平成10年度　熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，医，薬，工学部)平成10年2月25日

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から1題選択， $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から1題選択， $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 必答

1 次の問いに答えよ。

(1) $t = x + \dfrac{1}{x}$ とおくとき，$x^2 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ を t の式で表せ。

(2) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ を実数を係数とする x の2次の整式の積で表せ。

2 3点A，B，Cがこの順に1直線上に並んでいて $\mathrm{AB} = 1$ とする。Bを通り直線ACに直交する直線 ℓ が与えられているとき，

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{BC}$$

をみたす ℓ 上の点Dを作図する方法をその理由とともに述べよ。

3 $a_1 = a_2 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geqq 3)$ により定まる数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ。

(1) $n = 3,\ 4,\ \cdots,\ 9$ に対して a_n の値を求めよ。

(2) n が3の倍数ならば a_n は偶数であり，n が3の倍数でなければ a_n は奇数であることを示せ。

4 $\vec{a} = (2,\ 1,\ 0)$，$\vec{b} = (1,\ 0,\ 1)$，$\vec{c} = (0,\ 0,\ 1)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) t，s が $2t + s = 1$，$-1 \leqq s \leqq 3$ をみたすとき，$|\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}|$ の最大値，最小値とそれらを与える t，s の値を求めよ。

(2) (1)で求めた最小値を与える t，s の値を t_0，s_0 とする。$\vec{a} + t_0\vec{b} + s_0\vec{c}$ が $\vec{b} + k\vec{c}$ に垂直であるときの k の値を求めよ。

5 x の方程式 $x^3 + (m-1)x^2 - (m-n)x - n = 0$ (m，n は正の整数) の解のうち2つの解 α，β について，

$$\alpha\beta = 5, \quad \frac{\alpha - \beta}{2i} \text{は正の整数}$$

が成立するとき，m，n，α，β の組をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

$\boxed{6}$ 異なる3つの箱がある。これらの3つの箱にうち1つを無作為に選び，その中にボールを1個入れる試行を繰り返す。第1回目の試行を始める前の3つの箱は空であるとする。第n回目の試行後にボールが2個以上入っている箱の数をX_n，ボールが1個だけ入っている箱の個数をY_nとするとき，次の問いに答えよ。

(1) $X_3=0$かつ$Y_3=3$である事象をA_1，$X_3=1$かつ$Y_3=1$である事象をA_2，$X_3=1$かつ$Y_3=0$である事象をA_3とするとき，A_1，A_2，A_3の確率$P(A_1)$，$P(A_2)$，$P(A_3)$を求めよ。

(2) $P_{A_i}(X_4=1)$，$P_{A_i}(X_4=2)$を$i=1,2,3$について求めよ。ただし，$P_A(B)$は事象Aが起こったときに事象Bが起こる条件つき確率である。

(3) X_4の期待値$E(X_4)$を求めよ。

$\boxed{7}$ x，yは実数で

$$x^2-2xy+y^2+2x+2y+3=0$$

をみたすとき，$x+y$の最大値，xyの最小値とそれらを与えるx，yの値を求めよ。

$\boxed{8}$ 次の問いに答えよ。

(1) 自然数qを$q=2^rp$ (rは0以上の整数，pは奇数) と表す。
$\log_2 q$が有理数ならば$p=1$であることを示せ。

(2) 自然数a，bに対して，

$$\log_4 a=k+\alpha,\quad \log_4 b=\ell+\beta$$

とおく。ただし，k，ℓは整数で，α，βは$0\leqq\alpha<1$，$0\leqq\beta<1$である。このとき，$\alpha+\beta$は0，$\dfrac{1}{2}$，1または無理数であることを示せ。

$\boxed{9}$ $x=2\cos t,\ y=\sin t\ \left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$で表される曲線$C$に関して次の問いに答えよ。

