

平成9年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 医, 薬, 工学部)平成9年2月25日

● 新課程履修者

1 2 3 から1題選択, 5 6 7 から1題選択, 9 10 11 必答

● 旧課程履修者

1 2 3 4 から1題選択, 5 6 7 8 から1題選択, 9 10 11 必答

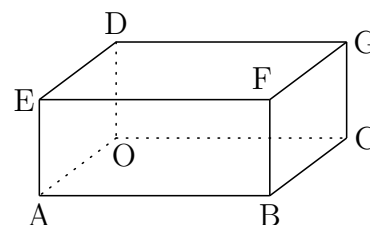
- 1 ある整式 A を $x^2 + 1$ で割ると余りが $x + 1$ で, $x + 1$ で割ると余りが 1 である。整式 A を $(x^2 + 1)(x + 1)$ で割ったときの余りを求めよ。
- 2 1辺の長さが 1 の正五角形において, 5 本の対角線を引いたときにできる小さな正五角形の1辺の長さを求めよ。
- 3 $a_1 = 1, b_1 = 1, b_{n+1} = 3b_n + a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ をみたす2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ があり, $c_n = a_n + b_n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ とおくと $\{c_n\}$ は公比 3 の等比数列になる。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_n を n の式で表せ。

(2) b_n を n の式で表せ。

- 4 (新課程履修者はこの問題を選択できない。)

右の図のような $OA = p, OC = q, OD = r$ である直方体 $OABC-DEFG$ において, 平面 ADC と平面 DFC のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。



- 5 相異なる3点 O, A, B に対して $\angle AOB = 120^\circ$ とする。 $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$ とおき $\vec{OP} = \frac{2|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + 2|\vec{b}|}$ とおくと $\angle AOP$ を求めよ。

- 6 p, q, r は実数で, $p^2 + q^2 \neq 0$ とする。 x の方程式

$$x^3 + (2p - 1)x^2 + (p^2 + q^2 - 2p)x - p^2 - q^2 = 0$$

の3つの解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対して, $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}$ を解とする方程式が

$$rx^3 - 33x^2 + 9x - 1 = 0$$

となるとき, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の値を求めよ。

- 7 袋 A には白玉が m 個と黒玉が 1 個入っており、袋 B には白玉が 1 個と黒玉が m 個入っている。ただし、 $m \geq 1$ とする。それぞれの袋から無作為に玉を 1 個ずつ取り出し、2 個とも白玉なら 2 個とも袋 A に入れ、2 個とも黒玉なら 2 個とも袋 B に入れ、白玉と黒玉が出たときは、白玉は黒玉が出た袋に、黒玉は白玉が出た袋に入れる、という試行を考える。試行後の袋 A の中の白玉の個数の確率分布およびその期待値を求めよ。

- 8 (新課程履修者はこの問題を選択できない。)

xy 平面において、原点を中心として 60° 回転し、さらに y 軸に関して対称な点に移す 1 次変換を f とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) f を表す行列を求めよ。
- (2) 点 (x, y) が f によって自分自身に移される時、 x, y の関係式を求めよ。

- 9 x の 2 次方程式

$$x^2 + 2(a + \sin^2 \theta)x + 2a + 3 + \cos 2\theta = 0$$

が $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ の範囲のすべての θ に対して実数解をもつとする。このとき、 a の値の範囲を求めよ。

- 10 2 つの放物線 $y = x^2$, $y = (x - n)^2 + n^2$ と y 軸で囲まれた部分 (境界線を含む) にあって、 x 座標、 y 座標がともに整数である点の個数を a_n とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 n は自然数である。

- (1) a_n を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ を求めよ。

- 11 区間 $[-2, 2]$ において連続な曲線 $y = f(x)$ が次の条件を満たしているとする。

$$f(-2) = f(2) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha & (-2 < x < -1) \\ 2x & (-1 < x < 1) \\ -\alpha & (1 < x < 2) \end{cases}$$

