平成11年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，医，薬，工学部) 平成11年2月25日

1 複素数 z $(z \neq i)$ に対して，

$$w = \frac{z+i}{z-i}$$

とおく。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) w が実数になるための z の条件を求めよ。

(2) 複素数平面上で z が $-i$ を中心とする半径1の円周上を動くとき，w の軌跡を求めよ。

2 2個のサイコロを投げて a，b を次のように決める。異なる目が出たときは，出た目の数の大きい方を a，小さい方を b とする。同じ目が出たときは，a，b ともに出た目の数とする。2次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の解について，次の問いに答えよ。

(1) 1つの解が $\dfrac{1}{2}$ より大きく，他の解は $\dfrac{1}{2}$ より小さくなる確率を求めよ。

(2) 2つの解が異なり，ともに $\dfrac{1}{2}$ より大きくなる確率を求めよ。

3 点Aを中心とする円 $x^2 + (y-a)^2 = b^2$ が，放物線 $y = x^2$ と異なる2点P，Qで接している。ただし，$a > \dfrac{1}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) a と b の関係式を求めよ。

(2) △APQが正三角形のとき，円と放物線で囲まれた三日月形の面積を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ について，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，$S_0 = 0$ とおく。

$$a_n = S_{n-1} + n2^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) S_n を n の式で表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{a_k}$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ より　$\overline{w}=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

w が実数のとき，$w=\overline{w}$ が成り立つから

$$\frac{z+i}{z-i}=\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\quad \text{ゆえに}\quad z+\overline{z}=0$$

よって，z は**純虚数** $(\boldsymbol{z \neq i})$

(2) z は $-i$ を中心とする半径 1 の円周上の点であるから　$|z+i|=1$　$\cdots$①

$w=\dfrac{z+i}{z-i}$ より　$(w-1)z=i(w+1)$

このとき，$w\neq 1$ であるから　$z=\dfrac{i(w+1)}{w-1}$　$\cdots$②

② を ① に代入すると

$$\left|\frac{i(w+1)}{w-1}+i\right|=1\quad \text{ゆえに}\quad \frac{2|w|}{|w-1|}=1$$

$2|w|=|w-1|$ の両辺を平方すると

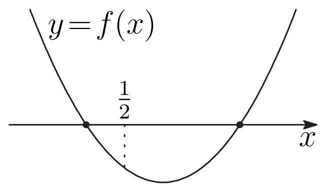
$$\begin{aligned}
4w\overline{w}&=(w-1)(\overline{w}-1)\\
w\overline{w}+\frac{1}{3}(w+\overline{w})&=\frac{1}{3}\\
\left(w+\frac{1}{3}\right)\left(\overline{w}+\frac{1}{3}\right)&=\frac{4}{9}\\
\left|w+\frac{1}{3}\right|&=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

よって，w の軌跡は，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$ **を中心とする半径** $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ **の円**.

解説 $2|w|=|w-1|$ より，$|w|:|w-1|=1:2$.

したがって，w は 2 点 $0, 1$ を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点 $\dfrac{1}{3}$ と $1:2$ に外分する点 -1 を直径の両端とする円周上にある (アポロニウスの円).

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=x^2-ax+b$ とおくと，
$f(\frac{1}{2})<0$ であるから



$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}a+b<0$$

ゆえに　　$b<\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{4}$　$\cdots$①

a	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{4}$

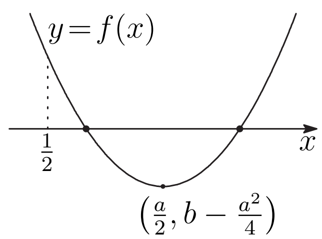
① を満たす $(a,\ b)$ の組は

$$(a,\ b)=(3,\ 1),\ (4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2)$$

これらの $(a,\ b)$ に対して，それぞれ 2 個のサイコロの目の出方は 2 通りずつある．したがって，求める確率は

$$\frac{6\times2}{6^2}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) $f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$ であるから



$$f\left(\frac{1}{2}\right)>0,\quad \frac{a}{2}>\frac{1}{2},\quad b-\frac{a^2}{4}<0$$

したがって　　$\begin{cases} b>\frac{1}{2}a-\frac{1}{4} \\ a>1 \\ b<\frac{1}{4}a^2 \end{cases}$

$a>1$ のとき，$\dfrac{1}{4}a^2-\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}(a-1)^2>0$ であることに注意して

$$a>1,\quad \frac{1}{2}a-\frac{1}{4}<b<\frac{1}{4}a^2\quad\cdots②$$

a	2	3	4	5	6
$\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{4}$
$\frac{1}{4}a^2$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

