

平成10年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分

理系(理, 医, 薬, 工学部)平成10年2月25日

1~3から1題選択, 4~6から1題選択, 7~9必答.

1 次の問いに答えよ。

(1) $t = x + \frac{1}{x}$ とおくとき, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ を t の式で表せ。

(2) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ を実数を係数とする x の2次の整式の積で表せ。

2 3点 A, B, C がこの順に1直線上に並んでいて $AB = 1$ とする。B を通り直線 AC に直交する直線 l が与えられているとき,

$$BD^2 = BC$$

をみたす l 上の点 D を作図する方法をその理由とともに述べよ。3 $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 3$) により定まる数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ。

(1) $n = 3, 4, \dots, 9$ に対して a_n の値を求めよ。

(2) n が3の倍数ならば a_n は偶数であり, n が3の倍数でなければ a_n は奇数であることを示せ。

4 $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) t, s が $2t + s = 1$, $-1 \leq s \leq 3$ をみたすとき, $|\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}|$ の最大値, 最小値とそれらを与える t, s の値を求めよ。

(2) (1) で求めた最小値を与える t, s の値を t_0, s_0 とする。 $\vec{a} + t_0\vec{b} + s_0\vec{c}$ が $\vec{b} + k\vec{c}$ に垂直であるときの k の値を求めよ。

5 x の方程式 $x^3 + (m-1)x^2 - (m-n)x - n = 0$ (m, n は正の整数) の解のうち2つの解 α, β について,

$$\alpha\beta = 5, \quad \frac{\alpha - \beta}{2i} \text{ は正の整数}$$

が成立するとき, m, n, α, β の組をすべて求めよ。ただし, i は虚数単位である。

6 異なる3つの箱がある。これらの3つの箱のうち1つを無作為に選び、その中にボールを1個入れる試行を繰り返す。第1回目の試行を始める前の3つの箱は空であるとする。第 n 回目の試行後にボールが2個以上入っている箱の数を X_n 、ボールが1個だけ入っている箱の個数を Y_n とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $X_3 = 0$ かつ $Y_3 = 3$ である事象を A_1 、 $X_3 = 1$ かつ $Y_3 = 1$ である事象を A_2 、 $X_3 = 1$ かつ $Y_3 = 0$ である事象を A_3 とするとき、 A_1 、 A_2 、 A_3 の確率 $P(A_1)$ 、 $P(A_2)$ 、 $P(A_3)$ を求めよ。
- (2) $P_{A_i}(X_4 = 1)$ 、 $P_{A_i}(X_4 = 2)$ を $i = 1, 2, 3$ について求めよ。ただし、 $P_A(B)$ は事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件つき確率である。
- (3) X_4 の期待値 $E(X_4)$ を求めよ。

7 x 、 y は実数で

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0$$

をみたすとき、 $x + y$ の最大値、 xy の最小値とそれらを与える x 、 y の値を求めよ。

8 次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 q を $q = 2^r p$ (r は0以上の整数、 p は奇数) と表す。
 $\log_2 q$ が有理数ならば $p = 1$ であることを示せ。
- (2) 自然数 a 、 b に対して、

$$\log_4 a = k + \alpha, \quad \log_4 b = l + \beta$$

とおく。ただし、 k 、 l は整数で、 α 、 β は $0 \leq \alpha < 1$ 、 $0 \leq \beta < 1$ である。
このとき、 $\alpha + \beta$ は 0 、 $\frac{1}{2}$ 、 1 または無理数であることを示せ。

9 $x = 2 \cos t$ 、 $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) で表される曲線 C に関して次の問いに答えよ。

- (1) $t = \frac{\pi}{4}$ における法線の式を求めよ。
- (2) (1) で求めた法線と曲線 C および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} - 2 = t^2 + t - 2$$

(2) (1)の結果から

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2 + t - 1$$

$$t^2 + t - 1 = 0 \text{ を解くと } t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ゆえに } t^2 + t - 1 = \left(t - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(t - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

よって

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= x^2 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2 (t^2 + t - 1) \\ &= x^2 \left(t - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(t - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \\ &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1\right) \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right) \end{aligned}$$

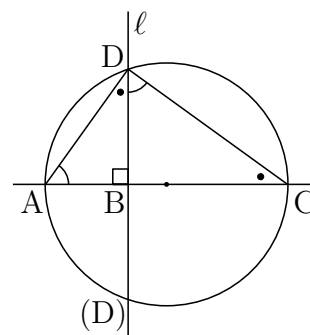
$\boxed{2}$ $AB = 1$, $BD^2 = BC$ より

$$BD^2 = AB \cdot BC \quad \text{ゆえに} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BD}$$

$AC \perp \ell$ であるから $\angle ABD = \angle DBC = 90^\circ$

したがって $\triangle ABD \sim \triangle DBC \sim \triangle ADC$

$\angle ADC = 90^\circ$ であるから、D は AC を直径とする円周上にある。



3 (1) $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = \mathbf{2}$
 $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = \mathbf{3}$
 $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = \mathbf{5}$
 $a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = \mathbf{8}$
 $a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = \mathbf{13}$
 $a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = \mathbf{21}$
 $a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = \mathbf{34}$

(2) 条件から, a_1, a_2 は奇数. (1)の結果から, a_3 は偶数.
 $n \geq 4$ とすると, 与えられた漸化式より

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_{n-2} + a_{n-3}) + a_{n-2} = 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

a_n は整数であるから $a_n \equiv a_{n-3} \pmod{2}$

よって, n が 3 の倍数ならば a_n は偶数であり, n が 3 の倍数でなければ a_n は奇数である.