$\alpha \geq 0$ として、 $\int_{-2}^2 |f(x)| dx$ を最小にする α の値およびその最小値を求めよ。

解答例

- 1 整式 A を $A(x)$ とおく. $A(x)$ を 3 次式 $(x^2 + 1)(x + 1)$ で割ったときの商 $Q(x)$, 余りを $ax^2 + bx + c$ とおくと

$$\begin{aligned} A(x) &= (x^2 + 1)(x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x^2 + 1)\{(x + 1)Q(x) + a\} + bx + c - a \end{aligned}$$

$A(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りが $x + 1$ であるから

$$b = 1, \quad c - a = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$A(x)$ を $x + 1$ で割った余りが 1 であるから, 剰余の定理により

$$A(-1) = a - b + c = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}$ よって, 求める余りは $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

- 別解 $A(x)$ を 3 次式 $(x^2 + 1)(x + 1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax^2 + bx + c$ とおくと

$$A(x) = (x^2 + 1)(x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$A(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りが $x + 1$ であるから, $A(i) = 1 + i$ より

$$-a + c + bi = 1 + i \quad \text{ゆえに} \quad -a + c = 1, \quad b = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$A(x)$ を $x + 1$ で割った余りが 1 であるから, 剰余の定理により

$$A(-1) = a - b + c = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}$ よって, 求める余りは $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

- 2 正五角形は円に内接するから, 右の図において

$$\angle BAC = 36^\circ, \quad \angle ABC = \angle ACB = 72^\circ$$

$$\angle CBD = 36^\circ, \quad \angle BCD = \angle BDC = 72^\circ$$

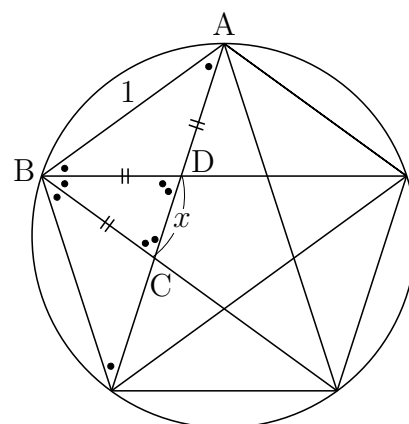
$x = CD$ とおくと

$$BC = BD = AD = 1 - x$$

$\triangle ABC \sim \triangle BCD$ であるから

$$1 : 1 - x = 1 - x : x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

$0 < x < 1$ に注意してこれを解くと $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$



3 (1) $c_n = a_n + b_n + 1$ について, $\{c_n\}$ が公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1} + b_{n+1} + 1 = 3(a_n + b_n + 1) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_n + 3b_n + 2$$

これと $b_{n+1} = 3b_n + a_n$ の辺々を引くと

$$a_{n+1} = 2a_n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

$\{a_n + 2\}$ は初項 $a_1 + 2 = 3$, 公比 2 の等比数列であるから

$$a_n + 2 = 3 \cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$$

(2) $\{a_n + b_n + 1\}$ は初項 $a_1 + b_1 + 1 = 3$, 公比 3 の等比数列であるから

$$a_n + b_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = 3^n - 1 - a_n$$

これに (1) の結果を代入すると

$$b_n = 3^n - 1 - (3 \cdot 2^{n-1} - 2) = 3^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 1$$

