平成 12 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医，薬，工学部) 平成 12 年 2 月 25 日

1 座標平面上の原点を O とし，点 A を A$(a,\ 0)$　$(a>0)$ とする。n を自然数とし，点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を，直線 $y=nx$ 上にあり，$\angle\mathrm{OP}_n\mathrm{A}=60^\circ$ かつ $x_n>0$ となる点とするとき，y_n を求めよ。さらに $\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ。

2 $a>0$，$b>0$ とする。$ax^2+by^2=1$ をみたす負でない実数 x，y について，$\min\left\{\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b}\right\}$ の最大値と，そのときの x および y を求めよ。ただし，実数 X，Y に対して

$$\begin{cases} X \leqq Y \text{ のとき} & \min\{X,\ Y\}=X \\ X > Y \text{ のとき} & \min\{X,\ Y\}=Y \end{cases}$$

である。

3 $a>0$，$b>0$ とし，負の傾き k をもつ直線 $y=k(x-a^3)+b^3$ が x 軸と y 軸で切り取られる部分の長さの 2 乗を L とするとき，次の問いに答えよ。

(1) L を k，a，b を用いて表せ。

(2) a，b を固定したとき，L の最小値 m とそのときの k の値を求めよ。

(3) $m \leqq 1$ となるような座標平面上の点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

4 正の実数 a，b　$(a>b)$ に対して，式

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

で表される楕円について，次の問いに答えよ。

(1) この楕円の長さ ℓ は

$$\ell = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt \quad \left(k=1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

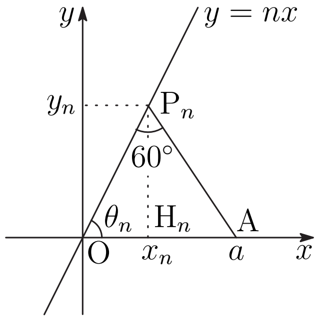
であることを示せ (積分の値は求めなくてよい)。

(2) $\sqrt{1-k\cos^2 t}$ の，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値および最小値を求め，ℓ と半径 a および半径 b の円周の長さの大小関係を調べよ。

(3) $u \leqq 1$ のとき $\sqrt{1-u} \leqq 1-\dfrac{1}{2}u$ が成り立つことを用いて，$a=\dfrac{100}{\pi}$，$b=\dfrac{99}{\pi}$ のとき，ℓ が 199.005 以下となることを示せ。

解答例

$\boxed{1}$ $\theta_n = \angle \mathrm{AOP}_n$ とすると $(45^\circ \leqq \theta_n < 90^\circ)$,
$\angle \mathrm{OAP}_n = 120^\circ - \theta_n$ は鋭角.
P_n から x 軸に垂線 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$ を引くと



$$\tan(120^\circ - \theta_n) = \frac{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}{\mathrm{AH}_n}$$

このとき $\quad \tan(120^\circ - \theta_n) = \dfrac{\tan 120^\circ - \tan\theta_n}{1 + \tan 120^\circ \tan\theta_n}$

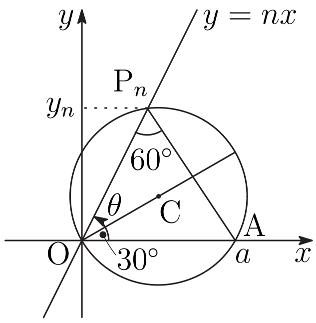
$$= \frac{-\sqrt{3} - n}{1 - \sqrt{3}n} = \frac{n + \sqrt{3}}{\sqrt{3}n - 1}$$

また $\quad \dfrac{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}{\mathrm{AH}_n} = \dfrac{y_n}{a - x_n} = \dfrac{ny_n}{na - nx_n} = \dfrac{ny_n}{na - y_n}$

したがって $\quad \dfrac{ny_n}{na - y_n} = \dfrac{n + \sqrt{3}}{\sqrt{3}n - 1}$ 　ゆえに $\quad \boldsymbol{y_n = \dfrac{n(n + \sqrt{3})a}{\sqrt{3}(n^2 + 1)}}$

よって $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{n}\right)a}{\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{3}}}$