(1) $t=\dfrac{\pi}{4}$における法線の式を求めよ。

(2) (1)で求めた法線と曲線Cおよびx軸によって囲まれる図形の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+x+\dfrac{1}{x}-2=\boldsymbol{t^2+t-2}$

(2) (1) の結果から

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2+t-1$$

$t^2+t-1=0$ を解くと　　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

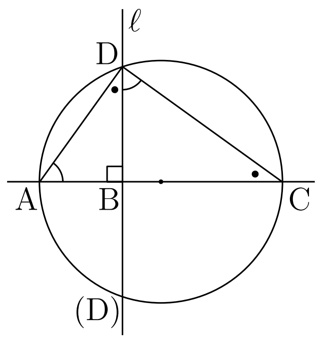
ゆえに　　$t^2+t-1=\left(t-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

よって

$$\begin{aligned}
x^4+x^3+x^2+x+1&=x^2\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\
&=x^2\left(t^2+t-1\right)\\
&=x^2\left(t-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\\
&=x^2\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\\
&=\boldsymbol{\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BC}$ より



$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}$

$\mathrm{AC}\perp\ell$ であるから　$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=90^\circ$

したがって　$\triangle\mathrm{ABD}\backsim\triangle\mathrm{DBC}\backsim\triangle\mathrm{ADC}$

$\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$ であるから，D は AC を直径とする円周上にある．

■

3 (1) $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = \mathbf{2}$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = \mathbf{3}$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = \mathbf{5}$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = \mathbf{8}$

$a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = \mathbf{13}$

$a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = \mathbf{21}$

$a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = \mathbf{34}$

(2) 条件から，a_1，a_2 は奇数．(1) の結果から，a_3 は偶数．
$n \geqq 4$ とすると，与えられた漸化式より

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_{n-2} + a_{n-3}) + a_{n-2} = 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

a_n は整数であるから　　$a_n \equiv a_{n-3} \pmod 2$

よって，n が 3 の倍数ならば a_n は偶数であり，n が 3 の倍数でなければ a_n は奇数である． ■

4 (1) $2t+s=1$ より　　$s=1-2t$

$-1 \leqq s \leqq 3$ であるから　$-1 \leqq t \leqq 1$

$$\begin{aligned}\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c} &= \vec{a}+t\vec{b}+(1-2t)\vec{c}\\ &= (2,\ 1,\ 0)+t(1,\ 0,\ 1)+(1-2t)(0,\ 0,\ 1)\\ &= (2+t,\ 1,\ 1-t) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

したがって　$|\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}|^2 = (2+t)^2+1^2+(1-t)^2$

$$= 2t^2+2t+6$$

$$= 2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$$

ゆえに　$|\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}|^2$ は　$t=1$ のとき最大値 10，

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{11}{2}$ をとる．

よって　$|\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}|$ は　$\boldsymbol{t=1}$，$\boldsymbol{s=-1}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\sqrt{10}}$

$\boldsymbol{t=-\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{s=2}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{22}}{2}}$

(2) $t_0=-\dfrac{1}{2}$，$s_0=2$ であるから，① より　$\vec{a}+t_0\vec{b}+s_0\vec{c}=\left(\dfrac{3}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$

また　　$\vec{b}+k\vec{c}=(1,\ 0,\ 1)+k(0,\ 0,\ 1)=(1,\ 0,\ 1+k)$

これらが $\vec{b}+k\vec{c}$ に垂直であるとき，$(\vec{a}+t_0\vec{b}+s_0\vec{c})\cdot(\vec{b}+k\vec{c})=0$ より

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(1+k)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=-2}$$

解説 $\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}=\vec{a}+\vec{c}+t(\vec{b}-2\vec{c})$

この直線の方向ベクトルが $\vec{b}-2\vec{c}$ であるから，原点からこの直線までの距離が最小となるとき，$\vec{a}+s_0\vec{b}+t_0\vec{c}$ と $\vec{b}-2\vec{c}$ は垂直である． ■