4 (1) $2t + s = 1$ より $s = 1 - 2t$
 $-1 \leq s \leq 3$ であるから $-1 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c} &= \vec{a} + t\vec{b} + (1 - 2t)\vec{c} \\ &= (2, 1, 0) + t(1, 0, 1) + (1 - 2t)(0, 0, 1) \\ &= (2 + t, 1, 1 - t) \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{したがって } |\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}|^2 &= (2 + t)^2 + 1^2 + (1 - t)^2 \\ &= 2t^2 + 2t + 6 \\ &= 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}\end{aligned}$$

ゆえに $|\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}|^2$ は $t = 1$ のとき最大値 10,
 $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{11}{2}$ をとる.

よって $|\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}|$ は $t = 1, s = -1$ のとき, 最大値 $\sqrt{10}$
 $t = -\frac{1}{2}, s = 2$ のとき, 最小値 $\frac{\sqrt{22}}{2}$

(2) $t_0 = -\frac{1}{2}, s_0 = 2$ であるから, ① より $\vec{a} + t_0\vec{b} + s_0\vec{c} = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

また $\vec{b} + k\vec{c} = (1, 0, 1) + k(0, 0, 1) = (1, 0, 1 + k)$

これらが $\vec{b} + k\vec{c}$ に垂直であるとき, $(\vec{a} + t_0\vec{b} + s_0\vec{c}) \cdot (\vec{b} + k\vec{c}) = 0$ より

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(1 + k) = 0 \quad \text{これを解いて } k = -2$$

解説 $\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c} = \vec{a} + \vec{c} + t(\vec{b} - 2\vec{c})$

この直線方向ベクトルが $\vec{b} - 2\vec{c}$ であるから, 原点からこの直線までの距離が最小となるとき, $\vec{a} + s_0\vec{b} + t_0\vec{c}$ と $\vec{b} - 2\vec{c}$ は垂直である.

5 $x^3 + (m-1)x^2 - (m-n)x - n = 0$ より $(x-1)(x^2 + mx + n) = 0$

$\frac{\alpha - \beta}{2i}$ が整数であるから, α, β は共役な複素数 ($\alpha \neq \beta$)

したがって, α, β は 2 次方程式 $x^2 + mx + n = 0$ の解であるから

$$\alpha + \beta = -m, \quad \alpha\beta = n$$

条件から, $\alpha\beta = 5$ であるから $n = 5$

$x^2 + mx + 5 = 0$ は虚数解 α, β をもち, $\frac{\alpha - \beta}{2i}$ が正の整数であるから

$$\alpha = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 20}}{2} = \frac{-m + \sqrt{20 - m^2}i}{2}$$

$$\beta = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 20}}{2} = \frac{-m - \sqrt{20 - m^2}i}{2}$$

ゆえに, $\frac{\alpha - \beta}{2i} = \frac{\sqrt{20 - m^2}}{2}$ が整数であるとき, 正の整数 m は 2, 4

よって $n = 5, (m, \alpha, \beta) = (2, -1 + 2i, -1 - 2i),$
 $(4, -2 + i, -2 - i)$

6 (1) 3 回目の試行後に 3 つの箱に 1 個ずつボールが入っている事象 A_1 の確率 $P(A_1)$ は

$$P(A_1) = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$$

3 回目の試行後に 3 つの箱に 2 個, 1 個, 0 個のボールが入っている事象 A_2 の確率 $P(A_2)$ は

$$P(A_2) = \frac{{}_3P_2 \times 3}{3^3} = \frac{2}{3}$$

3 回目の試行後に 3 つの箱に 3 個, 0 個, 0 個のボールが入っている事象 A_3 の確率 $P(A_3)$ は

$$P(A_3) = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{9}$$

- (2) 事象 A_1 が起きたとき, 4 回目の試行においてボールがどの箱に入っても, $X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_1}(X_4 = 1) = 1$$

事象 A_2 が起きたとき, 4 回目の試行においてボールが 2 個入っている箱か 0 個入っている箱にボールが入ったとき, $X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_2}(X_4 = 1) = \frac{2}{3}$$

事象 A_3 が起きたとき, 4 回目の試行においてどの箱にボールが入っても $X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_3}(X_4 = 1) = 1$$

事象 A_1 が起きたとき, 4 回目の試行においてボールがどの箱に入っても, $X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_1}(X_4 = 2) = 0$$