別解 $\triangle \mathrm{OAP}_n$ の外心を C とすると，$\angle \mathrm{COA} = 30^\circ$.
$\triangle \mathrm{OAP}_n$ の外接円の半径 OC は，正弦定理により



$$2\mathrm{OC} = \frac{\mathrm{OA}}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$\triangle \mathrm{OAP}_n$ の外接円を極方程式で表すと

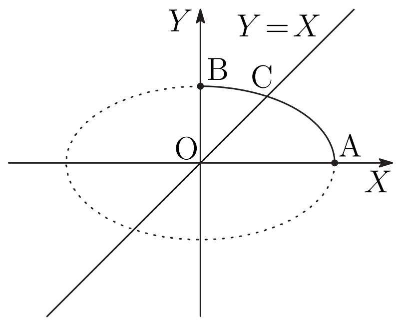
$$r = 2\mathrm{OC}\cos(\theta - 30^\circ) = \frac{2a}{\sqrt{3}}\cos(\theta - 30^\circ)$$
$$= \frac{a}{\sqrt{3}}\left(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\right)$$

この円周上の点 P_n は偏角 θ が $\tan\theta = n$ (n は自然数，$45^\circ \leqq \theta < 90^\circ$) を満たす点であるから

$$\sin\theta = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

よって $\quad y_n = r\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\left(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\right)\sin\theta = \dfrac{n(n + \sqrt{3})a}{\sqrt{3}(n^2 + 1)}$

$\boxed{2}$ $ax^2+by^2=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ について，



$$X=\frac{x}{a},\quad Y=\frac{y}{b}$$

とおくと $(a>0,\ b>0)$

$$a^3X^2+b^3Y^2=1$$

この楕円上の点 $\mathrm{P}(X, Y)$ は，右の図の 2 点 A，B を結ぶ実線部分である．

この楕円と直線 $Y=X$ の交点を C とすると $\quad \mathrm{C}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b^3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}\right)$

したがって

$$0 \leqq X \leqq \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3}} \text{ のとき} \qquad \min\{X,\ Y\}=X \leqq \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b^3}} \leqq X \leqq \frac{1}{\sqrt{a^3}} \text{ のとき} \quad \min\{X,\ Y\}=Y \leqq \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}$$

すなわち，P が C に一致するとき，$\min\{X,\ Y\}$ は**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}}$ をとる．

このとき $\quad \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b^3}} \quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{x=\dfrac{a}{\sqrt{a^3+b^3}},\ y=\dfrac{b}{\sqrt{a^3+b^3}}}$

$\boxed{3}$ (1) $y=k(x-a^3)+b^3$ より $\quad -kx+y=-ka^3+b^3$

ここで，$c=-ka^3+b^3$ とおくと $\quad -kx+y=c$

この直線の x 切片および y 切片は，それぞれ $-\dfrac{c}{k}$，c であるから

$$L=\left(-\frac{c}{k}\right)^2+c^2=c^2\left(\frac{1}{k^2}+1\right)^2=\boldsymbol{(-ka^3+b^3)^2\left(\frac{1}{k^2}+1\right)}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dk}&=2(-ka^3+b^3)(-a^3)\cdot\left(\frac{1}{k^2}+1\right)+(-ka^3+b^3)^2\cdot\left(-\frac{2}{k^3}\right)\\&=-2(-ka^3+b^3)\left(a^3+\frac{b^3}{k^3}\right)\end{aligned}$$

k	$\cdots$	$-\frac{b}{a}$	$\cdots$	(0)
$\frac{dL}{dk}$	$-$	0	$+$	
L	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$\boldsymbol{k=-\dfrac{b}{a}}$ のとき，L の最小値 m は $\boldsymbol{(a^2+b^2)^3}$

別解 $k<0$ より，$k=-\tan\theta\ (0<\theta<90^\circ)$ とおくと，(1) の結果から

$$L=(a^3\tan\theta+b^3)^2\left(\frac{1}{\tan^2\theta}+1\right)=\left(\frac{a^3}{\cos\theta}+\frac{b^3}{\sin\theta}\right)^2$$

$f(\theta)=\dfrac{a^3}{\cos\theta}+\dfrac{b^3}{\sin\theta}\ (0<\theta<90^\circ)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=\frac{a^3\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{b^3\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{a^3\sin^3\theta-b^3\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(a^3\tan^3\theta-b^3)\end{aligned}$$