$\boxed{5}$ $x^3+(m-1)x^2-(m-n)x-n=0$ より　$(x-1)(x^2+mx+n)=0$

$\dfrac{\alpha-\beta}{2i}$ が整数であるから，α，β は共役な複素数 $(\alpha\neq\beta)$

したがって，α，β は2次方程式 $x^2+mx+n=0$ の解であるから

$$\alpha+\beta=-m,\quad \alpha\beta=n$$

条件から，$\alpha\beta=5$ であるから　$n=5$

$x^2+mx+5=0$ は虚数解 α，β をもち，$\dfrac{\alpha-\beta}{2i}$ が正の整数であるから

$$\alpha=\frac{-m+\sqrt{m^2-20}}{2}=\frac{-m+\sqrt{20-m^2}\,i}{2}$$
$$\beta=\frac{-m-\sqrt{m^2-20}}{2}=\frac{-m-\sqrt{20-m^2}\,i}{2}$$

ゆえに，$\dfrac{\alpha-\beta}{2i}=\dfrac{\sqrt{20-m^2}}{2}$ が整数であるとき，正の整数 m は　2，4

よって　　$\boldsymbol{n=5}$，$\boldsymbol{(m,\ \alpha,\ \beta)=(2,-1+2i,-1-2i),}$
$\boldsymbol{(4,-2+i,-2-i)}$

■

$\boxed{6}$ (1) 3回目の試行後に3つの箱に1個ずつボールが入っている事象 A_1 の確率 $P(A_1)$ は

$$P(A_1)=\frac{3!}{3^3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

3回目の試行後に3つの箱に2個，1個，0個のボールが入っている事象 A_2 の確率 $P(A_2)$ は

$$P(A_2)=\frac{{}_3\mathrm{P}_2\times 3}{3^3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

3回目の試行後に3つの箱に3個，0個，0個のボールが入っている事象 A_3 の確率 $P(A_3)$ は

$$P(A_3)=\frac{3}{3^3}=\boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

(2) 事象 A_1 が起きたとき，4 回目の試行においてボールがどの箱に入っても，$X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_1}(X_4 = 1) = \mathbf{1}$$

事象 A_2 が起きたとき，4 回目の試行においてボールが 2 個入っている箱か 0 個入っている箱にボールが入ったとき，$X_1 = 1$ となるから

$$P_{A_2}(X_4 = 1) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

事象 A_3 が起きたとき，4 回目の試行においてどの箱にボールが入っても $X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_3}(X_4 = 1) = \mathbf{1}$$

事象 A_1 が起きたとき，4 回目の試行においてボールがどの箱に入っても，$X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_1}(X_4 = 2) = \mathbf{0}$$

事象 A_2 が起きたとき，4 回目の試行においてボールが 1 個入っている箱にボールが入ったとき，$X_4 = 2$ となるから

$$P_{A_2}(X_4 = 2) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

事象 A_3 が起きたとき，4 回目の試行においてどの箱にボールが入っても $X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_3}(X_4 = 1) = \mathbf{0}$$

(3) (3) の結果から

$$P(X_4 = 1) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P_{A_i}(X_4 = 1) = \frac{2}{9} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \times 1 = \frac{7}{9}$$

$$P(X_4 = 1) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P_{A_i}(X_4 = 2) = \frac{2}{9} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times 0 = \frac{2}{9}$$

よって　$E(X_4) = 1 \times P(X_4 = 1) + 2 \times P(X_4 = 2) = 1 \times \dfrac{7}{9} + 2 \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{9}}$ ■

$\boxed{7}$ $x^2-2xy+y^2+2x+2y+3=0\cdots$① より

$$(x-y)^2+2(x+y)+3=0 \quad \text{すなわち} \quad x+y=-\frac{1}{2}(x-y)^2-\frac{3}{2}$$

ゆえに，$\boldsymbol{x=y=-\frac{3}{4}}$ のとき，$x+y$ は最大値 $\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$ をとる．

