のとき　$g(x)<0$

よって，① より　$x<0$ のとき　$\boldsymbol{x^2+1<e^{-x}}$

(2) $x<0$ のとき　$e^{-x}>x^2+1$　ゆえに　$xe^{-x}<x(x^2+1)$

$x=0$ のとき　$xe^{-x}=x(x^2+1)$

$x>0$ のとき　$e^{-x}<1<x^2+1$　ゆえに　$xe^{-x}<x(x^2+1)$

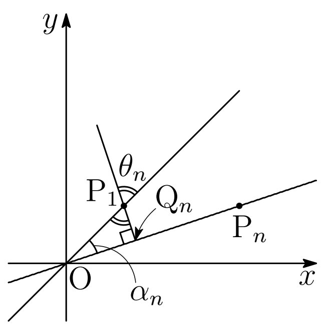
ゆえに，2 つの曲線 $y=xe^{-x}$，$y=x(x^2+1)$ の共有点の x 座標は　$x=0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{0}\{x(x^2+1)-xe^{-x}\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(n,\ 1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=n+1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2=n^2+1$$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$$
$$=(1,\ 1)-\frac{n+1}{n^2+1}(n,\ 1)$$
$$=\boldsymbol{\left(\frac{1-n}{n^2+1},\ \frac{n^2-n}{n^2+1}\right)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_n$ のなす角を α_n とすると

$$\cos\alpha_n = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}_n}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1||\overrightarrow{\mathrm{OP}}_n|} = \frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}$$

また　　$\sin^2\alpha_n = 1-\cos^2\alpha_n = 1-\dfrac{(n+1)^2}{2(n^2+1)} = \dfrac{(n-1)^2}{2(n^2+1)}$

$\sin\alpha_n > 0$ であるから　　$\sin\alpha_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}$

$\theta_n = 90^\circ - \alpha_n$ であるから

$$\cos\theta_n = \cos(90^\circ-\alpha_n) = \sin\alpha_n = \boldsymbol{\frac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}}$$

(3)　　$\tan^2\alpha_n = \dfrac{1}{\cos^2\alpha_n} - 1 = \dfrac{2(n^2+1)}{(n+1)^2} - 1 = \dfrac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$

$0 < \alpha_n < 90^\circ$ であるから $\tan\alpha_n > 0$ より　　$\tan\alpha_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

$\theta_n = 90^\circ - \alpha_n$ であるから

$$\tan\theta_n = \tan(90^\circ-\alpha_n) = \frac{1}{\tan\alpha_n} = \frac{n+1}{n-1}$$

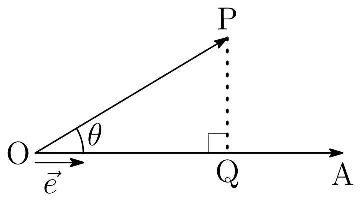
$\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最小の n は

$$\frac{n+1}{n-1} < 1.01 \quad \text{ゆえに} \quad n > 201$$

したがって，これをみたす最小の n は　**202**

解説

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を



$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} \quad \cdots ①$$

とすると，P から OA に下ろした垂線の足 Q について

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta)\vec{e} \quad \cdots ②$$

また，$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$

これと ① を ② に代入すると　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(t)=t^3-at^2$ とおくと，$x_n=f(n)$　$f'(t)=3t^2-2at$

［1］$a \leqq 0$ のとき，$t>0$ において，$f'(t)>0$ であるから

$$f(1)<f(2)<\cdots \quad \text{すなわち} \quad x_1<x_2<\cdots$$

これは条件に反する.

［2］$a>0$ のとき，$f(t)$ の増減は次のようなる.

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

条件を満たすとき

$$14<\frac{2}{3}a<16, \quad f(14)>f(15), \quad f(15)<f(16)$$

第 1 式から　　$21<a<24$　$\cdots$①

第 2 式から

$$\begin{aligned} 14^3-a{\cdot}14^2 &> 15^3-a{\cdot}15^2 \\ (15^2-14^2)a &> 15^3-14^3 \\ (15+14)a &> 15^2+15{\cdot}14+14^2 \\ a &> 21\frac{22}{29} \quad \cdots② \end{aligned}$$

第 3 式から

$$\begin{aligned} 15^3-a{\cdot}15^2 &< 16^3-a{\cdot}16^2 \\ (16^2-15^2)a &< 16^3-15^3 \\ (16+15)a &< 16^2+16{\cdot}15+15^2 \\ a &< 23\frac{8}{31} \quad \cdots③ \end{aligned}$$

①，②，③ の共通範囲にある整数を求めて　$\boldsymbol{a=22,\ 23}$

別解 $x_n = n^3 - an^2$ より

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \{(n+1)^3 - a(n+1)^2\} - (n^3 - an^2) \\ &= 3n^2 - (2a-3)n - (a-1) \end{aligned}$$

$f(n) = 3n^2 - (2a-3)n - (a-1)$ とすると，条件により

$$\begin{aligned} &n = 1, 2, 3, \cdots, 14 \text{ のとき} \quad f(n) < 0 \\ &n = 15, 16, \cdots \text{ のとき} \quad f(n) > 0 \end{aligned}$$

$y = f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線であるから，次式を満たせばよい．

$$f(1) < 0,\ f(14) < 0,\ f(15) > 0$$

ゆえに　$7 - 3a < 0,\ 631 - 29a < 0,\ 721 - 31a > 0$

すなわち　$\dfrac{7}{3} < a,\ 21\dfrac{22}{29} < a,\ a < 23\dfrac{8}{31}$

したがって　$21\dfrac{22}{29} < a < 23\dfrac{8}{31}$

よって，求める整数 a の値は　**22，23**

$\boxed{4}$ (1) S が偶数になるのは，3 枚が偶数または 1 枚が偶数で 2 枚が奇数の場合である．したがって，S が 2 の倍数になる確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_1 \cdot {}_9\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \frac{20 + 6 \times 36}{455} = \boldsymbol{\frac{236}{455}}$$

(2) 3 で割った余りが 0 となる数の札が 3 枚，1 となる数の札が 5 枚，2 となる数の札が 7 枚あり，S が 3 の倍数となる余りの組み合わせは $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 2,\ 2)$，$(0,\ 1,\ 2)$ である．したがって，S が 3 の倍数になる確率は

$$\frac{1 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_7\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_7\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \frac{1 + 10 + 35 + 105}{455} = \boldsymbol{\frac{151}{455}}$$