

平成 11 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理, 医, 薬, 工学部) 平成 11 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 複素数 z ($z \neq i$) に対して,

$$w = \frac{z+i}{z-i}$$

とおく。ただし, i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

- (1) w が実数になるための z の条件を求めよ。
- (2) 複素数平面上で z が $-i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, w の軌跡を求めよ。

2 2 個のサイコロを投げて a, b を次のように決める。異なる目が出たときは, 出た目の数の大きい方を a , 小さい方を b とする。同じ目が出たときは, a, b ともに出た目の数とする。2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の解について, 次の問いに答えよ。

- (1) 1 つの解が $\frac{1}{2}$ より大きく, 他の解は $\frac{1}{2}$ より小さくなる確率を求めよ。
- (2) 2 つの解が異なり, ともに $\frac{1}{2}$ より大きくなる確率を求めよ。

3 点 A を中心とする円 $x^2 + (y - a)^2 = b^2$ が, 放物線 $y = x^2$ と異なる 2 点 P, Q で接している。ただし, $a > \frac{1}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) a と b の関係式を求めよ。
- (2) $\triangle APQ$ が正三角形のとき, 円と放物線で囲まれた三日月形の面積を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ について, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $S_0 = 0$ とおく。

$$a_n = S_{n-1} + n2^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つとき, 次の問いに答えよ。

- (1) S_n を n の式で表せ。
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{a_k}$ を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad w = \frac{z+i}{z-i} \text{ より } \quad \bar{w} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$$

w が実数のとき, $w = \bar{w}$ が成り立つから

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} \quad \text{ゆえに} \quad z + \bar{z} = 0$$

よって, z は純虚数 ($z \neq i$)

$$(2) \quad z \text{ は } -i \text{ を中心とする半径 } 1 \text{ の円周上の点であるから } |z+i| = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$w = \frac{z+i}{z-i} \text{ より } \quad (w-1)z = i(w+1)$$

$$\text{このとき, } w \neq 1 \text{ であるから } z = \frac{i(w+1)}{w-1} \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入すると

$$\left| \frac{i(w+1)}{w-1} + i \right| = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2|w|}{|w-1|} = 1$$

$2|w| = |w-1|$ の両辺を平方すると

$$\begin{aligned} 4w\bar{w} &= (w-1)(\bar{w}-1) \\ w\bar{w} + \frac{1}{3}(w+\bar{w}) &= \frac{1}{3} \\ \left(w + \frac{1}{3}\right) \left(\bar{w} + \frac{1}{3}\right) &= \frac{4}{9} \\ \left|w + \frac{1}{3}\right| &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

よって, w の軌跡は, $-\frac{1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ の円.

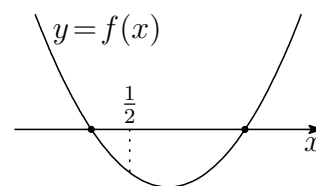
解説 $2|w| = |w-1|$ より, $|w| : |w-1| = 1 : 2$.

したがって, w は2点 $0, 1$ を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点 $\frac{1}{3}$ と $1:2$ に外分する点 -1 を直径の両端とする円周上にある (アポロニウスの円). ■

- 2 (1) $f(x) = x^2 - ax + b$ とおくと,
 $f(\frac{1}{2}) < 0$ であるから

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a + b < 0$$

ゆえに $b < \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} \dots \textcircled{1}$



a	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{4}$

①を満たす (a, b) の組は

$$(a, b) = (3, 1), (4, 1), (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2)$$

これらの (a, b) に対して, それぞれ2個のサイコロの目の出方は2通りずつある. したがって, 求める確率は

$$\frac{6 \times 2}{6^2} = \frac{1}{3}$$

- (2) $f(x) = (x - \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}$ であるから

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \quad \frac{a}{2} > \frac{1}{2}, \quad b - \frac{a^2}{4} < 0$$

したがって
$$\begin{cases} b > \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} \\ a > 1 \\ b < \frac{1}{4}a^2 \end{cases}$$

$a > 1$ のとき, $\frac{1}{4}a^2 - \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(a-1)^2 > 0$ であることに注意して

$$a > 1, \quad \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} < b < \frac{1}{4}a^2 \dots \textcircled{2}$$

a	2	3	4	5	6
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{4}$
$\frac{1}{4}a^2$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

②を満たす (a, b) の組は

$$(a, b) = (3, 2), (4, 2), (4, 3), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$$