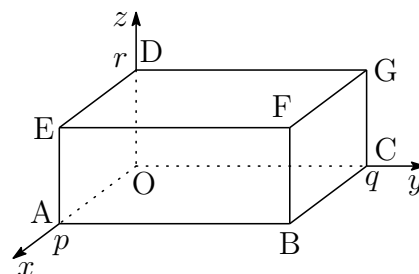
■

4 右の図のように座標軸をとると

$$\vec{AC} = (-p, q, 0), \quad \vec{AD} = (-p, 0, r)$$

$$\vec{CD} = (0, -q, r), \quad \vec{CF} = (p, 0, r)$$

\vec{AC} と \vec{AD} に垂直なベクトルの 1 つを \vec{u} ,
 \vec{CD} と \vec{CF} に垂直なベクトルの 1 つを \vec{v}
 とすると



$$\vec{u} = (qr, pr, pq), \quad \vec{v} = (-qr, pr, pq)$$

\vec{u} と \vec{v} のなす角を α とすると

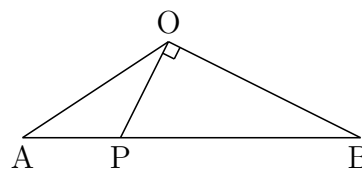
$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-q^2 r^2 + p^2 r^2 + p^2 q^2}{q^2 r^2 + p^2 r^2 + p^2 q^2}$$

よって $\cos \theta = |\cos \alpha| = \frac{|-q^2 r^2 + p^2 r^2 + p^2 q^2|}{q^2 r^2 + p^2 r^2 + p^2 q^2}$

■

- 5 $\vec{OP} = \frac{2|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + 2|\vec{b}|}$ より, P は AB を $|\vec{a}| : 2|\vec{b}|$ に内分する点である. $\angle AOB = 120^\circ$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$$



ゆえに $\vec{OB} \cdot \vec{OP} = \frac{2|\vec{b}|\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|\vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + 2|\vec{b}|} = 0$ したがって $\angle POB = 90^\circ$

よって $\angle AOP = \angle AOB - \angle POB = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ ■

- 6 方程式 $rx^3 - 33x^2 + 9x - 1 = 0$ の解が $\frac{1}{\alpha_k}$ ($k = 1, 2, 3$) であるから

$$r \left(\frac{1}{\alpha_k} \right)^3 - 33 \left(\frac{1}{\alpha_k} \right)^2 + 9 \left(\frac{1}{\alpha_k} \right) - 1 = 0$$

ゆえに $\alpha_k^3 - 9\alpha_k^2 + 33\alpha_k - r = 0$

したがって, α_k ($k = 1, 2, 3$) を解とする 3 次方程式 $x^3 - 9x^2 + 33x - r = 0$ が, 次の方程式に一致する.

$$x^3 + (2p - 1)x^2 + (p^2 + q^2 - 2p)x - p^2 - q^2 = 0$$

係数を比較すると

$$2p - 1 = -9, \quad p^2 + q^2 - 2p = 33, \quad -p^2 - q^2 = -r$$

上の 3 式から $p = -4, r = p^2 + q^2 = 25$

α_k ($k = 1, 2, 3$) を解とする 3 次方程式は $x^3 - 9x^2 + 33x - 25 = 0$ であるから

$$(x - 1)(x^2 - 8x + 25) = 0$$

よって, α_k ($k = 1, 2, 3$) は, これを解いて $1, 4 \pm 3i$ ■

- 7 袋 A, B から取り出す玉の色の確率および試行後の袋 A 中の白玉の個数は、次の表のようになる。

		$\frac{1}{m+1}$	$\frac{m}{m+1}$
	A \ B	白	黒
$\frac{m}{m+1}$	白	$\frac{m}{(m+1)^2}$	$\frac{m^2}{(m+1)^2}$
$\frac{1}{m+1}$	黒	$\frac{1}{(m+1)^2}$	$\frac{m}{(m+1)^2}$

確 率

	A \ B	白	黒
白		$m + 1$	$m - 1$
黒		$m + 1$	m

試行後の袋 A 中の白玉の個数

したがって、試行後の袋 A 中の白玉の個数の確率分布およびその期待値 $E(x)$ は次のようになる。

X	$m - 1$	m	$m + 1$	計
$P(X)$	$\frac{m^2}{(m+1)^2}$	$\frac{m}{(m+1)^2}$	$\frac{m+1}{(m+1)^2}$	1

$$\begin{aligned}
 E(X) &= (m-1) \cdot \frac{m^2}{(m+1)^2} + m \cdot \frac{m}{(m+1)^2} + (m+1) \cdot \frac{m+1}{(m+1)^2} \\
 &= \frac{m^3 + m^2 + 2m + 1}{(m+1)^2}
 \end{aligned}$$

