平成９年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医，薬，工学部) 平成 9 年 2 月 25 日

新課程履修者は $\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ から 1 題選択，$\boxed{5}$〜$\boxed{7}$ から 1 題選択.
旧課程履修者は $\boxed{1}$〜$\boxed{4}$ から 1 題選択，$\boxed{5}$〜$\boxed{8}$ から 1 題選択.
$\boxed{9}$〜$\boxed{11}$ 必答.

$\boxed{1}$ ある整式 A を x^2+1 で割ると余りが $x+1$ で，$x+1$ で割ると余りが 1 である。整式 A を $(x^2+1)(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{2}$ 1 辺の長さが 1 の正五角形において，5 本の対角線を引いたときにできる小さな正五角形の 1 辺の長さを求めよ。

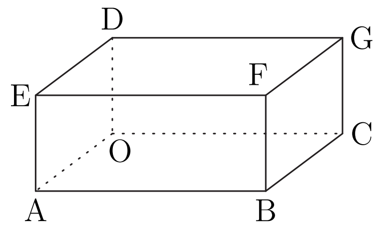
$\boxed{3}$ $a_1=1$，$b_1=1$，$b_{n+1}=3b_n+a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたす 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ があり，$c_n=a_n+b_n+1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき $\{c_n\}$ は公比 3 の等比数列になる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_n を n の式で表せ。

(2) b_n を n の式で表せ。

$\boxed{4}$ **(新課程履修者はこの問題を選択できない。)**

右の図のような $\mathrm{OA}=p$，$\mathrm{OC}=q$，$\mathrm{OD}=r$ である直方体 OABC-DEFG において，平面 ADC と平面 DFC のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。



$\boxed{5}$ 相異なる 3 点 O，A，B に対して $\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$ とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+2|\vec{b}|}$ とおくとき，$\angle\mathrm{AOP}$ を求めよ。

$\boxed{6}$ p，q，r は実数で，$p^2+q^2\neq 0$ とする。x の方程式

$$x^3+(2p-1)x^2+(p^2+q^2-2p)x-p^2-q^2=0$$

の 3 つの解 α_1，α_2，α_3 に対して，$\dfrac{1}{\alpha_1}$，$\dfrac{1}{\alpha_2}$，$\dfrac{1}{\alpha_3}$ を解とする方程式が

$$rx^3-33x^2+9x-1=0$$

となるとき，α_1，α_2，α_3 の値を求めよ。

7 袋 A には白玉が m 個と黒玉が 1 個入っており，袋 B には白玉が 1 個と黒玉が m 個入っている。ただし，$m \geqq 1$ とする。それぞれの袋から無作為に玉を 1 個ずつ取り出し，2 個とも白玉なら 2 個とも袋 A に入れ，2 個とも黒玉なら 2 個とも袋 B に入れ，白玉と黒玉が出たときは，白玉は黒玉が出た袋に，黒玉は白玉が出た袋に入れる，という試行を考える。試行後の袋 A の中の白玉の個数の確率分布およびその期待値を求めよ。

8 **(新課程履修者はこの問題を選択できない。)**

xy 平面において，原点を中心として 60° 回転し，さらに y 軸に関して対称な点に移す 1 次変換を f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) f を表す行列を求めよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が f によって自分自身に移されるとき，x，y の関係式を求めよ。

9 x の 2 次方程式

$$x^2 + 2(a + \sin^2\theta)x + 2a + 3 + \cos 2\theta = 0$$

が $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲のすべての θ に対して実数解をもつとする。このとき，a の値の範囲を求めよ。

10 2 つの放物線 $y = x^2$，$y = (x-n)^2 + n^2$ と y 軸で囲まれた部分 (境界線を含む) にあって，x 座標，y 座標がともに整数である点の個数を a_n とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，n は自然数である。

(1) a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ を求めよ。

11 区間 $[-2,\ 2]$ において連続な曲線 $y = f(x)$ が次の条件を満たしているとする。

$$f(-2) = f(2) = 0$$
$$f'(x) = \begin{cases} \alpha & (-2 < x < -1) \\ 2x & (-1 < x < 1) \\ -\alpha & (1 < x < 2) \end{cases}$$