① より

$$(x+y)^2-4xy+2(x+y)+3=0 \quad \text{すなわち} \quad xy=\frac{1}{4}(x+y+1)^2+\frac{1}{2}$$

$x+y \leqq -\frac{3}{2}$ であるから，$\boldsymbol{x=y=-\frac{3}{4}}$ のとき，xy は最小値 $\boldsymbol{\frac{9}{16}}$ をとる． ■

$\boxed{8}$ (1) $q=2^rp$ (r は 0 以上の整数，p は奇数) より

$$\log_2 q = r+\log_2 p$$

$\log_2 q$ が有理数のとき，$\log_2 p$ は有理数であるから

$$\log_2 p=\frac{m}{n} \quad (m,\ n \text{ は整数},\ n>0)$$

したがって　　$p=2^{\frac{m}{n}}$　ゆえに　$p^n=2^m$

p は奇数，$n>0$ であるから　　$p=1$

(2) $\log_4 a=k+\alpha$，$\log_4 b=\ell+\beta$ より ($a,\ b$ は自然数)

$$\log_2 a=2(k+\alpha), \quad \log_2 b=2(\ell+\beta) \quad \cdots(*)$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\log_2 ab=2(k+\ell)+2(\alpha+\beta)$$

$\log_2 ab$ が有理数ならば，(1) の結果から，$ab=2^r$ (r は 0 以上の整数)
a，b は自然数であるから

$$a=2^s, \quad b=2^t \quad (s,\ t \text{ は 0 以上の整数}, \quad s+t=r)$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$s=2k+2\alpha, \quad t=2\ell+2\beta$$

$0 \leqq \alpha < 1$，$0 \leqq \beta < 1$ であるから　$\alpha=0,\ \frac{1}{2}$　　$\beta=0,\ \frac{1}{2}$

したがって　　$\alpha+\beta=0,\ \frac{1}{2},\ 1$

$\alpha+\beta$ は有理数か無理数であるから，$\alpha+\beta$ は $0,\ \frac{1}{2},\ 1$ または無理数である． ■

9 (1) $x=2\cos t,\quad y=\sin t\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=\cos t$$

$t=\dfrac{\pi}{4}$ のとき　$x=\sqrt{2},\quad y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{2},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{2}$$

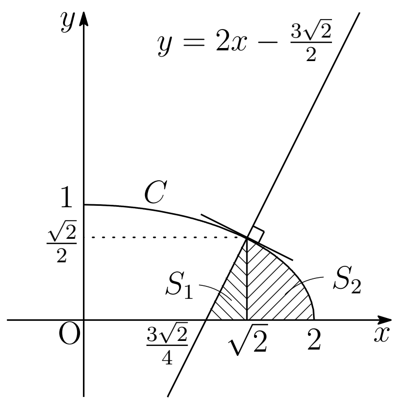
求める法線の傾きを m とすると

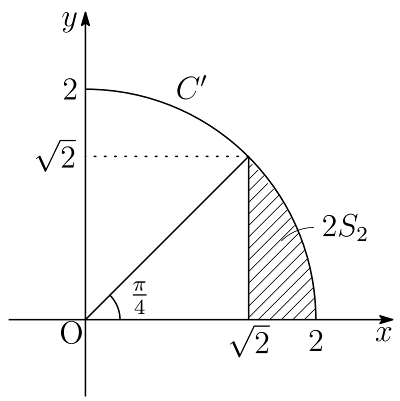
$$-\frac{1}{2}m=-1\quad \text{すなわち}\quad m=2$$

よって，求める法線は，点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=2(x-\sqrt{2})\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{y=2x-\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

(2) 求める部分の面積を下の図のように S_1 と S_2 の 2 つの部分に分けると





$$S_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{8}$$

C を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大した図形を C' とすると，C' は半径 2 の円の一部であるから

$$2S_2=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\pi}{2}-1\quad \text{ゆえに}\quad S_2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

求める面積は　$S_1+S_2=\dfrac{1}{8}+\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{8}}$ ■