事象 A_2 が起きたとき, 4 回目の試行においてボールが 1 個入っている箱にボールが入ったとき, $X_4 = 2$ となるから

$$P_{A_2}(X_4 = 2) = \frac{1}{3}$$

事象 A_3 が起きたとき, 4 回目の試行においてどの箱にボールが入っても $X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_3}(X_4 = 1) = 0$$

- (3) (3) の結果から

$$P(X_4 = 1) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P_{A_i}(X_4 = 1) = \frac{2}{9} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \times 1 = \frac{7}{9}$$

$$P(X_4 = 2) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P_{A_i}(X_4 = 2) = \frac{2}{9} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times 0 = \frac{2}{9}$$

$$\text{よって } E(X_4) = 1 \times P(X_4 = 1) + 2 \times P(X_4 = 2) = 1 \times \frac{7}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$$

7 $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$ より

$$(x - y)^2 + 2(x + y) + 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x + y = -\frac{1}{2}(x - y)^2 - \frac{3}{2}$$

ゆえに、 $x = y = -\frac{3}{4}$ のとき、 $x + y$ は最大値 $-\frac{3}{2}$ をとる。

$\textcircled{1}$ より

$$(x + y)^2 - 4xy + 2(x + y) + 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad xy = \frac{1}{4}(x + y + 1)^2 + \frac{1}{2}$$

$x + y \leq -\frac{3}{2}$ であるから、 $x = y = -\frac{3}{4}$ のとき、 xy は最小値 $\frac{9}{16}$ をとる。

8 (1) $q = 2^r p$ (r は 0 以上の整数, p は奇数) より

$$\log_2 q = r + \log_2 p$$

$\log_2 q$ が有理数のとき、 $\log_2 p$ は有理数であるから

$$\log_2 p = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は整数, } n > 0)$$

したがって $p = 2^{\frac{m}{n}}$ ゆえに $p^n = 2^m$

p は奇数, $n > 0$ であるから $p = 1$

(2) $\log_4 a = k + \alpha$, $\log_4 b = \ell + \beta$ より (a, b は自然数)

$$\log_2 a = 2(k + \alpha), \quad \log_2 b = 2(\ell + \beta) \quad \cdots (*)$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\log_2 ab = 2(k + \ell) + 2(\alpha + \beta)$$

$\log_2 ab$ が有理数ならば、(1) の結果から、 $ab = 2^r$ (r は 0 以上の整数)

a, b は自然数であるから

$$a = 2^s, \quad b = 2^t \quad (s, t \text{ は 0 以上の整数, } s + t = r)$$

これらを (*) に代入すると

$$s = 2k + 2\alpha, \quad t = 2\ell + 2\beta$$

$0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$ であるから $\alpha = 0, \frac{1}{2}$ $\beta = 0, \frac{1}{2}$

したがって $\alpha + \beta = 0, \frac{1}{2}, 1$

$\alpha + \beta$ は有理数か無理数であるから、 $\alpha + \beta$ は $0, \frac{1}{2}, 1$ または無理数である。

9 (1) $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) より

$$\frac{dx}{dt} = -2 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$t = \frac{\pi}{4} \text{ のとき } x = \sqrt{2}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{2}$$

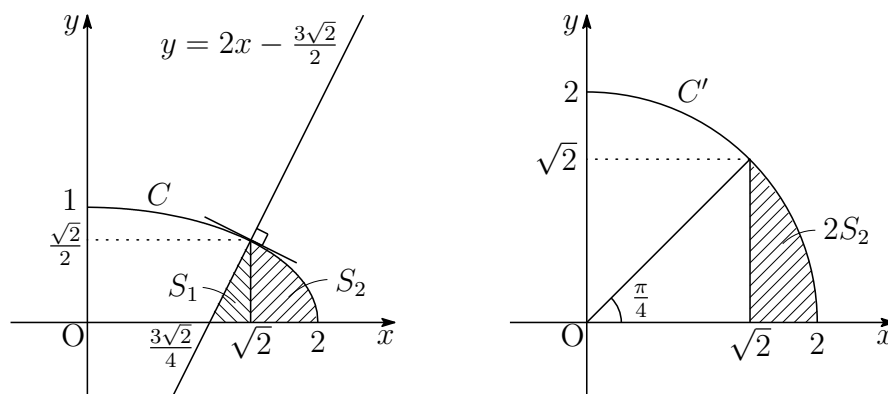
求める法線の傾きを m とすると

$$-\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{すなわち} \quad m = 2$$

よって、求める法線は、点 $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ を通り、傾き 2 の直線であるから

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2(x - \sqrt{2}) \quad \text{よって} \quad y = 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(2) 求める部分の面積を下の図のように S_1 と S_2 の 2 つの部分に分けると



$$S_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{8}$$

C を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大した図形を C' とすると、 C' は半径 2 の円の一部であるから

$$2S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{ゆえに} \quad S_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\text{求める面積は} \quad S_1 + S_2 = \frac{1}{8} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{8}$$