$\alpha \geqq 0$ として，$\displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx$ を最小にする α の値およびその最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 整式 A を $A(x)$ とおく．$A(x)$ を 3 次式 $(x^2+1)(x+1)$ で割ったときの商 $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とおくと

$$\begin{aligned} A(x) &= (x^2+1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x^2+1)\{(x+1)Q(x)+a\}+bx+c-a \end{aligned}$$

$A(x)$ を x^2+1 で割った余りが $x+1$ であるから

$$b=1,\quad c-a=1 \quad \cdots①$$

$A(x)$ を $x+1$ で割った余りが 1 であるから，剰余の定理により

$$A(-1)=a-b+c=1 \quad \cdots②$$

①，② を解いて　$a=\dfrac{1}{2},\ b=1,\ c=\dfrac{3}{2}$　よって，求める余りは　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}}$

別解 $A(x)$ を 3 次式 $(x^2+1)(x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とおくと

$$A(x)=(x^2+1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$A(x)$ を x^2+1 で割った余りが $x+1$ であるから，$A(i)=1+i$ より

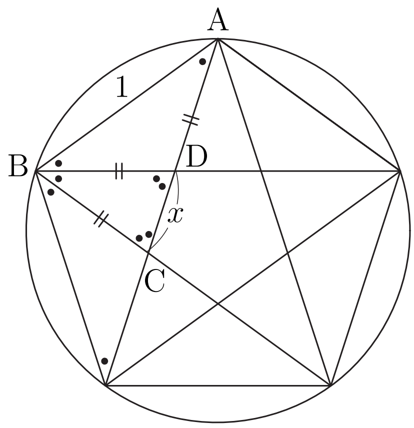
$$-a+c+bi=1+i \quad \text{ゆえに} \quad -a+c=1,\ \ b=1 \quad \cdots①$$

$A(x)$ を $x+1$ で割った余りが 1 であるから，剰余の定理により

$$A(-1)=a-b+c=1 \quad \cdots②$$

①，② を解いて　$a=\dfrac{1}{2},\ b=1,\ c=\dfrac{3}{2}$　よって，求める余りは　$\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 正五角形は円に内接するから，右の図において



$$\angle\mathrm{BAC}=36^\circ,\ \angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=72^\circ$$
$$\angle\mathrm{CBD}=36^\circ,\ \angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BDC}=72^\circ$$

$x=\mathrm{CD}$ とおくと

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{AD}=1-x$$

$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$ であるから

$$1:1-x=1-x:x \quad \text{ゆえに} \quad x^2-3x+1=0$$

$0<x<1$ に注意してこれを解くと　$x=\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $c_n = a_n + b_n + 1$ について，$\{c_n\}$ が公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1} + b_{n+1} + 1 = 3(a_n + b_n + 1) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_n + 3b_n + 2$$

これと $b_{n+1} = 3b_n + a_n$ の辺々を引くと

$$a_{n+1} = 2a_n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

$\{a_n + 2\}$ は初項 $a_1 + 2 = 3$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n + 2 = 3{\cdot}2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = 3{\cdot}2^{n-1} - 2}$$

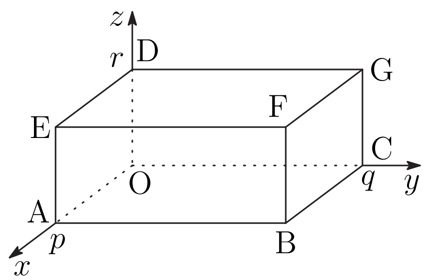
(2) $\{a_n + b_n + 1\}$ は初項 $a_1 + b_1 + 1 = 3$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n + b_n + 1 = 3{\cdot}3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = 3^n - 1 - a_n$$