② を満たす $(a,\ b)$ の組は

$$(a,\ b)=(3,\ 2),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),$$
$$(6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$$

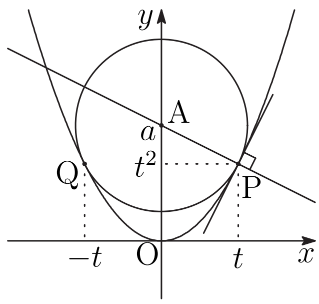
したがって，2 つのさいころの目の組合せは,

$$\{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 4\},\ \{3,\ 5\},\ \{3,\ 6\},$$
$$\{4,\ 5\},\ \{4,\ 6\},\ \{5,\ 5\},\ \{5,\ 6\},\ \{6,\ 6\}$$

このとき　$\{5,\ 5\},\ \{6,\ 6\}$ については　　2 (通り)
　　　　　$\{5,\ 5\},\ \{6,\ 6\}$ 以外については　$8\times 2=16$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{2+16}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$



円 $x^2+(y-a)^2=b^2$ および放物線 $y=x^2$ の y 軸に関する対称性に注意して，これらの 2 つの接点 P，Q の座標を $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(-t,\ t^2)$ とおく $(t>0)$．放物線の点 P における法線の方程式は

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$$

これが円の中心 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るから

$$a-t^2=\frac{1}{2}\quad ゆえに\quad a=t^2+\frac{1}{2}\quad\cdots①$$

このとき，2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ t^2+\dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ の距離が円の半径 b であるから

$$b^2=\mathrm{AP}^2=t^2+\left\{t^2-\left(t^2+\frac{1}{2}\right)\right\}^2=t^2+\frac{1}{4}\quad\cdots②$$

また，点 $\mathrm{Q}(-t,\ t^2)$ についても，①，② は成り立つ.

$t>0$ であるから，① より　$a>\dfrac{1}{2}$

①，② から，t を消去すると

$$\boldsymbol{b^2=a-\frac{1}{4}\ \left(a>\frac{1}{2}\right)}$$

別解 $x^2+(y-a)^2=b^2$ と $y=x^2$ から x を消去すると

$$y+(y-a)^2=b^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2-(2a-1)y+a^2-b^2=0$$

これが正の重解をもつので，係数について

$$2a-1>0, \quad (2a-1)^2-4\cdot1(a^2-b^2)=0$$

よって $$a=b^2+\frac{1}{4} \quad \left(a>\frac{1}{2}\right)$$

(2) $\triangle$APQ が正三角形のとき，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2$ であるから，② より

$$(2t)^2=t^2+\frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad t^2=\frac{1}{12}, \quad \mathrm{AP}^2=\frac{1}{3}$$

扇形 APQ の面積を S_1 とすると，$\angle\mathrm{PAQ}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{AP}^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{18}$$

放物線 $y=x^2$ と x 軸および 2 直線 $x=t$，$x=-t$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2=\int_{-t}^{t}x^2\,dx=2\int_0^t x^2\,dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t=\frac{2}{3}t^3$$

2 点 P，Q から x 軸にそれぞれ PP$'$，QQ$'$ を引く．五角形 APP$'$Q$'$Q の面積を S_3 とすると

$$S_3=2\times\text{台形 OAPP}'=2\times\frac{1}{2}\left\{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+t^2\right\}t=2t^3+\frac{1}{2}t$$

求める面積を S とすると，$t^2=\dfrac{1}{12}$ より，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ であるから

$$\begin{aligned}S=S_3-S_1-S_2&=\left(2t^3+\frac{1}{2}t\right)-\frac{\pi}{18}-\frac{2}{3}t^3\\&=\left(\frac{4}{3}t^2+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{18}\\&=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{18}\\&=\frac{11}{18}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{18}=\boldsymbol{\frac{11\sqrt{3}-6\pi}{108}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_n = S_{n-1} + n2^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),\quad S_0 = 0$ より

$$S_n - S_{n-1} = S_{n-1} + n2^n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{S_n}{2^n} - \frac{S_{n-1}}{2^{n-1}} = n$$

したがって
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{S_k}{2^k} - \frac{S_{k-1}}{2^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} k$$
$$\frac{S_n}{2^n} - S_0 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

よって $\boldsymbol{S_n = n(n+1)2^{n-1}}$

(2) (1) の結果から，$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n(n+1)2^{n-1} - (n-1)n2^{n-2} \\ &= n\{2(n+1) - (n-1)\}2^{n-2} \\ &= n(n+3)2^{n-2} \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{a_k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k(k+3)2^{k-2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+3)} \\ &= \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) \\ &= \frac{4}{3}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\right)\right\} \end{aligned}$$

よって
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{a_k} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{22}{9}}$$