- 8 (1) 原点を中心に 60° の回転移動を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$

y 軸に関する対称移動を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって、 f の表す行列は

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- (2) (x, y) が f によって、自分自身に移されるとき

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{y} = \sqrt{3}\mathbf{x}$$

9 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ であるから、与えられた方程式は

$$x^2 + 2(a + \sin^2 \theta)x + 2a + 4 - 2\sin^2 \theta = 0$$

ここで、 $t = \sin^2 \theta$ とおくと

$$x^2 + 2(a + t)x + 2a + 4 - 2t = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

①の判別式 D を $f(t) = D/4$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= (a + t)^2 - 1 \cdot (2a + 4^2 t) \\ &= t^2 + 2(a + 1)t + a^2 - 2a - 4 \\ &= (t + a + 1)^2 - 4a - 5 \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ より、 $0 \leq t \leq \frac{3}{4}$ であるから、この範囲において、 $f(t) \geq 0$ であればよい。

(i) $-a - 1 < 0$ すなわち $a > -1$ のとき、 $f(0) \geq 0$ より

$$a^2 - 2a - 4 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5} \leq a$$

$$a > -1 \text{ に注意して} \quad 1 + \sqrt{5} \leq a$$

(ii) $0 \leq -a - 1 \leq \frac{3}{4}$ すなわち $-\frac{7}{4} \leq a \leq -1$ のとき、 $f(-a - 1) \geq 0$ より

$$-4a - 5 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq -\frac{5}{4}$$

$$-\frac{7}{4} \leq a \leq -1 \text{ に注意して} \quad -\frac{7}{4} \leq a \leq -\frac{5}{4}$$

(iii) $\frac{3}{4} < -a - 1$ すなわち $a < -\frac{7}{4}$ のとき、 $f\left(\frac{3}{4}\right) \geq 0$ より

$$a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{31}{16} \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq \frac{1 - 4\sqrt{2}}{4}, \frac{1 + 4\sqrt{2}}{4} \leq a$$

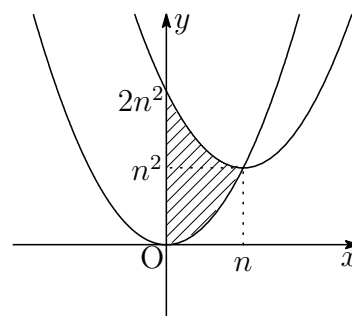
$$a < -\frac{7}{4} \text{ に注意して} \quad a < -\frac{7}{4}$$

(i),(ii),(iii) より $a \leq -\frac{5}{4}, 1 + \sqrt{5} \leq a$ ■

10 (1) $f(k) = (n - k)^2 + n^2$, $g(k) = k^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(k) - g(k) &= (n - k)^2 + n^2 - k^2 \\ &= 2n^2 - 2nk \end{aligned}$$

a_n は、右の図の斜線部分 (境界線を含む) の格子点の総数であるから



$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \{f(k) - g(k) + 1\} = \sum_{k=0}^n (2n^2 + 1 - 2nk) \\ &= 2n^2 + 1 + \sum_{k=1}^n (2n^2 + 1 - 2nk) \\ &= 2n^2 + 1 + (2n^2 + 1)n - 2n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= n^3 + n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^3 + k^2 + k + 1) &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{5}{6}n^3 + \frac{5}{4}n^2 + \frac{5}{3}n \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n (k^3 + k^2 + k + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{1}{4}n^4 + \frac{5}{6}n^3 + \frac{5}{4}n^2 + \frac{5}{3}n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{6n} + \frac{5}{4n^2} + \frac{5}{3n^3} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{1}{4}$ ■