これに (1) の結果を代入すると

$$b_n = 3^n - 1 - (3{\cdot}2^{n-1} - 2) = \boldsymbol{3^n - 3{\cdot}2^{n-1} + 1}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 右の図のように座標軸をとると



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-p,\ q,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-p,\ 0,\ r)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (0, -q,\ r), \quad \overrightarrow{\mathrm{CF}} = (p,\ 0,\ r)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{u}$,
$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{v}$
とすると

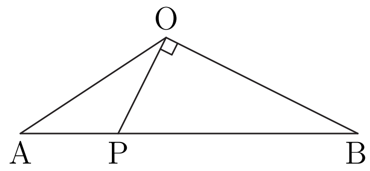
$$\vec{u} = (qr,\ pr,\ pq), \quad \vec{v} = (-qr,\ pr,\ pq)$$

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角を α とすると

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}{\cdot}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2}{q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2}$$

よって $\quad \cos\theta = |\cos\alpha| = \boldsymbol{\dfrac{|-q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2|}{q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2}}$

$\boxed{\textbf{5}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + 2|\vec{b}|}$ より，P は AB を $|\vec{a}| : 2|\vec{b}|$ に内分する点である．$\angle\mathrm{AOB} = 120^\circ$ より



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2|\vec{b}|\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}| + 2|\vec{b}|} = 0$　したがって　$\angle\mathrm{POB} = 90^\circ$

よって　　$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{AOB} - \angle\mathrm{POB} = 120^\circ - 90^\circ = \mathbf{30^\circ}$

$\boxed{\textbf{6}}$ 方程式 $rx^3 - 33x^2 + 9x - 1 = 0$ の解が $\dfrac{1}{\alpha_k}$ $(k = 1, 2, 3)$ であるから

$$r\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^3 - 33\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{\alpha_k}\right) - 1 = 0$$

ゆえに　　　　　$\alpha_k{}^3 - 9\alpha_k{}^2 + 33\alpha_k - r = 0$

したがって，α_k $(k = 1, 2, 3,)$ を解とする 3 次方程式 $x^3 - 9x^2 + 33x - r = 0$ が，次の方程式に一致する．

$$x^3 + (2p-1)x^2 + (p^2 + q^2 - 2p) - p^2 - q^2 = 0$$

係数を比較すると

$$2p - 1 = -9, \quad p^2 + q^2 - 2p = 33, \quad -p^2 - q^2 = -r$$

上の 3 式から　　$p = -4$，$r = p^2 + q^2 = 25$

α_k $(k = 1, 2, 3,)$ を解とする 3 次方程式は $x^3 - 9x^2 + 33x - 25 = 0$ であるから

$$(x-1)(x^2 - 8x + 25) = 0$$

よって，α_k $(k = 1, 2, 3,)$ は，これを解いて　　$\mathbf{1}$，$\mathbf{4 \pm 3}\boldsymbol{i}$

$\boxed{7}$ 袋 A，B から取り出す玉の色の確率および試行後の袋 A の中の白玉の個数は，次の表のようになる．

		$\frac{1}{m+1}$	$\frac{m}{m+1}$
	A＼B	白	黒
$\frac{m}{m+1}$	白	$\frac{m}{(m+1)^2}$	$\frac{m^2}{(m+1)^2}$
$\frac{1}{m+1}$	黒	$\frac{1}{(m+1)^2}$	$\frac{m}{(m+1)^2}$

確　率

A＼B	白	黒
白	$m+1$	$m-1$
黒	$m+1$	m

試行後の袋 A の
中の白玉の個数

したがって，試行後の袋 A の中の白玉の個数の確率分布およびその期待値 $E(x)$ は次のようになる．

X	$m-1$	m	$m+1$	計
$P(X)$	$\frac{m^2}{(m+1)^2}$	$\frac{m}{(m+1)^2}$	$\frac{m+1}{(m+1)^2}$	1