$\tan\theta_0=\dfrac{b}{a}\ (0^\circ<\theta_0<90^\circ)$ とすると

θ	(0°)	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	(90°)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

上の増減表から，L も $\theta=\theta_0$ で最小となり，L の最小値 m は

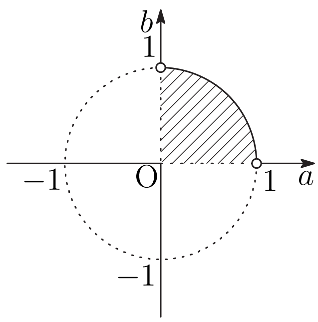
$$\begin{aligned}m&=(a^3\tan\theta_0+b^3)^2\left(\frac{1}{\tan^2\theta_0}+1\right)\\&=\left(a^3\cdot\frac{b}{a}+b^3\right)^2\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)=\boldsymbol{(a^2+b^2)^3}\end{aligned}$$

このとき　　$k=-\tan\theta_0=\boldsymbol{-\dfrac{b}{a}}$

(3) (2) の結果から，$m\leqq 1$ のとき

$$(a^2+b^2)^3\leqq 1 \quad ゆえに \quad a^2+b^2\leqq 1$$

$a>0$，$b>0$ であるから，座標平面上の点 $(a,\ b)$ の表す領域は，右の図の斜線部分．ただし，円周上の実線部分の境界線は含むが，a 軸および b 軸上の境界線は含まない．



$\boxed{4}$ (1) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ より $\quad \dfrac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \dfrac{dy}{dt}=b\cos t$

ゆえに
$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2\\&=a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t\\&=a^2\left\{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2 t\right\}\\&=a^2(1-k\cos^2 t)\end{aligned}$$

$a^2(1-k\cos^2 t)$ は，偶関数であるから

$$\begin{aligned}\ell&=a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt=2a\int_0^{\pi}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt\\&=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt+2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt\quad\cdots①\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt$ について $t=\pi-u$ とおくと

$$\frac{dt}{du}=-1\qquad \begin{array}{c|c}t & \frac{\pi}{2}\longrightarrow\pi\\\hline u & \frac{\pi}{2}\longrightarrow 0\end{array}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-k\cos^2(\pi-u)}\,(-du)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k\cos^2 u}\,du\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② より $\qquad \ell=4a\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt$

別解 $x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (-\pi\leqq t\leqq\pi)$ の表す曲線は，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$．これは x 軸および y 軸に関して対称である．$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ の部分の曲線の長さは

$$\frac{\ell}{4}=a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt\quad よって\quad \ell=4a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt$$

(2) $a>b>0,\ k=1-\dfrac{b^2}{a^2}$ より，$0<k<1$.

$f(t)=\sqrt{1-k\cos^2 t}\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと　$f(0) \leqq f(t) \leqq f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

したがって　　最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathbf{1}$，最小値 $f(0)=\boldsymbol{\sqrt{1-k}}$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\sqrt{1-k}<f(t)<1$ であるから，(1) の結果により

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k}\,dt<4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt<4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt$$

よって　$\boldsymbol{2\pi b<\ell<2\pi a}$

(3) $f(t)=\sqrt{1-k\cos^2 t} \leqq 1-\dfrac{1}{2}k\cos^2 t$ であるから

$$\begin{aligned}\ell&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt \leqq 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}k\cos^2 t\right)dt\\&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\frac{k}{4}(1+\cos 2t)\right\}dt=4a\left[\left(1-\frac{k}{4}\right)t-\frac{k}{8}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=2\pi a\left(1-\frac{k}{4}\right)=2\pi a\left\{1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}\\&=\pi a\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

ここで，$a=\dfrac{100}{\pi}$，$b=\dfrac{99}{100}$ より，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{99}{100}=1-\dfrac{1}{100}$ であるから

$$\begin{aligned}\ell&\leqq \pi\cdot\frac{100}{\pi}\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{100}\right)^2\right\}\\&=100\left(2-\frac{1}{100}+\frac{1}{20000}\right)\\&=199+\frac{1}{200}=199.005\end{aligned}$$

よって　$\ell \leqq 199.005$