したがって、2つのさいころの目の組合せは、

$$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \\ \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 6\}$$

このとき $\{5, 5\}, \{6, 6\}$ については 2 (通り)
 $\{5, 5\}, \{6, 6\}$ 以外については $8 \times 2 = 16$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{2+16}{6^2} = \frac{1}{2}$ ■

3 (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

円 $x^2 + (y - a)^2 = b^2$ および放物線 $y = x^2$ の
 y 軸に関する対称性に注意して、これらの2
 つの接点 P, Q の座標を $P(t, t^2), Q(-t, t^2)$
 とおく ($t > 0$). 放物線の点 P における法線
 の方程式は

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$$

これが円の中心 $A(0, a)$ を通るから

$$a - t^2 = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a = t^2 + \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき、2点 $A\left(0, t^2 + \frac{1}{2}\right), P(t, t^2)$ の距離が円の半径 b であるから

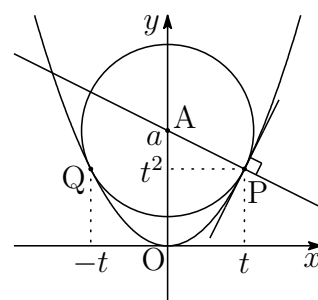
$$b^2 = AP^2 = t^2 + \left\{t^2 - \left(t^2 + \frac{1}{2}\right)\right\}^2 = t^2 + \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

また、点 $Q(-t, t^2)$ についても、①、②は成り立つ。

$t > 0$ であるから、①より $a > \frac{1}{2}$

①、②から、 t を消去すると

$$b^2 = a - \frac{1}{4} \quad \left(a > \frac{1}{2}\right)$$



別解 $x^2 + (y - a)^2 = b^2$ と $y = x^2$ から x を消去すると

$$y + (y - a)^2 = b^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 - (2a - 1)y + a^2 - b^2 = 0$$

これが正の重解をもつので、係数について

$$2a - 1 > 0, \quad (2a - 1)^2 - 4 \cdot 1(a^2 - b^2) = 0$$

$$\text{よって} \quad a = b^2 + \frac{1}{4} \quad \left(a > \frac{1}{2} \right)$$

(2) $\triangle APQ$ が正三角形のとき、 $PQ^2 = AP^2$ であるから、②より

$$(2t)^2 = t^2 + \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad t^2 = \frac{1}{12}, \quad AP^2 = \frac{1}{3}$$

扇形 APQ の面積を S_1 とすると、 $\angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2} AP^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{18}$$

放物線 $y = x^2$ と x 軸および 2 直線 $x = t$, $x = -t$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \int_{-t}^t x^2 dx = 2 \int_0^t x^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^t = \frac{2}{3} t^3$$

2 点 P , Q から x 軸にそれぞれ PP' , QQ' を引く. 五角形 $APP'Q'Q$ の面積を S_3 とすると

$$S_3 = 2 \times \text{台形 } OAPP' = 2 \times \frac{1}{2} \left\{ \left(t^2 + \frac{1}{2} \right) + t^2 \right\} t = 2t^3 + \frac{1}{2}t$$

求める面積を S とすると、 $t^2 = \frac{1}{12}$ より、 $t = \frac{\sqrt{3}}{6}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= S_3 - S_1 - S_2 = \left(2t^3 + \frac{1}{2}t \right) - \frac{\pi}{18} - \frac{2}{3}t^3 \\ &= \left(\frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{2} \right) t - \frac{\pi}{18} \\ &= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18} \\ &= \frac{11}{18} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18} = \frac{11\sqrt{3} - 6\pi}{108} \end{aligned}$$



4 (1) $a_n = S_{n-1} + n2^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $S_0 = 0$ より

$$S_n - S_{n-1} = S_{n-1} + n2^n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{S_n}{2^n} - \frac{S_{n-1}}{2^{n-1}} = n$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{2^k} - \frac{S_{k-1}}{2^{k-1}} \right) &= \sum_{k=1}^n k \\ \frac{S_n}{2^n} - S_0 &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad S_n = n(n+1)2^{n-1}$$

(2) (1)の結果から, $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= n(n+1)2^{n-1} - (n-1)n2^{n-2} \\ &= n\{2(n+1) - (n-1)\}2^{n-2} \\ &= n(n+3)2^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k(k+3)2^{k-2}} = \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+3)} \\ &= \frac{4}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{a_k} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{22}{9} \quad \blacksquare$$