$$
\begin{aligned}
E(X) &= (m-1)\cdot\frac{m^2}{(m+1)^2} + m\cdot\frac{m}{(m+1)^2} + (m+1)\cdot\frac{m+1}{(m+1)^2} \\
&= \boldsymbol{\frac{m^3+m^2+2m+1}{(m+1)^2}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{8}$ (1) 原点を中心に 60° の回転移動を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$

y 軸に関する対称移動を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって，f の表す行列は

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

(2) $(x,\ y)$ が f によって，自分自身に移されるとき

$$
\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = \sqrt{3}\,x}
$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ であるから，与えられた方程式は

$$x^2 + 2(a + \sin^2\theta)x + 2a + 4 - 2\sin^2\theta = 0$$

ここで，$t = \sin^2\theta$ とおくと

$$x^2 + 2(a+t)x + 2a + 4 - 2t = 0 \quad \cdots ①$$

① の判別式 D を $f(t) = D/4$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= (a+t)^2 - 1{\cdot}(2a + 4^2t) \\ &= t^2 + 2(a+1)t + a^2 - 2a - 4 \\ &= (t + a + 1)^2 - 4a - 5 \end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ より，$0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{4}$ であるから，この範囲において，$f(t) \geqq 0$ であればよい．

(i) $-a-1 < 0$　すなわち　$a > -1$ のとき，$f(0) \geqq 0$ より

$$a^2 - 2a - 4 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq 1 - \sqrt{5},\ 1 + \sqrt{5} \leqq a$$

$a > -1$ に注意して　　$1 + \sqrt{5} \leqq a$

(ii) $0 \leqq -a-1 \leqq \dfrac{3}{4}$　すなわち　$-\dfrac{7}{4} \leqq a \leqq -1$ のとき，$f\left(-a-1\right) \geqq 0$ より

$$-4a - 5 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq -\frac{5}{4}$$

$-\dfrac{7}{4} \leqq a \leqq -1$ に注意して　$-\dfrac{7}{4} \leqq a \leqq -\dfrac{5}{4}$

(iii) $\dfrac{3}{4} < -a-1$　すなわち　$a < -\dfrac{7}{4}$ のとき，$f\left(\dfrac{3}{4}\right) \geqq 0$ より

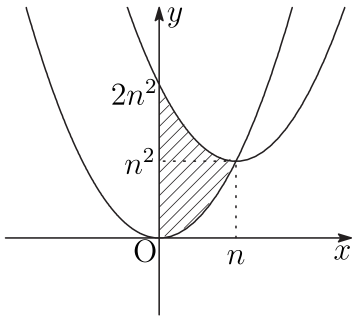
$$a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{31}{16} \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq \frac{1 - 4\sqrt{2}}{4},\ \frac{1 + 4\sqrt{2}}{4} \leqq a$$

$a < -\dfrac{7}{4}$ に注意して　$a < -\dfrac{7}{4}$

(i),(ii),(iii) より　　$\boldsymbol{a \leqq -\dfrac{5}{4},\ 1 + \sqrt{5} \leqq a}$

$\boxed{\textbf{10}}$ (1) $f(k)=(n-k)^2+n^2$，$g(k)=k^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(k)-g(k) &= (n-k)^2+n^2-k^2 \\ &= 2n^2-2nk \end{aligned}$$



a_n は，右の図の斜線部分 (境界線を含む) の格子点の総数であるから

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n}\{f(k)-g(k)+1\} = \sum_{k=0}^{n}(2n^2+1-2nk) \\ &= 2n^2+1+\sum_{k=1}^{n}(2n^2+1-2nk) \\ &= 2n^2+1+(2n^2+1)n-2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \boldsymbol{n^3+n^2+n+1} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2+k+1) &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)+n \\ &= \frac{1}{4}n^4+\frac{5}{6}n^3+\frac{5}{4}n^2+\frac{5}{3}n \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}a_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2+k+1) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{4}n^4+\frac{5}{6}n^3+\frac{5}{4}n^2+\frac{5}{3}n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{6n}+\frac{5}{4n^2}+\frac{5}{3n^3}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ $f'(x)$ から，定数 C_i $(i=1,2,3)$ を用いて