11 $f'(x)$ から, 定数 C_i ($i = 1, 2, 3$) を用いて

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + C_1 & (-2 < x < -1) \\ x^2 + C_2 & (-1 < x < 1) \\ -\alpha x + C_3 & (1 < x < 2) \end{cases}$$

$[-2, 2]$ において $f(x)$ は連続であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) &= f(-2) && \text{すなわち} && -2\alpha + C_1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) && \text{すなわち} && -\alpha + C_1 = 1 + C_2 \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) && \text{すなわち} && 1 + C_2 = -\alpha + C_3 \\ \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= f(2) && \text{すなわち} && -2\alpha + C_3 = 0 \end{aligned}$$

これを解いて $C_1 = 2\alpha$, $C_2 = \alpha - 1$, $C_3 = 2\alpha$

$$\text{したがって} \quad f(x) = \begin{cases} \alpha(x+2) & (-2 \leq x \leq -1) \\ x^2 + \alpha - 1 & (-1 \leq x \leq 1) \\ -\alpha(x-2) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$f(x)$ は偶関数であるから

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 |f(x)| dx &= 2 \int_0^2 |f(x)| dx \\ &= 2 \int_0^1 |f(x)| dx + 2 \int_1^2 |f(x)| dx \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad \int_1^2 |f(x)| dx = -\alpha \int_1^2 (x-2) dx = -\alpha \left[\frac{1}{2}(x-2)^2 \right]_1^2 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \int_{-2}^2 |f(x)| dx = 2 \int_0^1 |f(x)| dx + \alpha \quad \cdots (*)$$

(i) $\alpha - 1 \geq 0$ すなわち $\alpha \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 (x^2 + \alpha - 1) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + (\alpha - 1)x \right]_0^1 = \alpha - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- (ii) $\alpha - 1 \leq 0$ すなわち $0 \leq \alpha \leq 1$ のとき,
 $\beta = \sqrt{1 - \alpha}$ とおくと, $x^2 + \alpha - 1 = x^2 - \beta^2$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^\beta (\beta^2 - x^2) dx + \int_\beta^1 (x^2 - \beta^2) dx \\ &= \left[\beta^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^\beta + \left[\frac{x^3}{3} - \beta^2 x \right]_\beta^1 \\ &= \frac{4}{3} \beta^3 - \beta^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} (\sqrt{1 - \alpha})^3 - (\sqrt{1 - \alpha})^2 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3} (1 - \alpha)^{\frac{3}{2}} + \alpha - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(i),(ii) の結果を (*) に代入すると

$$\int_{-2}^2 |f(x)| dx = \begin{cases} 3\alpha - \frac{4}{3} & (\alpha \geq 1) \\ \frac{8}{3} (1 - \alpha)^{\frac{3}{2}} + 3\alpha - \frac{4}{3} & (0 \leq \alpha \leq 1) \end{cases}$$

上式を α の関数と考えると, $\alpha \geq 1$ において増加関数であるから, この関数の最小値は, $0 \leq \alpha \leq 1$ の範囲で求めればよい. ここで

$$g(\alpha) = \frac{8}{3} (1 - \alpha)^{\frac{3}{2}} + 3\alpha - \frac{4}{3} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

とおくと

$$g'(\alpha) = -4\sqrt{1 - \alpha} + 3$$

$$g'(\alpha) = 0 \text{ とおくと } \alpha = \frac{7}{16}$$

$g(\alpha)$ の増減表は, 次のようになる.

α	0	...	$\frac{7}{16}$...	1
$g'(\alpha)$		-	0	+	
$g(\alpha)$	$\frac{4}{3}$	\searrow	極小 $\frac{53}{48}$	\nearrow	$\frac{5}{3}$

よって $\alpha = \frac{7}{16}$ のとき, 最小値 $\frac{53}{48}$ をとる. ■