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+C_1 & (-2<x<-1)\\ x^2+C_2 & (-1<x<1)\\ -\alpha x+C_3 & (1<x<2)\end{cases}$$

$[-2,\ 2]$ において $f(x)$ は連続であるから

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-2+0}f(x)=f(-2) && \text{すなわち} && -2\alpha+C_1=0\\
&\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}f(x) && \text{すなわち} && -\alpha+C_1=1+C_2\\
&\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x) && \text{すなわち} && 1+C_2=-\alpha+C_3\\
&\lim_{x\to2-0}f(x)=f(2) && \text{すなわち} && -2\alpha+C_3=0
\end{aligned}$$

これを解いて　　$C_1=2\alpha$，$C_2=\alpha-1$，$C_3=2\alpha$

したがって　　$f(x)=\begin{cases}\alpha(x+2) & (-2\leqq x\leqq -1)\\ x^2+\alpha-1 & (-1\leqq x\leqq 1)\\ -\alpha(x-2) & (1\leqq x\leqq 2)\end{cases}$

$f(x)$ は偶関数であるから

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx&=2\int_0^2|f(x)|\,dx\\
&=2\int_0^1|f(x)|\,dx+2\int_1^2|f(x)|\,dx
\end{aligned}$$

また　　$\displaystyle\int_1^2|f(x)|\,dx=-\alpha\int_1^2(x-2)\,dx=-\alpha\Big[\,\frac{1}{2}(x-2)^2\,\Big]_1^2=\frac{\alpha}{2}$

したがって　　$\displaystyle\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx=2\int_0^1|f(x)|\,dx+\alpha \quad\cdots(*)$

(i) $\alpha-1\geqq 0$　すなわち　$\alpha\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_0^1|f(x)|\,dx&=\int_0^1(x^2+\alpha-1)\,dx\\
&=\Big[\,\frac{x^3}{3}+(\alpha-1)x\,\Big]_0^1=\alpha-\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(ii) $\alpha - 1 \leqq 0$　すなわち　$0 \leqq \alpha \leqq 1$ のとき，

$\beta = \sqrt{1-\alpha}$ とおくと，$x^2 + \alpha - 1 = x^2 - \beta^2$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,dx &= \int_0^\beta (\beta^2 - x^2)\,dx + \int_\beta^1 (x^2 - \beta^2)\,dx \\ &= \left[\ \beta^2 x - \frac{x^3}{3}\ \right]_0^\beta + \left[\ \frac{x^3}{3} - \beta^2 x\ \right]_\beta^1 \\ &= \frac{4}{3}\beta^3 - \beta^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}(\sqrt{1-\alpha})^3 - (\sqrt{1-\alpha})^2 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3}(1-\alpha)^{\frac{3}{2}} + \alpha - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(i),(ii) の結果を $(*)$ に代入すると

$$\int_{-2}^2 |f(x)|\,dx = \begin{cases} 3\alpha - \dfrac{4}{3} & (\alpha \geqq 1) \\ \dfrac{8}{3}(1-\alpha)^{\frac{3}{2}} + 3\alpha - \dfrac{4}{3} & (0 \leqq \alpha \leqq 1) \end{cases}$$

上式を α の関数と考えると，$\alpha \geqq 1$ において増加関数であるから，この関数の最小値は，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ の範囲で求めればよい．ここで

$$g(\alpha) = \frac{8}{3}(1-\alpha)^{\frac{3}{2}} + 3\alpha - \frac{4}{3} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1)$$

とおくと

$$g'(\alpha) = -4\sqrt{1-\alpha} + 3$$

$g'(\alpha) = 0$ とおくと　$\alpha = \dfrac{7}{16}$

$g(\alpha)$ の増減表は，次のようになる．

α	0	$\cdots$	$\frac{7}{16}$	$\cdots$	1
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	極小 $\frac{53}{48}$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$

よって　$\boldsymbol{\alpha = \dfrac{7}{16}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{53}{48}}$ をとる．